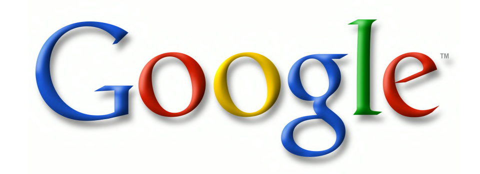


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

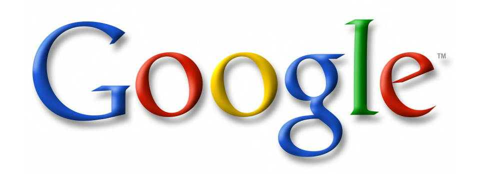
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

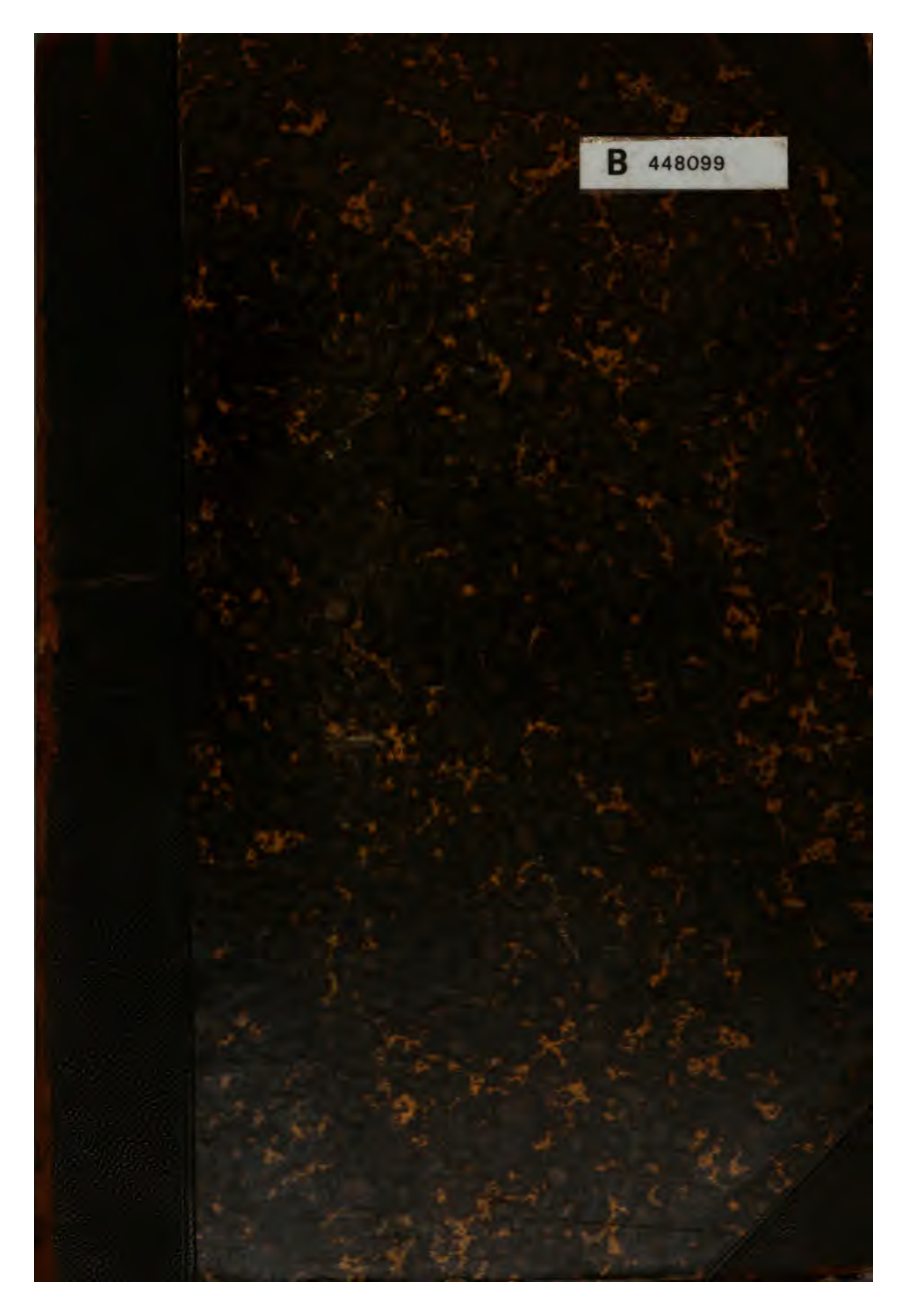
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

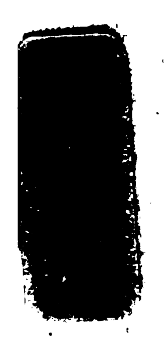
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

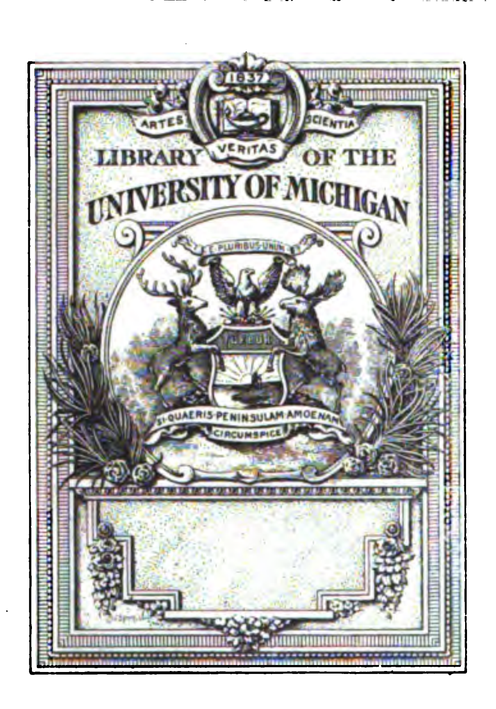
+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

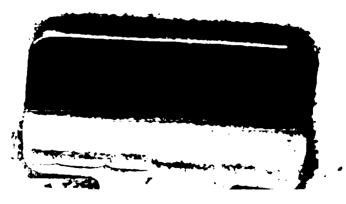
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


B 448099




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



QA
809
.K89

C. Tychsen.

SAMMLUNG VON PROBLEMEN

DER

ANALYTISCHEN

MECHANIK.

ZUM GEBRAUCHE BEI VORLESUNGEN UND
ZUR ÜBUNG FÜR DIE STUDIERENDEN DER THEORETISCHEN MECHANIK
AN UNIVERSITÄTEN UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

VON

FERDINAND KRAFT.

ZWEITER BAND.

MIT 195 TEXTFIGUREN.

STUTTGART,
J. B. METZLERSCHE BUCHHANDLUNG.
1885.

ALLE RECHTE VORBEHALTEN.

Druck der J. B. Metzlerschen Buchdruckerei in Stuttgart.

Vorwort.

Den zweiten Band der Öffentlichkeit übergebend, erledige ich mich der Pflicht des Dankes für die mir durch die Herren C. v. Szily in Budapest, Guilio Vivanti in Mantua, V. v. Lang in Wien zugegangenen Berichtigungen und Mitteilungen während der Erscheinung des Werkes. An alle Fachgenossen erlaube ich mir die Bitte zu richten, mich von allen beim Gebrauche des Werkes sich herausstellenden Mängeln gütigst in Kenntnis setzen zu wollen, damit dieselben sicher bei einer etwaigen späteren Erneuerung desselben beseitigt werden können.

Aufgabensammlungen für die theoretische Mechanik sind zur Zeit nur wenige vorhanden. Die mir bis jetzt bekannt gewordenen Werke dieser Art sind:

Aufgaben zur analytischen Mechanik von Arwed Fuhrmann, Leipzig.

Recueil d'exercices sur la mécanique rationelle à l'usage des candidats à la licence et à l'agrégation des sciences mathématiques par A de Saint Germain, Paris, 1877.

Problèmes de mécanique rationelle par P. M. Jullien, Paris, 1855.

Collection of Problems of theoretical Mechanics by William Walton, Cambridge, 1876.

Sammlung von Aufgaben aus der theoretischen Mechanik von P. Zech, Stuttgart, 1864.

Abhandlungen über reine Mechanik, welche viele spezielle Probleme enthalten, schrieben die Engländer Minchin, Routh, Todhunter, Whewell, deren Werke aber nicht als Aufgabensammlungen angesehen werden können.

Möge das nun als abgeschlossen vorliegende Werk bei Lehrenden wohlwollende und nachsichtige Beurteilung finden, Lehrenden und Lernenden einige Erleichterung bei ihrer Arbeit auf dem Gebiete der reinen Mechanik gewähren.

Heidelberg, im Juni 1885.

F. Kraft.

Hauptinhalt des ganzen Werkes.

Inhalt des zweiten Bandes.

Vierter Teil.

Statik.

Viertes Kapitel.

Attraktion.

Isaac Newton (geboren am 25. Dezember 1642 zu Woolsthorpe in der englischen Grafschaft Lincoln, gestorben am 20. März 1727 zu Kensington) führte im Jahre 1682 unter fortwährendem Widerspruch, namentlich von Leibnitz, den Begriff der Attraktion in die Naturwissenschaft ein und stellte das Gravitationsgesetz auf. Infolge eines entstandenen Handschriftenstreites wollte im Jahre 1867 Chasles der Pariser Akademie der Wissenschaften beweisen, dass nicht Newton, sondern Pascal der Entdecker des Gravitationsgesetzes sei; allein bald darauf wurde der Fälscher der betreffenden Handschriften, Lucas Vrain, entlarvt. Vergleiche hierüber: Pisko, „Newton oder Pascal?" (Wien, 1870); Neumann, „Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie" (Leipzig, 1870).

1. Bestimmung der Anziehung eines materiellen Punktes und einer homogenen materiellen geraden Linie, deren Richtung durch den Punkt geht, wenn das Anziehungsgesetz das Newton'sche ist.

Es sei (Fig. 1) m die Masse des materiellen Punktes M, m' die Masse der Längeneinheit der Geraden BC, $MB = a$, $MC = b$, $x =$ der Entfernung eines beliebigen Punktes P der Geraden MB von M, A die Grösse der gegenseitigen Anziehung, μ die Kraft, mit welcher zwei Masseneinheiten in der Einheit des Abstandes gegenseitig aufeinander wirken.

Figur 1.

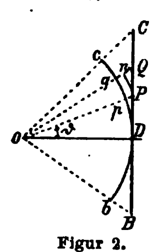
Die Anziehung eines Längenelementes dx der Geraden und der Masse m ist $\mu m m' \frac{dx}{x^2}$, folglich ist die Attraktion der ganzen Linie und des materiellen Punktes

$$A = \mu m m' \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \mu m m' \frac{b-a}{ab}.$$

Reicht die Gerade BC bis zum Punkte M, dann ist $a = 0$, folglich $A = \infty$.

Wird dagegen $b = \infty$ genommen, so ergiebt sich $A = \frac{\mu m m'}{a} = \frac{\mu m m' a}{a^2}$, d. h. in diesem Falle ist die Anziehung ebenso gross wie bei Linien von der Länge a im Abstande a von der Masse m.

2. Bestimmung der gegenseitigen Anziehung einer homogenen, materiellen Geraden und eines ausserhalb dieser Linie liegenden materiellen Punktes.



Figur 2.

Es sei (Fig. 2) O der materielle Punkt, BC die materielle Gerade, $OD \perp BC$ und $= a$, ω der Querschnitt, ϱ die Dichtigkeit dieser Linie, m die Masse des Punktes O, μ die absolute Kraft.

Ziehen wir die Strahlen OB, OC, die Strahlen OP, OQ so, dass PQ ein Element der Geraden BC ist, beschreiben vom Punkte O aus mit dem Radius a den Kreisbogen bDc, mit dem Halbmesser OP den koncentrischen Bogen Pn, so ist die Anziehung des Elementes PQ und der Masse m gleich $\mu m \varrho \omega \frac{PQ}{\overline{OP}^2}$ in der Richtung OP; weil aber $\triangle OPD \sim \triangle PQn$, also $PQ : OP = Pn : OD$, wodurch $\frac{PQ}{\overline{OP}^2} = \frac{Pn}{OD \,.\, OP} = \frac{pq}{\overline{OD}^2}$, so ist sie auch gleich $\mu m \varrho \omega \frac{pq}{\overline{OD}^2}$. Daher ziehen sich das Element PQ der geraden Linie BC und der Punkt O in derselben Weise an, wie das Element pq des materiellen Kreisbogens bDc von gleicher Beschaffenheit und der Punkt O, folglich ist die Attraktion der ganzen Linie BC derjenigen des Kreisbogens bDc äquivalent, mithin die Anziehung der Geraden und des Punktes

$$A = \mu m \varrho \omega \frac{\text{Bogen } bDc}{\overline{OD}^2} = \mu m \varrho \omega \frac{s}{a^2} = \mu \frac{mM}{a^2}.$$

wobei s die Länge, M die Masse des Kreisbogens bezeichnet.

Die Richtung, in welcher diese Attraktion wirkt, halbiert offenbar den Winkel BOC. Erstreckt sich die materielle Gerade von D aus nach beiden Seiten ins Unendliche, dann wird die Länge des Bogens $s = a\pi$, daher die Attraktion einer solchen Geraden und des Punktes O

$$A = \mu m \varrho \omega \frac{\pi}{a} = \mu m m' \frac{\pi}{a},$$

wenn noch m' die Masse der Längeneinheit der Geraden bezeichnet.

Die rein analytische Lösung dieser Aufgabe gestaltet sich wie folgt. Mit O als Pol, OD als Polaraxe, $OP = r$ als Fahrstrahl, $\measuredangle POD = \vartheta$ als Polarwinkel ist die Gleichung der Geraden BC $r = a \sec \vartheta$; mit $DP = y$

ist $y = a\,tg\,\vartheta$. Nun ist das Längenelement der Geraden BC gleich $dy = a\,sec^2\,\vartheta\,d\,\vartheta$, daher die Anziehung eines solchen Elementes und des Punktes O gleich $\mu\,m\,m'a\,sec^2\,\vartheta\,d\,\vartheta\,.\,\frac{1}{r^2} = \mu\frac{m\,m'}{a}\,d\,\vartheta$, folglich die Attraktion der Geraden BC und des Punktes O, wenn $\measuredangle BMD = \vartheta'$, $\measuredangle CMD = \vartheta''$ gesetzt wird,

$$A = \mu\frac{m\,m'}{a}\int_{-\vartheta'}^{\vartheta''} d\,\vartheta = \mu\,m\,m'\,\frac{\vartheta' + \vartheta''}{a}.$$

Aber es ist $a(\vartheta' + \vartheta'')$ gleich der Länge des zwischen den Fahrstrahlen MB, MC von dem Mittelpunkte O aus mit dem Radius $AD = a$ beschriebenen Kreisbogens, folglich auch

$$A = \mu\,m\,m'\,\frac{a(\vartheta' + \vartheta'')}{a^2} = \mu\frac{m\,m'\,s}{a^2} = \mu\frac{m\,M}{a^2}.$$

Erstreckt sich die Gerade BC nach beiden Seiten hin ins Unendliche, so wird $\vartheta' = \vartheta'' = \frac{\pi}{2}$, mithin in diesem Falle

$$A = \mu\,m\,m'\,\frac{\pi}{a}.$$

3. Eine materielle Gerade BC (Fig. 3) ist in eine gerade Linie gebracht worden, welche die beiden Kraftcentra K und L verbindet. Die Kräfte ziehen direkt proportional der Entfernung an. Welches ist die Ruhelage der materiellen Linie?

K B P C L

Figur 3.

Lasse sein μ, μ' die Absultkräfte der Centren K, L, P einen beliebigen Punkt der Geraden BC, $KB = x$, $LC = y$, $KP = s$, $LP = s'$, $BC = 2a$, $KL = l$, $\varrho =$ der Dichtigkeit des Stabes BC, $\varkappa =$ der Fläche seines Querschnittes. Die Gleichgewichtsbedingung lautet hier, weil $\varkappa$ und ϱ für alle Punkte der Linie gleich gross sind,

$$\mu\,\varkappa\,\varrho\int_x^{x+2a} s\,ds = \mu'\varkappa\,\varrho\int_y^{y+2a} s'\,ds', \text{ so dass } \mu\int_x^{x+2a} s\,ds = \mu'\int_y^{y+2a} s'\,ds'.$$

Hieraus folgt

$$\mu\{(x + 2a)^2 - x^2\} = \mu'\{(y + 2a)^2 - y^2\};\quad \mu(x + a) = \mu'(y + a) = \mu'(l - a - x),$$

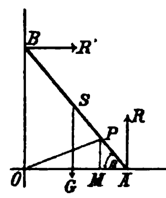
$$(\mu + \mu')\,x = \mu'\,l - (\mu + \mu')\,a,$$

$$x = \frac{\mu'\,l}{\mu + \mu'} - a, \text{ in entsprechender Weise } y = \frac{\mu\,l}{\mu + \mu'} - a.$$

Durch diesen Wert von x oder y ist die Gleichgewichtslage gegeben.

Walton, p. 64.

4. Ein Ende A (Fig. 4, S. 4) eines homogenen Stabes befindet sich auf einer glatten horizontalen Ebene, sein anderes Ende B berührt eine



Figur 4.

vertikale Ebene. Die Lotebene durch die Stabaxe und die genannten Ebenen stehen senkrecht auf einander und schneiden sich in dem Punkte O, der das Centrum einer anziehenden Kraft ist. Welches ist die Gleichgewichtslage des Stabes, wenn die Kraft direkt proportional der Entfernung wirkt?

Es sei β die Horizontalneigung des Stabes, OP eine nach einem beliebigen Punkte P des Stabes gezogene gerade Linie, S dessen Schwerpunkt, in welchem sein Gewicht G angreifen möge. Setze $OP = r$, $AP = s$, $AS = BS = a$, $\sphericalangle POA = \vartheta$, $\mu =$ der absoluten Attraktionskraft, R, R' gleich den Reaktionen der Ebenen in den Punkten A, B. Indem sämtliche am Systeme thätigen Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung zerlegt und Momente um den Punkt O genommen werden, ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen

$$R' = \int \mu r\, ds \cos\vartheta = \mu \int_0^{2a} (2a - s)\, ds \cos\beta = 2\mu a^2 \cos\beta, \tag{1}$$

$$R - G = \int \mu r\, ds \sin\vartheta = \mu \int_0^{2a} s\, ds \sin\beta = 2\mu a^2 \sin\beta, \tag{2}$$

$$R \,.\, 2a\cos\beta = G \,.\, a\cos\beta + R' \,.\, 2a\sin\beta,\quad 2R\cos\beta = G\cos\beta + 2R'\sin\beta. \tag{3}$$

Substituieren wir aus (1) und (2) die Werte von R' und R in (3), so ergiebt sich

$$G\cos\beta = 0, \qquad \text{d. i.} \qquad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

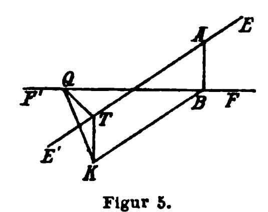
Daraus geht hervor, dass im Gleichgewichtszustande der Stab mit der Vertikalen OB in Berührung sein muss.

Es ist indessen augenscheinlich, dass dieses nicht die einzige Gleichgewichtslage sein kann. Der Stab wird einfach auch in Ruhe bleiben, wenn er so mit der horizontalen Ebene in Berührung liegt, dass einer seiner Endpunkte mit dem Centrum O zusammenfällt. Beim Anschreiben der Gleichungen (1), (2), (3) wurde stillschweigend angenommen, dass der Stab von den Ebenen nur in seinen Endpunkten Druck empfange, welche Hypothese nur für die erstere Gleichgewichtslage richtig ist. Aus diesem Grunde ist in der analytischen Untersuchung von den zwei Werten 0 und $\frac{\pi}{2}$ für β nur der letztere Wert zulässig.

Walton, p. 65.

5. Zwei materielle, unbegrenzte Gerade kreuzen sich im Raume und sind gegeneinander unter einem gegebenen Winkel geneigt. Diese Linien ziehen sich gegenseitig mit Kräften an, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung sind. Welches ist die ganze Attraktion in der

Richtung der kürzesten Linie zwischen denselben, wenn die gegenseitige Anziehung zweier Längeneinheiten, vereinigt in ihren Mittelpunkten und getrennt durch die Einheit der Entfernung, gleich der Einheit angesehen wird?



Figur 5.

Es seien EE', FF' (Fig. 5) die beiden geraden Linien, AB sei der kürzeste Abstand zwischen ihnen, T, Q seien zwei beliebige Punkte in diesen Linien. Ziehe die Gerade TQ, durch B lege eine zu AB senkrechte Ebene, QK sei die Projektion von TQ auf diese Ebene. Setze $AB = c = TK$, $TQ = s$, $AT = r = BK$, $BQ = r'$, $\sphericalangle QTK = \varphi$, den Winkel zwischen den Linien EE' und FF' gleich ϑ.

Die gegenseitige Attraktion der Punkte T und Q ist gleich $\frac{dr.dr'}{s^2}$, so dass ihre Componente in zu AB paralleler Richtung gleich $\frac{dr.dr'}{s^2}\cos\varphi$ $= \frac{dr.dr'.s}{s^3}\cos\varphi = \frac{c}{s^3}dr.dr'$ ist. Aber wir haben $s^2 = \overline{OK}^2 + \overline{TK}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta + c^2$, folglich ist die ganze Attraktion in zu AB paralleler Richtung

$$A = c\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dr.dr'}{(c^2+r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= c\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dr.dr'}{\{(r'+r\cos\vartheta)^2+c^2+r^2\sin^2\vartheta\}^{\frac{3}{2}}}$$

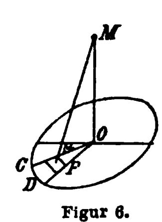
$$= c\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{(r'-r\cos\vartheta)\,dr}{(c^2+r^2\sin^2\vartheta)\{(r'-r\cos\vartheta)^2+c^2+r^2\sin^2\vartheta\}^{\frac{1}{2}}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= 2c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dr}{c^2+r^2\sin^2\vartheta} = \frac{2}{\sin\vartheta}\left[arc\left(tg = \frac{r\sin\vartheta}{c}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sin\vartheta}.$$

Walton, p. 181.

6. Bestimmung der gegenseitigen Anziehung einer homogenen Kreisscheibe von unbeträchtlicher Dicke und eines materiellen Punktes, welcher in dem auf ihr errichteten, durch ihren Mittelpunkt gehenden Perpendikel liegt.

Es sei (Fig. 6, S. 6) M der materielle Punkt, O die Mitte der Scheibe, welche einen Halbmesser a besitze, $OM = h$, μ die absolute Kraft. Ziehen wir auf der Scheibe zwei unendlich nahe liegende Radien OC, OD, beschreiben zwischen ihnen mit den Halbmessern x, $x + dx$ von O aus koncentrische Kreisbogen, so entsteht ein Flächenelement F der Scheibe



Figur 6.

von der Masse $m' x\, d\alpha\, dx$, wenn $\sphericalangle COD = d\alpha$, m' die Masse der Flächeneinheit ist. Die gegenseitige Attraktion dieses Massenelementes und der Masse m des Punktes M ist $\mu m m' \frac{x\, d\alpha\, dx}{h^2 + x^2}$. Diese Kraft lässt sich zerlegen längs des Halbmessers OC und parallel zu MO in die beiden Componenten $\mu m m' \frac{x\, d\alpha\, dx}{h^2 + x^2} \cos \sphericalangle MFO$, $\mu m m' \frac{x\, d\alpha\, dx}{h^2 + x^2} \sin \sphericalangle MFO$, die erstere Componente kommt nicht in Frage, weil die Scheibe bezüglich eines jeden Diameters symmetrisch ist, die letztere ist, da $\sin \sphericalangle MFO = h : \sqrt{h^2 + x^2}$, auch gleich $\mu m m' h \frac{x\, d\alpha\, dx}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, mithin erhalten wir für die die gesuchte Anziehung

$$A = \mu m m' h \int_0^a \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} d\alpha = 2 \mu m m' \pi h \int_0^a \frac{x\, dx}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2 \mu m m' \pi \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right).$$

Dieser Ausdruck gilt für jeden Wert von $h > 0$. Ist der Halbmesser der Scheibe unendlich gross, so folgt durch das oben erhaltene Resultat mit $a = \infty$ für die Attraktion $A = 2 \mu m m' \pi$, woraus wir erkennen, dass in diesem Falle die Grösse der Attraktion von der Entfernung des materiellen Punktes von der Scheibe unabhängig ist.

7. Bestimmung der gegenseitigen Anziehung eines materiellen Punktes von der Masse m in der Spitze eines geraden Kreiskegels und der Masse dieses homogenen Kegels.

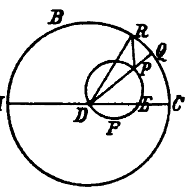
Es bezeichne h die Höhe, s die Seite, m' die Masse der Volumeneinheit des Kegels, μ die absolute Kraft. Denken wir uns den Kegel durch zu seiner Grundfläche parallele Ebenen in unendlich dünne Scheiben von der Dicke dx zerlegt, dann ist die Anziehung einer solchen Scheibe im Abstande x von der Kegelspitze und des materiellen Punktes, wenn y den Radius dieser Scheibe bezeichnet, nach dem Resultate unter 6,

$$2 \pi \mu m m' \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx = 2 \pi \mu m m' \left(1 - \frac{h}{s}\right) dx, \text{ weil}$$

$x : \sqrt{x^2 + y^2} = h : s$ ist, folglich die gegenseitige Attraktion des materiellen Punktes und Kegels

$$A = 2 \pi \mu m m' \left(1 - \frac{h}{s}\right) \int_0^h dx = 2 \pi \mu m m' \left(1 - \frac{h}{s}\right) h.$$

8. Ein dünner Ring DEF (Fig. 7) ist an einen anderen dünnen Ring ABC mittelst eines Fadens AD gefesselt, die Länge des Fadens ist dem Halbmesser des Ringes ABC gleich, in welchem der Ring DEF vollständig liegt. Wie gross ist die Spannung des Fadens, wenn DEF in Ruhe ist und die Attraktion von ABC verkehrt proportional dem Kubus der Entfernung ist.



Figur 7.

Befindet sich der kleinere Ring in Ruhe, dann fällt offenbar die Richtung des Fadens AD mit einem Halbmesser des grösseren Ringes zusammen. Es sei P ein beliebiger Punkt des kleineren, R ein solcher des grösseren Ringes. Ziehe die Linien PR, DR, DPQ, lasse sein $a =$ dem Radius des grösseren Ringes, $DE = a'$, $DP = c$, $PR = \varrho$, $\measuredangle PDC = \vartheta$, $\measuredangle RDQ = \varphi$, $\measuredangle RPQ = \psi$, ds, ds' Elemente der zwei Ringe bei R, P, m, m' die Massen ihrer Längeneinheiten, $T =$ der verlangten Spannung, die absolute Kraft $\mu = 1$.

Für die Spannung T besteht die Gleichung

$$T = m\,m' \int \left\{ \cos\vartheta \, ds' \int \frac{ds}{\varrho^3} \cos\psi \right\},$$

weil aber $ds = a\,d\varphi$, $ds' = \frac{1}{2} a'\, d(\pi - 2\vartheta) = -a'\,d\vartheta$, so ist auch

$$T = m\,m' a\,a' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varrho^3} \cos\psi \right\}.$$

Nun haben wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varrho^3} \cos\psi = \int_0^{2\pi} \frac{a\cos\varphi - c}{(a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi)^2}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dc} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dc} \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{(a^2 + c^2)\left(1 + tg^2\frac{\varphi}{2}\right) - 2ac\left(1 - tg^2\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= \frac{d}{dc} \int_0^{2\pi} \frac{d\, tg\frac{\varphi}{2}}{(a-c)^2 + (a+c)^2\, tg^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{d}{dc} \left[\frac{1}{a^2 - c^2}\, arc\left(tg = \frac{a+c}{a-c}\, tg\frac{\varphi}{2} \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{d}{dc} \left(\frac{\pi}{a^2 - c^2} \right) = \frac{2\pi c}{(a^2 - c^2)^2},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, d\vartheta \frac{2\pi c}{(a^2-c^2)^2} = 2\pi a' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\vartheta \, d\vartheta}{(a^2 - a'^2\cos^2\vartheta)^2}$$

$$= 2\pi a' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\vartheta \, d\vartheta}{(a^2 - a'^2 + a^2 tg^2\vartheta)^2}$$

$$= \frac{2\pi a'}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 - a'^2 + x^2)^2}$$

$$= \frac{2\pi^2 a'}{a\sqrt{a^2 - a'^2}}.$$

Mithin ist

$$T = \frac{2\pi^2 m m' a'^2}{\sqrt{a^2 - a'^2}}.$$

Walton, p. 182.

9. Ein System besteht aus n gleichen materiellen Punkten, welche keine Anfangsgeschwindigkeit besitzen. Beweise, dass das System in Ruhe bleiben wird, wenn die Coordinaten seiner Punkte nur nach dem Gesetze sich ändern können

$$n\Sigma(x^2 + y^2 + z^2) - (\Sigma x)^2 - (\Sigma y)^2 - (\Sigma z)^2 = konst.$$

und die Punkte sich mit der Entfernung direkt proportionalen Kräften anziehen.

Die Attraktion zwischen irgend zwei Punkten P_1, P_2 des Systemes, welche einen wechselseitigen Abstand r besitzen, ist r direkt proportional. Denken wir uns, dass das System irgend eine unendlichkleine Verschiebung ohne Störung seines geometrischen Zusammenhanges erfahre, so dass α die Projektion des unendlichkleinen Weges von P_1 auf die Richtung der Linie P_1P_2, β diejenige des unendlichkleinen Weges von P_2 auf die Richtung von P_2P_1, dann wird $(\alpha + \beta) r$ die Summe der Momente der beiden Kräfte bezeichnen. Aber es ist $\alpha + \beta = -dr$, folglich erhalten wir durch das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, die Summe der Momente des ganzen Systemes gleich Null nehmend,

$$0 = \Sigma(r\,dr),$$

woraus sich ergiebt

$$C = 2\int\Sigma(r\,dr) = \Sigma(r^2) = \Sigma\{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\}$$

$$= (n-1)\Sigma(x^2 + y^2 + z^2) - 2\Sigma(xx' + yy' + zz'),$$

$$C = n\Sigma(x^2 + y^2 + z^2) - (\Sigma x)^2 - (\Sigma y)^2 - (\Sigma z)^2.$$

Walton, p. 193.

10. Bestimmung der Attraktion eines durch die Rotation der Curve $r^2 = a^2 \cos\vartheta$ um ihre Axe erzeugten Körpers auf einem in ihrem Ursprunge befindlichen Punkt, wenn die Anziehung der materiellen Punkte des Körpers umgekehrt proportional der Entfernung und μ die absolute Kraft ist.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r r\,d\vartheta\,dr\,.\,2\pi r \sin\vartheta \frac{\mu}{r^2}\cos\vartheta = 2\pi\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r \sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,dr$$

$$= 2\pi\mu a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{3}{2}}\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = -\,2\pi\mu a\left[\frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}}\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{5}\pi\mu a.$$

Walton, p. 179.

11. Bestimmung der gegenseitigen Anziehung der Masse einer homogenen Halbkugel und eines im Kugelmittelpunkte liegenden materiellen Punktes.

Es sei m die Masse des materiellen Punktes, m' diejenige der Kubikeinheit der Kugel vom Radius a. Legen wir in den Abständen x und $x + dx$ vom Kugelcentrum zwei zu der ebenen Begrenzungsfläche der Halbkugel parallele Ebenen, so schliessen dieselben eine unendlichdünne Scheibe von der Masse der Halbkugel ein. Die Anziehung dieser Scheibe und des materiellen Punktes ist, wenn y den Radius der Begrenzungsfläche im Abstande x vom Kugelcentrum bezeichnet,

$$2\mu m m'\pi\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx = 2\mu m m'\pi\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx,$$

weil $x^2 + y^2 = a^2$. Mithin erhalten wir für die Attraktion der Masse m und der Halbkugel

$$A = 2\mu m m'\pi\int_0^a\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx = \mu m m'\pi a.$$

Denken wir uns die Masse $\frac{2}{3}m'\pi a^3$ der Halbkugel in einem solchen Abstande z von dem Mittelpunkte koncentriert, dass die Anziehung zwischen ihr und der Masse m dieselbe bleibt, als wenn diese Masse gleichförmig im Volumen der Halbkugel verteilt wäre, so muss dafür die Bedingung erfüllt sein

$$\mu m m'\pi a = \frac{2}{3}\frac{\mu m m'\pi a^3}{z^2},$$

woraus sich ergiebt

$$z = a\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{\cdot}816\,a.$$

Dieser Punkt im Abstande z vom Kugelmittelpunkte wird Mittelpunkt der Attraktion der Masse genannt.

12. Bestimmung der gegenseitigen Anziehung einer homogenen Kugel und eines materiellen Punktes auf ihrer Oberfläche.

Indem wir dieselben Bezeichnungen wie unter 11 anwenden, die Kugel in unendlich dünne Scheiben senkrecht zu der Verbindungslinie des materiellen Punktes und Kugelcentrums zerlegt denken, diese Linie als Abscissenaxe mit dem Ursprunge in der Kugelfläche nehmen, wodurch die Gleichung des die Kugel durch Rotation um die Axe der x erzeugenden Kreises $y^2 = 2ax - x^2$ ist, erhalten wir für die Attraktion A' der Masse m und der anliegenden Halbkugel

$$A' = 2\mu m m' \pi \int_0^a \left(1 - \sqrt{\frac{x}{2a}}\right) dx = 2\mu m m' \pi a \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

Für den Mittelpunkt der Anziehung dieser Halbkugel besteht die Gleichung

$$\frac{2}{3}\frac{\mu m m' \pi a^3}{z^2} = 2\mu m m' \pi a \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

so dass
$$z = \frac{a}{\sqrt{3 - \sqrt{2}}} = 0{\cdot}794\, a.$$

Die Anziehung der Masse m und der Masse der ganzen Kugel ist

$$A = 2\mu m m' \pi \int_0^{2a} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{2a}}\right) dx = \frac{4}{3}\mu m m' \pi a.$$

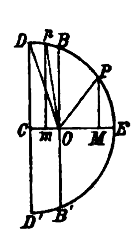
Für den Abstand des Mittelpunktes der Anziehung der Kugel vom Punkte m besteht die Relation

$$\frac{4}{3}\frac{\mu m m' \pi a^3}{z^2} = \frac{4}{3}\mu m m' \pi a, \qquad \text{so dass} \qquad z = a.$$

Mithin zieht jede homogene Kugel einen Punkt auf ihrer Oberfläche so an, als wäre die ganze Kugelmasse in ihrem Mittelpunkte vereinigt.

13. Bestimmung desjenigen Punktes in der Axe eines homogenen, halbkugelförmigen Körpers, in welchem ein materieller Punkt unter der Wirkung der Attraktion der materiellen Punkte der Halbkugel im Gleichgewichte bleibt, wenn das Anziehungsgesetz das Newton'sche ist.

Es sei (Fig. 8, S. 11) CE die Axe der Halbkugel, DCD' ein Durchmesser ihrer Basis, O die verlangte Lage des materiellen Punktes, DED' der ebene Schnitt durch CE und DCD' der Oberfläche des Körpers. Ziehe $BOB' \perp CE$, die Gerade OD, wähle die Punkte P, p in den Bogen EB, BD beliebig, ziehe die Geraden OP, Op, die Linien



PM, pm senkrecht zu CE. Lasse sein $CE = a = CD$, $OC = c$, $OB = b$, $OD = b'$, $OP = r$, $OM = x$, $PM = y$, $Op = r'$, $Om = x'$, $pm = y'$, $\mu =$ der absoluten Anziehung einer Masseneinheit der Halbkugel, $\varrho =$ ihrer Dichtigkeit, $A =$ der Anziehung des Teiles BEB', $B =$ derjenigen des Teiles $BDD'B'$ der Halbkugel auf den materiellen Punkt.

Figur 8.

Die Anziehung einer dünnen zur Axe senkrechten Scheibe der Halbkugel von der Dicke dx im Punkte M auf den Punkt O ist $2\pi\mu\varrho\, dx\left(1 - \frac{x}{r}\right)$, folglich ist

$$A = 2\pi\mu\varrho\int_0^{a-c}\left(1 - \frac{x}{r}\right)dx, \text{ d. i. } \frac{A}{2\pi\mu\varrho} = a - c - \int_0^{a-c}\frac{x\,dx}{r}. \quad (1)$$

In gleicher Weise ergiebt sich

$$B = 2\pi\mu\varrho\int_0^{c}\left(1 - \frac{x'}{r'}\right)dx', \quad \text{d. i.} \quad \frac{B}{2\pi\mu\varrho} = c - \int_0^{c}\frac{x'\,dx'}{r'}. \quad (2)$$

Nun bestehen die geometrischen Relationen

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 + a^2 - (x + c)^2 = a^2 - c^2 - 2cx = b^2 - 2cx,$$

so dass

$$2cx = b^2 - r^2, \quad c\,dx = -r\,dr,$$

daher $\frac{x\,dx}{r} = -\frac{b^2 - r^2}{2c^2}dr$. Mithin ist vermöge (1), wenn wir beachten, dass $r = a - c,\ b$, wenn $x = a - c,\ 0$ ist,

$$\frac{A}{2\pi\mu\varrho} = a - c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{a-c}(b^2 - r^2)\,dr. \quad (3)$$

Ferner sagt uns die Geometrie, dass

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 = x'^2 + a^2 - (c - x')^2 = a^2 - c^2 + 2cx' = b^2 + 2cx',$$

womit $2cx' = r'^2 - b^2$, $c\,dx' = r'\,dr$, daher $\frac{x'\,dx'}{r'} = -\frac{b^2 - r'^2}{2c^2}dr'$.

Demnach ergiebt sich mit (2), weil $r' = b',\ b$, wenn $x' = c,\ 0$ ist,

$$\frac{B}{2\pi\mu\varrho} = c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{b'}(b^2 - r'^2)\,dr' = c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{b'}(b^2 - r^2)\,dr. \quad (4)$$

Für das Gleichgewicht des materiellen Punktes O muss $A = B$ sein, so dass mit (3) und (4)

$$a - c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{a-c}(b^2 - r^2)\,dr = c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{b'}(b^2 - r^2)\,dr,$$

folglich

$$a - 2c = \frac{1}{2c^2}\int_{a-c}^{b'} (b^2 - r^2)\,dr.$$

Die Ausführung der Integration giebt, wenn wir b' dabei durch seinen Wert $\sqrt{a^2 + c^2}$ ersetzen und reduzieren,

$$a^3 - 4c^3 = (a^2 - 2c^2)\sqrt{a^2 + c^2}.$$

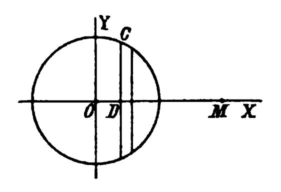
Durch Quadratur und Vereinfachung des Resultates folgt noch

$$12c^4 - 8a^3c + 3a^4 = 0,$$

aus welcher Gleichung der Wert von c abgeleitet werden muss. Näherungsweise ist $c = \frac{3}{7}a$.

Diarian Repository, p. 629. Walton, p. 179.

14. Bestimmung der gegenseitigen Anziehung einer homogenen Kugel und eines ausserhalb ihr gelegenen, materiellen Punktes unter der Annahme, dass die Kugel aus unendlichdünnen Scheiben zusammengesetzt sei.



Figur 9.

Es sei m die Masse des ausserhalb der Kugel gelegenen, materiellen Punktes M, m' diejenige der Volumeneinheit der homogenen Kugel mit dem Mittelpunkte O (Fig. 9), $OM = b$, der Kugelradius $= a$, O Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, der Strahl OM Abscissenaxe, die Ordinatenaxe OY in der Ebene der Figur gelegen. Die Gleichung des die Kugel durch Rotation um die Axe der x erzeugenden Kreises ist $x^2 + y^2 = a^2$, der Abstand irgend einer unendlichdünnen zu OM senkrechten Kugelscheibe CD von M ist $b - x$, so dass die Anziehung der Masse in M und dieser Scheibe $2\mu m m' \pi \times$

$$\left(1 - \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + y^2}}\right) dx = 2\mu m m' \pi \left(1 - \frac{b-x}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2bx}}\right) dx.$$

Folglich ist die gegenseitige Attraktion des materiellen Punktes und der Kugelmasse

$$A = 2\mu m m' \pi \int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{b-x}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2bx}}\right) dx. \qquad (1)$$

Nun erhalten wir mit $b^2 + a^2 - 2bx = u$

$$\int\left(1 - \frac{b-x}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2bx}}\right) dx = -\frac{1}{2b}\int\left(1 - \frac{b^2 - a^2}{2b}u^{-\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2b}\right) du$$

$$= -\frac{1}{2b}\left[u - \frac{b^2 - a^2}{2b}u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3b}u^{\frac{3}{2}} + C\right]$$

$$= -\frac{1}{2b}\left[b^2 + a^2 - 2bx - \frac{b^2 - a^2}{b}(b^2 + a^2 - 2bx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3b}(b^2 + a^2 - 2bx)^{\frac{3}{2}} + C\right],$$

$$\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{b-x}{\sqrt{b^2+a^2-2bx}}\right)dx=\frac{2a^3}{3b^2}, \tag{2}$$

so dass mit (1) und (2), wenn noch M die Masse der Kugel bedeutet,

$$A=\frac{4}{3}\mu m m' \pi \frac{a^3}{b^2}=\mu\frac{mM}{b^2}.$$

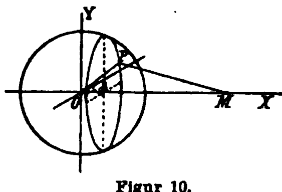
Folglich zieht eine homogene Kugel die Masse m eines ausserhalb ihr gelegenen Punktes gerade so an, als wenn ihre Masse in ihrem Mittelpunkte koncentriert wäre.

Mit $b=a$ befindet sich der materielle Punkt auf der Oberfläche der Kugel, in diesem Falle ist daher

$$A=\frac{4}{3}\mu m m' \pi a.$$

15. Bestimmung der gegenseitigen Anziehung einer aus koncentrischen Schalen von konstanter Dichtigkeit zusammengesetzten Kugel und eines materiellen Punktes, wenn das Attraktionsgesetz das Newton'sche ist.

Es bezeichne m die Masse des materiellen Punktes, m' diejenige eines materiellen Teilchens der Kugel, ϱ die Masse ihrer Volumeneinheit, welche in gleichen Abständen vom Kugelmittelpunkte gleichen Wert hat, b die Entfernung des materiellen Punktes M vom Mittelpunkte O der Kugel (Fig. 10), a den Kugelradius. P sei die Lage des Massenteilchens m', $OP=r$, $MP=u$.



Figur 10.

Der Ausdruck für die gegenseitige Anziehung der Massen m und m' nach dem Gravitationsgesetze ist

$$\mu\frac{mm'}{u^2}. \tag{1}$$

Nun sei O der Mittelpunkt einer unendlich dünnen Schale der Kugel von der Dicke dr, P irgend einer ihrer materiellen Punkte, $\sphericalangle POM=\vartheta$, der Winkel, welchen die Ebene POM mit der horizontalen Ebene durch OM einschliesst, $=\varphi$. Die Radien der Kugelschale sind r und $r+dr$. Geht ϑ in $\vartheta+d\vartheta$ über, so ist das zwischen den veränderlichen Schenkeln der Winkel ϑ und $\vartheta+d\vartheta$ und den von ihnen eingeschlossenen Bogen der Schale liegende Flächenelement $r\,dr\,d\vartheta$. Dreht sich die Ebene POM durch einen Winkel $d\varphi$, dann beschreibt der Punkt P den Weg $r\sin\vartheta\,d\varphi$, also die Fläche $r\,dr\,d\vartheta$ das Volumen $r^2 dr\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ von der Masse $\varrho r^2 dr\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$. Nach (1) ist die Anziehung dieses Massenelementes und der Masse m gleich

$$\mu\varrho m\frac{r^2 dr\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{u^2}.$$

Zerlegen wir diese Kraft in ihre Componenten in paralleler und normaler Richtung zu OM, dann ist die erstere gleich

$$\mu \varrho m \frac{r^2 \, d r \sin \vartheta \, d \vartheta \, d \varphi}{u^2} \cos \sphericalangle PMO. \tag{2}$$

Für das Dreieck PMO besteht die Relation $u^2 = b^2 + r^2 - 2 b r \cos \vartheta$, womit $\cos \sphericalangle PMO = \frac{b - r \cos \vartheta}{u} = \frac{b^2 - r^2 + u^2}{2 b u}$, $u \, du = b r \sin \vartheta \, d \vartheta$.
Dadurch geht der Ausdruck (2) über in

$$\frac{\mu \varrho m}{2 b^2} r \, d r \, d \varphi \frac{b^2 - r^2 + u^2}{u^2} d u.$$

Die Anziehung der ganzen Kugelschale und der Masse m in zu OM paralleler Richtung ist somit

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu \varrho m r \, d r}{2 b^2} \int_{b-r}^{b+r} \int_0^{2\pi} \frac{b^2 - r^2 + u^2}{u^2} \, du \, d\varphi \\ &= \frac{\mu \pi \varrho m r \, d r}{b^2} \int_{b-r}^{b+r} \frac{b^2 - r^2 + u^2}{u^2} \, d u, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $\frac{\mu \pi \varrho m r \, d r}{b^2} \frac{b^2 - r^2 + u^2}{u^2} d u$ die Anziehung der Masse m und des von dem Flächenelemente $r \, d r \, d \vartheta$ bei einer vollen Umdrehung um OM erzeugten Ringes bedeutet.

Weil die Kugelschale bezüglich jeder durch ihren Mittelpunkt gelegten Ebene symmetrisch ist, so ist die Summe aller elementaren Kraftcomponenten senkrecht zu OM gleich Null, daher der Ausdruck (4) bereits gleich der ganzen Attraktion.

Nun giebt die Integration der Gleichung (4) nach u als Anziehung der Schale und des Punktes

$$A = \frac{\mu \pi \varrho m}{b^2} r \, d r \left[u - \frac{b^2 - r^2}{u} + C \right]_{b-r}^{b+r} = \frac{4 \mu \pi \varrho m}{b^2} r \, d r = \mu \frac{m M'}{b^2}, \tag{5}$$

wenn $M' = 4 \pi \varrho r^2 \, d r =$ der Masse der Schale gesetzt wird.

Daraus geht hervor, dass eine Kugelschale einen ausserhalb ihr gelegenen Punkt ebenso anzieht, als wenn ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Besteht nun eine Kugel aus unendlich vielen koncentrischen Kugelschalen, deren Dichtigkeiten entweder von Schicht zu Schicht sich ändern oder durchweg gleich sind, dann wird offenbar die Attraktion der Gesamtheit dieser Schalen, d. i. der Kugel, welche sie bilden, auf den ausserhalb ihr liegenden materiellen Punkt so beschaffen sein, als wenn die Gesamtmasse dieser Schalen, d. i. der Kugel, in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Für eine homogene Kugel ist mithin, wenn a ihren Radius, M ihre Masse bedeutet, durch (4)

$$A = \frac{\mu \varrho m}{2 b^2} \int_0^a \int_{b-r}^b \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{b^2 - r^2}{u^2}\right) r\, dr\, du\, d\varphi = \frac{4 \mu \pi \varrho m}{b^2} \int_0^a r^2 dr$$
$$= \frac{4}{3} \mu \pi \varrho m \frac{a^3}{b^2} = \mu \frac{m M}{b^2}.$$

Ist die Dichtigkeit ϱ nicht konstant, sondern eine Funktion von r, etwa $\varrho = p \pm q r$, dann erhalten wir als totale Anziehung der Kugel und des Punktes

$$A = \frac{4 \mu \pi \varrho m}{b^2} \int_0^a (p \pm q r) r^2 dr = \frac{4}{3} \mu \pi \varrho m \frac{a^3}{b^2} (p \pm \frac{3}{4} q a)$$
$$= \mu \frac{m M}{b^2} (p \pm \frac{3}{4} q a).$$

Befindet sich der Punkt A von der Masse m innerhalb der Kugelschale vom Halbmesser r und der Dicke dr, dann sind offenbar die Grenzen des Integrales nach u in (4) $r - b$ und $r + b$, so dass die Attraktion

$$A = \frac{\mu \pi \varrho m r\, dr}{b^2} \int_{r-b}^{r+b} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{u^2}\right) du = 0.$$

Ein materieller Punkt befindet sich demnach innerhalb einer Kugelschale, wenn nur die gegenseitige Anziehung wirkt, bei jeder Lage im Gleichgewichte.

Liegt nun der materielle Punkt innerhalb einer beliebigen Anzahl unendlich dünner, koncentrischer Kugelschalen, so gilt dieser Satz für jede Schicht, gleichviel ob die Dichtigkeit der Masse von Schichte zu Schichte sich ändert oder konstant ist, wodurch er auch auf eine Schichte von endlicher Dicke angewendet werden kann. Daraus geht hervor, dass sich die Anziehung einer Kugel auf einen Punkt in ihrem Inneren auf die Anziehung derjenigen koncentrischen Kugel reduziert, deren Oberfläche durch diesen Punkt geht. Ist daher b der Abstand dieses Punktes vom Kugelmittelpunkte und die Dichtigkeit der Kugel konstant, so haben wir

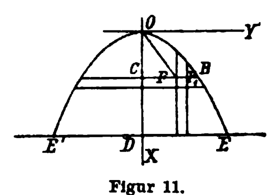
$$A = \frac{4 \mu \pi \varrho m}{b^2} \int_0^b r^2 dr = \frac{4}{3} \mu \pi b \varrho m.$$

Die Anziehung ist demnach hier vom Halbmesser der Kugel unabhängig und direkt proportional dem Abstande des materiellen Punktes vom Kugelcentrum.

Aus diesen Betrachtungen lässt sich die Folgerung ziehen: Bestehen zwei Kugeln aus koncentrischen Schichten, von denen jede eine homogene Masse besitzt, dann ziehen sich diese Kugeln so an, wie wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären.

16. Auf der kugelförmig gedachten Oberfläche der Erde befindet sich ein Berg von der Form eines Rotationsparaboloides mit vertikaler Axe. Welches ist die Anziehung dieses Berges und eines materiellen Punktes

auf seiner Spitze, wenn die Masse des Berges von homogener Beschaffenheit ist?



Figur 11.

Es sei (Fig. 11) OEE' ein vertikaler Schnitt des Paraboloides durch seine Axe OD, dann ist die Curve EOE' eine Parabel und wird durch die Rotation der Fläche ODE, wobei $DE \perp OD$, dieser Körper erzeugt. Der Scheitel O dieser Parabel sei Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes mit der Abscissenaxe OD, so dass die Coordinaten eines beliebigenPunktes B der Parabel $OC = x$, $CB = y$ sind. h sei die Höhe AD, $nh = DE$ der Radius der Grundfläche des Körpers, m die Masse des materiellen Punktes O auf dem Gipfel des Berges, ϱ die Masse der Volumeneinheit des Körpers, μ die Attraktion zweier Masseneinheiten im Abstande der Einheit der Entfernung von einander.

Zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes B der Parabel und denjenigen des Punktes E besteht die Beziehung $x : h = y^2 : n^2 h^2$, so dass die Gleichung der die Oberfläche des Körpers durch Rotation erzeugenden Curve

$$y^2 = n^2 h x. \tag{1}$$

Legen wir in den Abständen x und $x + dx$ vom Scheitel O durch den Körper zwei horizontale Ebenen, beschrieben um OD zwei koncentrische Cylinderflächen mit den Radien $CF = r$, $CF_1 = r + dr$, wobei $r < y$, dann schliessen diese vier Flächen einen Ring vom Querschnitte $dx\,dr$ ein. Führen wir ferner durch die Axe OD noch zwei Ebenen, welche mit der Ebene ODE die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$ bilden, so schneiden diese Ebenen von dem Ringe ein Volumenelement $dx\,dr\,r\,d\varphi$ aus, welches die Masse $\varrho\,dx\,r\,dr\,d\varphi$ besitzt. Diese Masse ist von dem Scheitel O um die Strecke $OF = \sqrt{x^2 + r^2}$ entfernt, demnach die Anziehung zwischen ihr und dem materiellen Punkte O

$$\mu \frac{m\varrho\,dx\,r\,dr\,d\varphi}{x^2 + r^2}. \tag{2}$$

Diese Kraft zerlegen wir in ihre Componenten in paralleler und senkrechter Richtung zu OD, es ist die erstere dieser Seitenkräfte gleich

$$\mu \frac{m\varrho\,dx\,r\,dr\,d\varphi}{x^2 + r^2} \cos \measuredangle FOD = \mu \frac{m\varrho\,dx\,r\,dr\,d\varphi}{x^2 + r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$= \mu \frac{m\varrho\,x\,dx\,r\,dr\,d\varphi}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Um nun die Gesamtanziehung in der Richtung von OD zu erhalten, ist dieses Differential in Hinsicht auf die drei Variablen φ, r und x zu inte-

grieren. Es sind hier die Grenzen der Integration 0 und 2π bezüglich φ, 0 und y bezüglich r, 0 und h bezüglich x. Demnach ist diese Attraktion

$$A=\mu m \varrho \int_0^h\int_0^y\int_0^{2\pi}\frac{x\,dx\,r\,dr\,d\varphi}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=2\mu\pi m\varrho\int_0^h\int_0^y\frac{x\,dx\,r\,dr}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$2\mu\pi m\varrho\dfrac{x\,dx\,r\,dr}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$ ist die Anziehung zwischen der Masse m und derjenigen des Ringes vom Halbmesser r und dem Querschnitte $dx\,dr$, an den einzelnen Punkten desselben wirken die aus (2) sich ergebenden Horizontalcomponenten, ausser den soeben summierten Vertikalcomponenten. Weil dieser Ring in Beziehung auf jede durch die Axe OD gehende Ebene symmetrisch ist, so ist die Resultante aus den Horizontalkräften gleich Null und es ist offenbar der Ausdruck für A die totale Anziehung zwischen der Masse des materiellen Punktes O und der Masse des Berges.

Die Fortsetzung der Integration giebt

$$A=2\mu\pi m\varrho\int_0^h\left(1-\frac{x}{\sqrt{n^2hx+x^2}}\right)dx.$$

$2\mu\pi m\varrho\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{n^2hx+x^2}}\right)dx$ stellt die Grösse der Anziehung des materiellen Punktes O und einer horizontalen Schicht von der Dicke dx im Abstande x von O dar.

Endlich erhalten wir durch weitere Summation

$$A=2\mu\pi m\varrho h\left\{1-\sqrt{1+n^2}+\frac{n^2}{2}l\frac{n^2+2+2\sqrt{1+n^2}}{n^2}\right\}, \tag{3}$$

womit die Grösse der Attraktion der Masse m und derjenigen des Berges bekannt ist.

Unter der Annahme, dass der Berg sehr flach, also n bedeutend grösser als die Einheit ist, kann der bekommene Ausdruck vereinfacht werden. Zunächst lässt sich schreiben

$$A=2\mu\pi m\varrho hn\left\{\frac{1}{n}-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{n}{2}l\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\right\}. \tag{4}$$

Nun ist $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=1+\frac{1}{2n^2}$, wenn die Glieder mit der vierten Potenz von n vernachlässigt werden, ferner

$$l\left\{1+\frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)\right\}=\frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^2$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^3\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^3-\cdots=\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{6n^2}\right),$$

wenn ebenfalls die Glieder mit der vierten Potenz von n vernachlässigt werden. Damit geht die (4) über in

$$A = 2\mu\pi m\varrho h\left(1 - \frac{2}{3n}\right). \tag{5}$$

Bezeichnet R den Halbmesser der Erde, ϱ_1 die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse, A_1 die Attraktion der Erde und des materiellen Punktes O, welcher auf ihr liegt, so ist

$$A_1 = \frac{4}{3}\mu\pi R m \varrho_1,$$

daher

$$\frac{A}{A_1} = \frac{3}{2}\frac{\varrho}{\varrho_1}\frac{h}{R}\left(1 - \frac{2}{3n}\right).$$

Wählen wir z. B. $n = 5$, $h = 0{\cdot}5$ geographische Meilen, näherungsweise $\varrho = 2{\cdot}77$, $\varrho_1 = 5{\cdot}68$, $R = 860$ Meilen, so erhalten wir $A : A_1 = 1 : 2713$. Folglich ist die Anziehung der Erde 2713 mal grösser als die dieses Berges auf die Masse m.

Autenheimer, Elementarbuch der Differentialrechnung etc.

17. Bestimmung der totalen Anziehung, welcher eine sehr dünne, homogene Kugelschale und ein materieller Punkt unterworfen sind, wenn das Attraktionsgesetz allgemein durch $F(u)$ ausgedrückt wird, wobei u wieder die Entfernung bezeichnet und die übrigen Benennungen dieselben wie unter 15 sind.

Nach dem Früheren ist die Attraktion des materiellen Punktes von der Masse m und einem Volumenelemente der Kugelschale parallel zu der den materiellen, ausserhalb der Schale gelegenen Punkt und den Mittelpunkt der Schale verbindenden Geraden

$$\frac{\mu m \varrho}{2b^2} r\,dr\,d\varphi\,(u^2 + b^2 - r^2) F(u)\,du. \tag{1}$$

Mithin ist die verlangte Attraktion

$$A = \frac{\mu m \varrho}{2b^2} r\,dr \int_{b-r}^{b+r}\int_0^{2\pi} (u^2 + b^2 - r^2) F(u)\,du$$

$$= \frac{\mu\pi m\varrho}{b^2} r\,dr \int_{b-r}^{b+r} (u^2 + b^2 - r^2) F(u)\,du.$$

Das letzte Integral ist durch teilweise Integration zu bestimmen, womit sich ergiebt

$$A = \frac{\mu\pi m\varrho}{b^2} r\,dr \Big[(u^2 + b^2 - r^2)\int F(u)\,du - 2\int\Big\{u\int F(u)\,du\Big\}du\Big]_{b-r}^{b+r}$$

$$= \frac{\mu\pi m\varrho}{b^2} r\,dr \Big[(u^2 + b^2 - r^2) F'(u) - 2F''(u) + C\Big]_{r-b}^{b+r}$$

$$= 2\mu\pi m\varrho r\,dr \frac{d}{db}\left\{\frac{F''(b+r) - F''(b-r)}{b}\right\}. \tag{2}$$

Befindet sich der materielle Punkt im Abstande $b < r$ vom Mittelpunkte der Schale, also in ihrem Inneren, dann sind für u die Integrationsgrenzen $r - b$ und $r + b$, womit sich in diesem Falle ergiebt

$$A = 2\mu\pi m \varrho r\, dr \frac{d}{db}\left\{\frac{F''(r+b) - F''(r-b)}{b}\right\}. \tag{3}$$

a) Es sei $F(u) = \frac{1}{u^2}$. In diesem Falle ist $F'(u) = -\frac{1}{u} + C$, $F''(u) = -u + \frac{C}{2}u^2 + C'$, $F''(b+r) = -(b+r) + \frac{C}{2}(b+r)^2 + C'$, $F''(b-r) = -(b-r) + \frac{C}{2}(b-r)^2 + C'$, $F''(r-b) = -(r-b) + \frac{C}{2}(r-b)^2 + C'$. Damit erhalten wir, wenn der materielle Punkt ausserhalb der Kugelschale liegt, durch (2)

$$A = 2\mu\pi m \varrho r\, dr \frac{d}{db}\left\{-\frac{2r}{b} + 2Cr\right\} = \frac{4\mu m \varrho \pi r^2 dr}{b^2} = \mu m \frac{M}{b^2},$$

wenn dagegen die Masse m innerhalb der Schale sich befindet mit (3)

$$A = 2\mu\pi m \varrho r\, dr \frac{d}{db}\left\{-2 + Cbr\right\} = 0.$$

b) Ferner sei $F(u) = u$. In diesem Falle ist $F''(u) = \frac{u^4}{8} + \frac{C}{2}u^2 + C'$, so dass die Anziehung, welche die Kugelschale und ein ausserhalb ihr liegender Punkt aufeinander ausüben, mit (2)

$$A = 2\mu\pi m \varrho r\, dr \frac{d}{db}\left\{b^2 r + r^3 + 2Cr\right\} = 4\mu\pi m \varrho r^2 dr \,.\, b = \mu m M.b,$$

dieselbe, wenn der Punkt innerhalb der Schale sich befindet,

$$A = 2\mu m \varrho r\, dr \frac{d}{db}\left\{r^3 - b^2 r + 2Cr\right\}$$
$$= -4\mu\pi m \varrho r^2 dr \,.\, b = -\mu m M.b.$$

Die Anziehung der Kugelschale und eines materiellen Punktes ist mithin dieselbe, wie wenn die Masse der Schale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. (Laplace gab die hier angewendete Methode.)

18. Für welche Attraktionsgesetze ist es gestattet, die Masse einer homogenen Kugelschale bei der Berechnung ihrer Attraktion auf einen äusseren Punkt in ihrem Mittelpunkte koncentriert anzunehmen?

Ist $F(u)$ das Attraktionsgesetz, $F''(u) = \int\left\{u\int Fu\,du\right\}du$, wie oben, so haben wir für die Anziehung der Masse m des äusseren Punktes und der im Mittelpunkte der Schale koncentrierten Schalenmasse

$$A = 4\mu\pi m\varrho r^2 dr\,F(b), \tag{1}$$

wenn die Masse der Schale nicht koncentriert ist, besteht für die Attraktion A' die Gleichung

$$A' = 2\mu\pi m\varrho r\,dr\,\frac{d}{db}\left\{\frac{F''(b+r) - F''(b-r)}{b}\right\}. \tag{2}$$

Im vorliegenden Falle muss $A' = A$ sein, wodurch die Bedingung entsteht

$$2r\,F(b) = \frac{d}{db}\left\{\frac{F''(b+r) - F''(b-r)}{b}\right\}.$$

Die Entwickelung der Grössen $F''(b+r)$ und $F''(b-r)$ nach dem Satze von Taylor in eine Reihe giebt

$$2r\,F(b) = 2\frac{d}{db}\left\{\frac{dF''(b)}{db}\frac{r}{b} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3 F''(b)}{db^3}\frac{r^2}{b} + \ldots\right\}$$

$$= 2r\,F(b) + 2\frac{d}{db}\left\{\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3F''(b)}{db^3}\frac{r^2}{b} + \ldots\right\}.$$

Die Möglichkeit dieser Gleichung verlangt, dass

$$\frac{d}{db}\left\{\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3 F''(b)}{db^3}\cdot\frac{r^2}{b} + \ldots\right\} = 0$$

ist, was der Fall, wenn

$$\frac{d}{db}\left\{\frac{1}{b}\frac{d^3 F''(b)}{db^3}\right\} = 0, \qquad \frac{d}{db}\left\{\frac{1}{b}\frac{d^5 F''(b)}{db^5}\right\} = 0, \text{ u. s. f.} \tag{3}$$

Nun ist

$$\frac{dF''(b)}{db} = b\int F(b)\,db, \qquad \frac{d^2 F''(b)}{db^2} = \int F(b)\,db + b\,F(b),$$

$$\frac{d^3 F'''(b)}{db^3} = 2F(b) + b\frac{dF(b)}{db},$$

wodurch wir die Bedingung erhalten

$$\frac{2}{b}F(b) + \frac{dF(b)}{db} = 3C.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung giebt

$$b^2 F(b) = Cb^3 + C',$$

woraus folgt

$$F(b) = Cb + \frac{C'}{b^2}. \tag{4}$$

In dieser Gleichung sind die Konstanten C und C' von b unabhängige Grössen, sie genügt allen übrigen der Bedingungen (3) und lehrt: Die Kraft muss entweder der Distanz direkt, oder dem reziproken Werte des Quadrates der Distanz direkt proportional sein, oder sie muss teils der ersten Potenz der Entfernung, teils dem reziproken Werte des Quadrates der Entfernung direkt proportional sich ändern.

19. Nach welchem Gesetze müssen die materiellen Punkte einer homogenen Kugelschale anziehen, wenn in ihrem Hohlraume ein materieller Punkt bei jeder Lage im Gleichgewichte bleiben soll?

Die gegenseitige Anziehung einer solchen Schale und eines Punktes von der Masse m in ihr ist

$$A = 2\mu\pi m\varrho r\,dr\frac{d}{db}\left\{\frac{F''(r+b)-F''(r-b)}{b}\right\}. \tag{1}$$

Damit nun der materielle Punkt bei jeder Lage in Ruhe bleibt, muss $A = 0$ sein, wodurch wir die Bedingung erhalten

$$\frac{d}{db}\left\{\frac{F''(r+b)-F''(r-b)}{b}\right\} = 0. \tag{2}$$

Die Entwickelung der Klammergrösse dieser Gleichung in eine Reihe nach dem Satze von Taylor giebt

$$\frac{dF''(r)}{dr} + \frac{b^2}{1.2.3}\frac{d^3F''(r)}{dr^3} + \ldots = C,$$

wobei C eine von b unabhängige Konstante ist, folglich muss sein

$$\frac{dF''(r)}{dr} = C, \qquad \frac{d^3F''(r)}{dr^3} = 0, \ldots. \tag{3}$$

Die Bedingungen (3) werden alle erfüllt, wenn die erste es ist, d. h. wenn

$$r\int F(r)\,dr = C, \qquad \text{d. i.} \qquad F(r) = \frac{C}{r^2}$$

ist. Mithin muss das Attraktionsgesetz das Newton'sche sein.

20. Welches ist die gegenseitige Attraktion eines homogenen, abgeplatteten Sphäroides von der Elliptizität e und einem in seinem Pole befindlichen materiellen Punkte, wenn e sehr klein und das Anziehungsgesetz das Newton'sche ist?

Es sei $2a$ die grosse, $2b$ die kleine Axe der elliptischen Fläche, welche durch ihre Rotation um die kleine Axe den Körper erzeugt, der materielle Punkt Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten mit der Drehaxe als Axe der x. Die übrigen Bezeichnungen seien die früheren. Damit ist die Gleichung der erzeugenden Ellipse

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2).$$

Denken wir uns dem Ellipsoide eine dasselbe in den Polen berührende Kugel eingeschrieben, so ist die Masse eines Kreisringes zwischen der Kugelfläche, der Sphäroidfläche und zwei zu dem Äquator parallelen Ebenen in den Abständen x und $x + dx$ vom Coordinatenursprunge gleich $\pi\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\varrho y^2\,dx$, oder, mit $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$, annähernd $\frac{b^2}{a^2} = 1 - 2e$,

gleich $2\pi e \varrho \frac{b^2}{a^2}(2bx - x^2)\,dx$, oder $2\pi e \varrho (2bx - x^2)\,dx$. Nun kann angenommen werden, dass jedes Teilchen dieses Ringes von dem materiellen Punkte gleichweit, um die Strecke $\sqrt{2bx}$ entfernt ist, so dass die Attraktion des Punktes und des Ringes in der Richtung der Rotationsaxe, in welcher die Attraktion des Sphäroides stattfindet, näherungsweise

$$\frac{2\mu\pi e m \varrho (2bx - x^2)\,dx}{2bx} \cdot \frac{x}{\sqrt{2bx}} = \mu \frac{\pi m e \varrho}{b\sqrt{2b}}\left(2bx^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

ist. Demnach ist die Anziehung zwischen dem von der Fläche des Sphäroides und derjenigen der eingeschriebenen Kugel eingeschlossenen Körper und der Masse m

$$A' = \mu \frac{\pi m e \varrho}{b\sqrt{2b}} \int_0^{2b} \left(2bx^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{16}{15}\mu\pi m e \varrho b.$$

Für die gegenseitige Anziehung der eingeschriebenen Kugel und des Punktes haben wir $A'' = \frac{4}{3}\mu\pi m \varrho b$. Mithin ist die Attraktion des Sphäroides und des an seinem Pole gelegenen materiellen Punktes

$$A = A'' + A' = \frac{4}{3}\mu\pi m \varrho b\left(1 + \frac{4}{5}e\right).$$

Wenn $b > a$, d. h. wenn das Sphäroid länglich ist, dann ist e negativ, folglich die ganze Anziehung zwischen ihm und der Masse m in einem seiner Pole

$$A = \frac{4}{3}\mu\pi m \varrho b\left(1 - \frac{4}{5}e\right).$$

21. An dem Äquator eines abgeplatteten Sphäroides von geringer Elliptizität e und homogener Beschaffenheit befindet sich ein materieller Punkt. Welches ist annähernd die totale Anziehung zwischen dem Sphäroide und diesem Punkte, wenn das Attraktionsgesetz das Newton'sche ist?

Es sei der materielle Punkt Ursprung der Coordinaten, der durch ihn gehende Diameter des Äquatorkreises Axe der x, dann ist die Gleichung der das Sphäroid erzeugenden Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Denken wir uns dem Ellipsoide eine dasselbe in den Endpunkten der grossen Axe der Ellipse berührende Kugel umschrieben, so ist die Attraktion des Sphäroides gleich der Attraktion dieser Kugel, vermindert um die Attraktion des zwischen der Kugelfläche und der Fläche des Sphäroides liegenden Körpers. Legen wir in den Abständen x und $x + dx$ vom Ur-

sprunge durch Sphäroid und Kugel zwei zur Abscissenaxe senkrechte Ebenen, dann ist das zwischen diesen Ebenen liegende Volumen der Kugel $\pi\frac{a^2}{b^2}y^2\,dx$ und das entsprechende des Ellipsoides $\pi\frac{a}{b}y^2\,dx$, mithin die Differenz beider Volumina $\pi\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}\right)y^2\,dx=\pi\left(1-\frac{b}{a}\right)(2ax-x^2)dx$ $=\pi e(2ax-x^2)\,dx$. Der Abstand eines jeden Teilchens dieses Volumens von der Masse m kann gleich $\sqrt{2ax}$ genommen werden. Folglich ist die gegenseitige Anziehung der Masse dieses Volumens und der Masse m in der Richtung der Abscissenaxe, in welcher die resultierende Attraktion wirkt,

$$\mu\pi m e\varrho\frac{2ax-x^2}{2ax}\cdot\frac{x}{\sqrt{2ax}}dx=\frac{\mu\pi m e\varrho}{(2a)^{\frac{3}{2}}}(2ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})\,dx,$$

daher die Attraktion des Teiles der Kugel, welcher ausserhalb des Sphäroides liegt und der Masse m

$$A'=\frac{\mu\pi m e\varrho}{(2a)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2a}(2ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})\,dx=\frac{8}{15}\mu\pi m e\varrho a.$$

Die Anziehung der umschriebenen Kugel und des materiellen Punktes ist $A''=\frac{4}{3}\mu\pi m\varrho a$, mithin erhalten wir für diejenige des Sphäroides und der Masse m unter dem Äquator

$$A=A''-A'=\frac{4}{3}\mu\pi m\varrho\left(1-\frac{2}{5}e\right)a$$

In dem Falle, wo $b>a$ ist, ist das Sphäroid länglich und alsdann, weil $e<0$,

$$A=\frac{4}{3}\mu\pi m\varrho\left(1+\frac{2}{5}e\right)a.$$

22. Bestimmung der Attraktion eines abgeplatteten Sphäroides von gleicher Dichtigkeit und eines materiellen Punktes in einem seiner Pole.

Wir nehmen den angezogenen Punkt als Ursprung, die Rotationsaxe des Körpers als Axe der x, setzen $r=$ dem Abstande eines Volumenelementes vom Pole, $\vartheta=$ dem Winkel, welchen der Fahrstrahl r mit der Axe der x einschliesst, dann ist ein Flächenelement der den Körper durch Rotation um die Abscissenaxe erzeugenden elliptischen Fläche $=r\,dr\,d\vartheta$, das durch Rotation dieses Elementes um die Abscissenaxe erzeugte Volumenelement $=2\pi r^2\,dr\sin\vartheta\,d\vartheta$, daher die gegenseitige Attraktion eines solchen Volumenelementes und des Punktes von der Masse m gleich $2\mu\pi m\varrho\,dr$

$\times$ *sin* ϑ *cos* $\vartheta\, d\,\vartheta$ in paralleler Richtung zur Axe der x, in welcher die Totalattraktion thätig ist. Mithin erhalten wir für die Gesamtattraktion des Sphäroides und des materiellen Punktes in seinem Pole

$$A = 2\,\mu\,\pi\,m\,\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{r'} \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\,\vartheta\, d\,r.$$

Das Integral für r ist zu nehmen von $r = 0$ bis $r = r' = \frac{2\,b\,a^2 \cos\vartheta}{b^2 + a^2 e^2 \cos^2\vartheta}$, welcher Wert sich aus der Gleichung der erzeugenden Ellipse $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2\,b\,x - x^2)$ ergiebt, wenn wir $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ setzen. Dadurch erhalten wir

$$A = \frac{4\,\mu\,\pi\,m\,\varrho}{e^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b\,a^2 e^2 \cos^2\vartheta \sin\vartheta}{b^2 + a^2 e^2 \cos^2\vartheta}\, d\,\vartheta$$

$$= \frac{4\,\mu\,\pi\,m\,\varrho\,b}{e^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\vartheta - \frac{b^2 \sin\vartheta}{b^2 + a^2 e^2 \cos^2\vartheta}\right) d\,\vartheta. \qquad (1)$$

$$A = \frac{4\,\mu\,\pi\,m\,\varrho\,b}{e^2}\left[C - \cos\vartheta + \frac{b}{a\,e}\, arc\left(tg = \frac{a\,e\cos\vartheta}{b}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4\,\mu\,\pi\,m\,\varrho\,b}{e^2}\left\{1 - \frac{b}{a\,e}\, arc\left(tg = \frac{a\,e}{b}\right)\right\}$$

$$= 4\,\mu\,\pi\,m\,\varrho\,b\left\{\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3}\, arc\,(\sin = e)\right\}.$$

Ist das Sphäroid flach, also die grosse Axe der erzeugenden Ellipse Rotationsaxe, dann haben wir in (1), um die Attraktion zu erhalten, a für b und umgekehrt zu schreiben, also für $\frac{b}{e^2} = \frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$ zu setzen $\frac{b^2 a}{b^2 - a^2}$ oder $-\frac{b^2}{a\,e^2}$, für $a^2 e^2$ und $a^2 - b^2$ müssen wir schreiben $-a^2 e^2$, und $b^2 - a^2$, damit wird die totale Attraktion eines solchen Körpers und eines materiellen Punktes in dem einen Endpunkte seiner Rotationsaxe

$$A = \frac{4\,\mu\,\pi\,m\,\varrho\,b^2}{a\,e^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin\vartheta}{1 - e^2\cos^2\vartheta} - \sin\vartheta\right) d\,\vartheta$$

$$= \frac{4\,\mu\,\pi\,m\,\varrho\,b^2}{a\,e^2}\left[-\frac{1}{2\,e}\, l\, \frac{1 + e\cos\vartheta}{1 - e\cos\vartheta} + \cos\vartheta + C\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4\,\mu\,\pi\,m\,\varrho\,b^2}{a\,e^2}\left\{\frac{1}{2\,e}\, l\, \frac{1 + e}{1 - e} - 1\right\}.$$

23. Bestimmung der Attraktion eines abgeplatteten Sphäroides von gleichförmiger Dichtigkeit und eines materiellen Punktes an seinem Äquator.

Wir wählen den materiellen Punkt als Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, die Ebene des Äquators als Ebene der xy, den durch den Ursprung gehenden Diameter des Äquatorkreises als Axe der x; r sei der Abstand eines Massenelementes des Sphäroides vom Ursprunge, ϑ die Neigung von r gegen die Ebene der xy, φ die Neigung seiner Projektion auf diese Ebene gegen die Axe der x.

Damit ist ein Volumenelement des Sphäroides $\varrho r^2 dr \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, die gegenseitige Attraktion dieses Elementes und des Punktes von der Masse m in der Richtung der Abscissenaxe, in welcher die Totalanziehung wirkt, gleich $\mu m \varrho\, dr \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \cos\vartheta \cos\varphi$, folglich die Attraktion des Sphäroides und des materiellen Punktes

$$A = \mu m \varrho \int_0^r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta \cos\varphi\, d\varphi\, d\vartheta\, dr.$$

Die Grenzen der Summation für r sind aus der Gleichung der sphärischen Fläche $x^2 + y^2 + \frac{a^2}{b^2} z^2 = 2ax$ abzuleiten, indem wir daselbst setzen $x = r\cos\vartheta\cos\varphi$, $y = r\cos\vartheta\sin\varphi$, $z = r\sin\vartheta$, womit sich ergiebt $r = 0$ für die untere, $r = 2b^2\cos\vartheta\cos\varphi : a(1 - e^2\cos^2\vartheta)$ für die obere Grenze. Nun erhalten wir durch successive Ausführung der Integrationen

$$A = \frac{2\mu m \varrho b^2}{a e^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \left\{ \frac{\cos\vartheta}{1 - e^2 + e^2 \sin^2\vartheta} - \cos\vartheta \right\} d\varphi\, d\vartheta$$

$$= \frac{2\mu m \varrho b^2}{a e^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \left\{ \frac{a^2\cos\vartheta}{b^2 + a^2 e^2 \sin^2\vartheta} - \cos\vartheta \right\} d\varphi\, d\vartheta, \quad (1)$$

$$A = \frac{2\mu m \varrho b^2}{a e^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left[\frac{a}{b e} \operatorname{arc}\left(tg = \frac{a e \sin\vartheta}{b}\right) - \sin\vartheta + C \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{2\mu m \varrho b^2}{a e^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos\varphi) \left\{ \frac{a}{b e} \operatorname{arc}(\sin = e) - 1 \right\} d\varphi$$

$$= \frac{2\mu m \varrho b^2}{a e^2} \left[\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) \left\{ \frac{a}{b e} \operatorname{arc}(\sin = e) - 1 \right\} + C \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\mu m \varrho b \left\{ \frac{1}{e^3} \operatorname{arc}(\sin = e) - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^2} \right\}.$$

Wird das Sphäroid durch Rotation der Fläche einer Halbellipse um ihre grosse Axe erzeugt, dann haben wir, um die totale Attraktion dieses Körpers und eines an seinem Äquator gelegenen materiellen Punktes zu er-

langen, in (1) $-\frac{b}{e^2}$ für $\frac{b^2}{ae}$ und $-a^2e^2$ für a^2e^2 zu schreiben. Durch diese Substitutionen ergiebt sich

$$A = -\frac{2\mu m \varrho b}{e^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \left\{\frac{b^2 \cos\vartheta}{a^2 - a^2e^2 \sin^2\vartheta} - \cos\vartheta\right\} d\varphi\, d\vartheta$$

$$= -\frac{2\mu m \varrho b}{e^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \,_{-\frac{\pi}{2}}\left[\frac{b^2}{2a^2e}\, l\, \frac{1+e\sin\vartheta}{1-e\sin\vartheta} - \sin\vartheta + C\right]^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= -\frac{\mu m \varrho b}{e^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)\left\{\frac{b^2}{a^2e} - 2\right\} d\varphi$$

$$= \frac{\mu\pi m \varrho b}{e^2}\left\{2 - \frac{b^2}{a^2e}\, l\, \frac{1+e}{1-e}\right\} = \mu\pi m \varrho b\left\{\frac{2}{e^2} - \frac{1-e^2}{e^3}\, l\, \frac{1+e}{1-e}\right\}.$$

20—23. Earnshaw, Dynamics.

Anmerkung. Bezüglich der Attraktion eines dreiaxigen Ellipsoides muss der Leser auf die Lehrbücher der theoretischen Mechanik verwiesen werden.

24. Wie viel kann eine Person von der kugelförmig gedachten Erdoberfläche sehen, wenn sie so hoch gehoben wird, dass sie den $\left(\frac{1}{n}\right)^{\text{ten}}$ Teil ihres Gewichtes verliert?

Bezeichnet r den Erdhalbmesser, F die sichtbare Fläche, dann ist

$$F = 2\pi r^2\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

25. Ein homogener Körper hat zur Begrenzung eine Fläche, welche durch die Rotation eines Auges der Curve $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ um seine Axe erzeugt wird. Wie gross ist die resultierende Attraktion des Körpers auf einem Punkt am Knoten der Curve, wenn das Attraktionsgesetz dasjenige des umgekehrten Quadrates, μ die absolute Kraft ist?

$$A = \frac{1}{3}\pi\mu a.$$

26. CAC' ist eine dünne Platte, dieselbe wird begrenzt von dem Bogen einer Lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$, deren Knoten O, deren Scheitel A, und von einem Kreisbogen CC' mit dem Mittelpunkte in O und dem Radius $a \sin\varepsilon$. Welches ist das Variationsgesetz der resultierenden Attraktion der Platte auf einen materiellen Punkt in O, wenn ε veränderlich und die Anziehung die natürliche ist?

Die resultierende Attraktion ändert sich wie $l\left(\cotg\frac{\varepsilon}{2}\right) - \cos\varepsilon$.

27. Die Seiten eines gleichschenkeligen Dreieckes sind aus schlanken Prismen von gleichem Querschnitte gebildet, welche mit Kräften anziehen, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung sind. Der Winkel α in der Spitze des Dreieckes soll so bestimmt werden, dass ein materieller Punkt in Ruhe bleiben kann, wenn er sich an derjenigen Stelle befindet, welche die Höhe des Dreieckes nach dem Verhältnisse $a:b$ teilt, wobei a ihr Abstand vom Scheitel, b derjenige von der Basis des Dreieckes ist?

$$\alpha = 2\, arc\left(\sin = \frac{b}{a}\right).$$

28. Die resultierende Attraktion eines Stabes von konstantem Querschnitte auf einen materiellen Punkt geht durch einen gegebenen, gleichweit von den Stabenden entfernten Punkt. Das Attraktionsgesetz ist dasjenige der Natur. Welches ist die Lage des Punktes?

Der verlangte Ort ist ein Kreis, von welchem der Stab eine Sehne, der Durchmesser gleich $\frac{a^2}{b}$ ist, wenn a den Abstand des gegebenen Punktes von dem einen Ende und b denjenigen von der Mitte des Stabes bedeutet.

29. Zwei zu einander senkrechte, materielle, gerade Linien AB, AC ziehen einen materiellen Punkt P an, welcher sich an der Stelle befindet, wo das Perpendikel AP die Gerade BC schneidet. Das Attraktionsgesetz ist dasjenige der Natur. Man soll die Richtung und Grösse der Kraft bestimmen, welche nötig ist, den materiellen Punkt im Gleichgewichte zu erhalten.

Es sei $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $\mu =$ der absoluten Kraft, $Q =$ der verlangten Kraft, $\alpha =$ dem verlangten Winkel. Damit ist

$$Q = \frac{\mu c^3}{a^2 b^2} \sqrt{2}, \qquad \alpha = 45^0.$$

30. Ein materieller Punkt ist mittelst eines feinen Fadens an den Mittelpunkt des Randes einer dünnen halbkugelförmigen Schale von anziehender Materie gefesselt. Die Länge c des Fadens ist kleiner als der Halbmesser r der Schale, welche eine Dicke τ besitzt. Die Attraktionskraft ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Wie gross ist die Spannung T des Fadens?

$$T = \frac{2\mu\pi\tau r^2}{c^2}\left\{1 - \frac{r}{\sqrt{c^2 + r^2}}\right\}.$$

31. Ein materieller Punkt befindet sich an einer gewissen Stelle innerhalb eines Dreieckes ABC, welches von drei homogenen, gleich dicken Stäben gebildet wird, die gemäss dem Naturgesetze anziehen, im Gleichgewichte. Die Dichtigkeiten der Stäbe BC, CA, AB sind $\varrho', \varrho'', \varrho'''$ resp. Welches ist die Gleichgewichtsbedingung?

Bezeichnen p, q, r die Entfernungen des materiellen Punktes von den Stäben BC, CA, AB resp., dann ist

$$\frac{p}{\varrho'} = \frac{q}{\varrho''} = \frac{r}{\varrho'''}.$$

Mit $\varrho' = \varrho'' = \varrho'''$ wird $p = q = r$, in welchem Falle der materielle Punkt in dem Mittelpunkte des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises ruht. Dieses bewies zuerst Ferdinand Joachimsthal in The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. III, p. 93.

32. Zwei gleiche, gerade, stabförmige Körper, deren einzelne materielle Punkte sich nach dem Naturgesetze anziehen, liegen parallel zu einander und senkrecht zu den Verbindungslinien ihrer Endpunkte. Sie werden auseinander gehalten durch an ihren Mittelpunkten befestigte Fäden. Die wechselseitige Entfernung der Stäbe ist $= a$, ihre Länge $= b$. Wie gross ist die Spannung T der Fäden?

$$T = \frac{2\mu}{a}\left\{\sqrt{a^2 + b^2} - a\right\}.$$

33. Jeder Punkt zweier Stäbe von unbegrenzter Länge, welche in die Richtungen zweier konjugierter Durchmesser einer Ellipse fallen, zieht nach dem Naturgesetze an. Wo ist die Gleichgewichtslage eines die Curve entlang beweglichen Punktes?

Es seien a, b die Halbaxen der Ellipse, ω sei der spitze Winkel zwischen den zwei konjugierten Durchmessern, dann ruht der materielle Punkt in den Schnittpunkten der Ellipse mit dem koncentrischen Kreise vom Radius $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - a\,b\,cotg\,\omega)}$.

34. Jeder Punkt zweier senkrecht aufeinander stehender Stäbe von unbegrenzter Länge zieht mit einer Kraft an, die umgekehrt proportional der n^{ten} Potenz der Entfernung ist. Man soll die Gestalt der Curve bestimmen, auf welcher ein der Attraktion dieser Stäbe unterworfener materieller Punkt bei allen Lagen im Gleichgewicht ist.

Werden die Richtungen der Stäbe zu Coordinatenaxen genommen, dann ist die Gleichung der verlangten Curve

$$x^{2-n} + y^{2-n} = c^{2-n},$$

wofern nicht $n = 2$, in welchem Falle $x\,y = c^2$ ist.

35. Bestimme die resultierende Attraktion einer homogenen Kugel auf einen äusseren Punkt, wenn das Anziehungsgesetz dasjenige des umgekehrten Kubus der Entfernung ist.

Bezeichnet a den Kugelradius, c den Abstand des angezogenen Punktes vom Kugelmittelpunkte, μ die absolute Kraft, A die Totalattraktion, dann ist

$$A = \mu\frac{\pi}{2}\left\{\frac{c^2 + a^2}{c^2}\,l\,\frac{c + a}{c - a} - \frac{2\,a}{c}\right\}.$$

36. Eine Menge homogener Materie hat die Form eines durch eine zu seiner Axe senkrechten Ebene begrenzten Rotationsparaboloides. Man soll ihre Attraktion auf einen Punkt von der Masseneinheit in ihrem Scheitel finden.

Bezeichnet ϱ die Dichtigkeit, c die Länge der Axe, a diejenige des Parameters des Körpers, dann ist

$$A = \pi\,\varrho\,a\,l\,(\omega\,e^{\omega - 1}),$$

wobei $\omega = cotg\,\varphi$ und φ durch die Gleichung $\frac{a}{2c + a} = sin\,2\,\varphi$ definiert ist.

37. Ein zwischen zwei parallelen Ebenen eingeschlossener Teil einer sphärischen Fläche zieht einen in der durch den Kugelmittelpunkt gehenden Normalen zu den zwei Ebenen gelegenen Punkt an. Bestimme die resultierende Attraktion auf den Punkt, wenn das Anziehungsgesetz dasjenige der Natur ist.

Es seien r', r'' die Abstände des angezogenen Punktes von den zwei ebenen Begrenzungsflächen der Kugelzone, c sei seine Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel, a der Kugelradius, dann ist

$$A = \frac{\mu\,\pi\,a}{c^2}(r' - r'')\left\{1 - \frac{c^2 - a^2}{r'\,r''}\right\}.$$

38. Ein Teil einer dünnen, sphärischen Fläche, deren Projektionen auf drei zu einander senkrechte, durch den Mittelpunkt gehende Ebenen gegeben sind, zieht einen in dem Mittelpunkte der Fläche gelegenen Punkt an. Das Attraktionsgesetz ist dasjenige irgend einer Funktion der Entfernung. Welches ist die Richtung der resultierenden Attraktion auf den Punkt.

Sind A, B, C die gegebenen Projektionen und die drei Ebenen Coordinatenebenen, dann ist die verlangte Richtung gegeben durch

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}.$$

Ferrers and Jackson, Solutions of the Cambridge Problems, 1848-51, p. 373.

39. Ein spröder, an zwei glatten Charnieren bei A und B befestigter Stab AB wird von einem Kraftcentrum C gemäss dem natürlichen Gesetze angezogen. Die absolute Kraft nimmt unbegrenzt zu. Wo wird der Stab möglicher Weise brechen?

Bezeichnet E den Bruchpunkt, ist $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, dann ist

$$\cos \sphericalangle AEC = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Mackenzie and Walton, Solutions of the Cambridge Problems for 1854. 24—39. Walton, p. 184—188.

40. Acht Centralkräfte, deren Centren die Ecken eines Würfels sind, ziehen einen, sehr nahe dem Mittelpunkte des Würfels gelegenen, materiellen Punkt nach demselben Gesetze und mit derselben absoluten Intensität an. Zeige, dass die resultierende Wirkung durch den Mittelpunkt des Würfels geht, wenn nicht das Kraftgesetz dasjenige des umgekehrten Quadrates der Distanz ist.

Walton, p. 199.

41. An jedem Punkte des Raumes wirke eine Kraft f, welche irgend eine Funktion der Entfernung des Punktes von einem gegebenen Punkte A ist. Die Tangente in einem Punkte P an eine die Punkte P_1 und P_2 verbindende, willkürliche Curve ist zu der Richtung der Kraft in P unter dem Winkel ϑ geneigt. Beweise, dass in diesem Falle $\int f \cos \vartheta \, ds$ von P_1 bis P_2 nur von den Distanzen AP_1 und AP_2 abhängig ist.

Walton, p. 200.

42. Wenn jedes Element einer homogenen Linie von konstantem Querschnitte und der Gestalt einer ebenen, geschlossenen Curve tangential in derselben rotatorischen Richtung von einer Kraft angegriffen wird, welche umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des Elementes von einem gegebenen Punkte in der von der Curve eingeschlossenen Fläche ist, dann ist, wenn der gegebene Punkt als Momentenursprung gewählt wird, das resultierende Paar von der Länge und der Gestalt der Linie unabhängig.

Walton, p. 200.

43. Auf einer dünnen, homogenen Platte in der Form einer Cardioide $r = a(1 - \cos \vartheta)$ ist eine unangebbar grosse Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Cardioiden um denselben Pol gezogen. An jedem Elemente der Platte wirkt eine Kraft accelerierend in derselben rotatorischen Richtung um den Pol und tangential zu derjenigen Cardioide, auf welcher das Element liegt. Diese Kraft ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des Elementes vom Pole. Welches ist die Grösse des resultierenden Momentes um den Pol?

Das resultierende Moment ist, wenn μ die absolute beschleunigende Kraft bezeichnet, gleich $\frac{16}{3} \mu a$.

44. Das tiefere Ende A eines dünnen, homogenen Stabes ist an ein glattes Charnier gefesselt, sein höheres Ende B stützt sich gegen eine glatte, vertikale

Ebene. Beweise, dass die Neigung zum Brechen in einem beliebigen Stabpunkte P variiert wie $AP.BP$.

45. Ein homogener, hohler Cylinder von gegebenem Material, welcher vollkommen spröde und unzusammendrückbar ist, ist teilweise in eine feste, horizontale Röhre geschoben, welche gerade weit genug ist, ihn einzulassen. Beweise, dass die grösste Länge, welche der freie Teil des Cylinders ohne abzubrechen haben kann, wie die Quadratwurzel aus dem Radius seiner äusseren Fläche variiert.

43—45. Walton, p. 201.

46. Zeige, dass die Attraktion einer unendlichdünnen Bikonvexlinse auf einen Punkt in dem Mittelpunkte einer ihrer Flächen gleich derjenigen der unendlichen Platte ist, welche zwischen der Tangentialebene an den Punkt und der parallelen Tangentialebene an die andere Fläche der Linse eingeschlossen ist.

Cayley, Messenger of Mathematics, Vol. V, p. 194. Walton, p. 205.

47. Ein gleichförmiger Stab, an dem in einem gegebenen Punkte ein gegebenes Gewicht hängt, ist in seinen Enden so unterstützt, dass er horizontal liegt. Zu finden die Brechneigung des Stabes an irgend einer Stelle unter Vernachlässigung des Stabgewichtes.

Es sei l die Länge des Stabes, G das gegebene Gewicht, a der Abstand dieses Gewichtes von dem einen Stabende, dann wird die Neigung zu brechen in einem Abstande x von diesem Ende durch den Ausdruck repräsentiert

$$\frac{G}{l}\,\frac{x(l-a)\,0^x + a(l-x)\,0^a}{0^a + 0^x}.$$

Archibald Smith, Cambridge Mathematical Journal, Vol. I, p. 276. Walton, p. 202.

Fünftes Kapitel.

Gleichgewicht veränderlicher, materieller Systeme.

Die Gleichgewichtsform, welche ein mit seinen beiden Enden aufgehängter, nur der Schwerkraft unterworfener, biegsamer Faden annimmt, erregte schon die Aufmerksamkeit von Galileo (Mechanica Dialogo 2, p. 131), welcher aus Mangel an genügender Prüfung schloss, dass sie eine Parabel sei. Dieser Irrtum mag aus der Thatsache hervorgegangen sein, dass dieselbe in unmittelbarer Nachbarschaft ihres tiefsten Punktes sich sehr nahe der parabolischen Form anschliesst. Die Unrichtigkeit von Galileo's Schluss wurde durch Joachim Jugius experimentell dargethan (Geometria Empyrica). Dieser Gegenstand wurde endlich mit Erfolg von Jakob Bernoulli untersucht (Acta Eruditorum, Lips, 1690, Mai, p. 270; Opera, Tom. I, p. 424). Derselbe schlug den Mathematikern seiner Zeit das Problem der Kettenlinie vor, welchen Namen er der verlangten Curve gab, durch dessen Lösung sie eine Probe ihrer Geschicklichkeit geben sollten. Die vier Mathematiker, welchen es gelang, richtige Lösungen dieses Problemes

zu erhalten, waren Jakob Bernoulli, durch welchen es vorgeschlagen wurde, sein Bruder Johann, Leibnitz und Huyghens; ihre vier Lösungen erschienen ohne Analyse in Acta Eruditorum, 1691, Jun., p. p. 273—282. Eine Erläuterung der von diesen vier ausgezeichneten Mathematikern erhaltenen Resultate gab zuerst David Gregory in den Philosophical Transactions für das Jahr 1697.

Die Gleichgewichtsform der Kettenlinie oder Seilcurve wurde unter der Voraussetzung konstanter Dicke und vollkommener Biegsamkeit des Fadens gründlich untersucht, sodann richtete Jakob Bernoulli (Acta Erudit. Lips. 1691, Jan., p. 289; Opera, Tom. I, p. 449) seine Aufmerksamkeit auf zusammengesetztere Probleme derselben Art, er erforschte die Gleichgewichtsform bei nach einem gegebenen Gesetze von Punkt zu Punkt veränderlicher Dicke, bestimmte auch umgekehrt das Variationsgesetz der Dicke so, dass der Faden in einer gegebenen Curve hängen kann. Ferner behandelte er das Problem der Kettenlinie für dehnbare Fäden unter der Voraussetzung, dass die Ausdehnung eines jeden Elementes direkt proportional seiner Spannung sei, ein Gesetz, welches Hooke (De Potentia Restitutiva, or Spring) experimentell begründete. Die Analysis dieser Probleme, von welchen nur die Lösungsresultate durch Jakob Bernoulli veröffentlicht wurden, trug Johann Bernoulli nach (Lectiones Mathematicae in usum Hospitalii, Opera, Tom. IV, p. 387). Die Betrachtung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen biegsamer Fäden wagte zuerst Hermann (Phoronomia, Lib. I, cap. 3, und Append. § V), seine Untersuchungen waren indessen nicht frei von Irrtümern. Eine bessere analytische Behandlung lieferte Johann Bernoulli (Opera, Tom. IV, p. 234), welcher insbesondere verschiedene Fälle des Gleichgewichts von Fäden prüfte, die Centralkräften unterworfen waren.

Von den zahlreichen Mathematikern, welche nachher die Theorie des Gleichgewichtes biegsamer Seile erörterten, mögen erwähnt werden: Euler (Comment. Petrop. Tom. III; Nova Comment. Petrop. Tom. XV et XX), Clairaut (Miscellanea Berolinensia, Tom. VII, p. 270, 1743), Krafft (Nov. Comment. Petrop. Tom. V, p. 143, 1754 et 1755), Legendre (Mém. Acad. Par. 1786, p. 20), Fuss (Nova Acta Petrop. Tom. XII, p. 145, 1794), Venturoli (Elements of Mechanics, by Cresswell, Part I, p. 62), Poisson (Traité de Mécanique, Tom. I, p. 564, seconde édition).

Erste Abteilung.

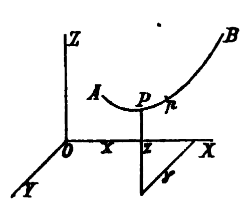
Gleichgewicht veränderlicher, unausdehnbarer Systeme.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen für einen freien, unausdehnbaren, vollkommen biegsamen Faden.

Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für einen freien, vollkommen biegsamen und vollkommen unelastischen Faden, dessen Dichtigkeit und Dicke von Punkt zu Punkt nach irgend einem gegebenen Gesetze sich ändert, wenn irgend welche Kräfte auf den Faden wirken.

Es sei (Fig. 12, S. 32) APB ein beliebiger Teil des Fadens in der Ruhelage, Pp ein Längenelement desselben. Die Curve des Fadens



Figur 12.

werde auf ein beliebig im Raume gelegenes, rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen, dessen Axen OX, OY, OZ sein mögen, so dass die Coordinaten des Punktes P x, y, z, diejenigen des Punktes p, welcher unendlichnahe bei P gedacht ist, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind.

Ist T die Spannung des Fadens oder Seiles in dem Punkte P, welche in der Richtung der Tangente an die Curve daselbst wirkt und sich kontinuierlich mit diesem Punkte ändert, also eine stetige Funktion von x, y, z ist, dann sind die drei Componenten derselben in den Richtungen der Coordinatenaxen, wenn ihre Richtung mit diesen Axen die Winkel α, β, γ einschliesst, ds die Länge des Bogenelementes Pp ist,

$$T\cos\alpha,\ T\cos\beta,\ T\cos\gamma, \qquad \text{oder} \qquad T\frac{dx}{ds},\ T\frac{dy}{ds},\ T\frac{dz}{ds}.$$

An dem Endpunkte p des Längenelementes Pp des Fadens ist die Spannung $T + dT$ thätig, ihre Componenten in denselben Richtungen sind

$$T\frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right),\quad T\frac{dy}{ds} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right),\quad T\frac{dz}{ds} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right).$$

Wählen wir die Richtungen der drei letzten Componenten als positiv, dann sind offenbar die drei ersten als negativ in Rechnung zu nehmen, und umgekehrt.

Stellen ferner X, Y, Z die Componenten in paralleler Richtung zu den Axen von derjenigen Kraft dar, welche auf die Längeneinheit eines Fadens vom Querschnitte Eins im Punkte P wirken würde, dann wirkt an dem Fadenelemente ds eine Kraft mit den Componenten Xds, Yds, Zds. Ist ϱ die Dichtigkeit des Fadens bei P, $\varkappa$ seine zu seiner Länge senkrechte Querschnittsfläche, dann ist die Masse des Fadenelementes ds gleich $\varkappa\varrho\, ds$, welche für einen konstanten Wert von ds sich wie $\varkappa\varrho$ ändert, und es kann das Produkt $\varkappa\varrho = m$ die zu dem Punkte P gehörige Masse des Fadens genannt werden. Daher sind die Componenten der bewegenden Kraft an dem Elemente Pp in zu den Axen parallelen Richtungen $mXds$, $mYds$, $mZds$. Für das Gleichgewicht von Pp müssen somit die drei Bedingungen erfüllt sein

$$T_x + dT_x + mXds - T_x = 0, \qquad T_y + dT_y + mYds - T_y = 0,$$
$$T_z + dT_z + mZds - T_z = 0,$$

oder

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + mX = 0,\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + mY = 0,\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + mZ = 0. \quad (1)$$

Durch Elimination von T aus diesen Gleichungen gelangen wir zu den drei folgenden

$$\left.\begin{array}{c} dy\int m Z ds = dz\int m Y ds, \quad dz\int m X ds = dx\int m Z ds, \\ dx\int m Y ds = dy\int m X ds, \end{array}\right\} \quad (2)$$

von denen irgend zwei die Differentialgleichungen der verlangten Gleichgewichtscurve sind.

Ferner erhalten wir durch die Gleichungen (1)

$$T\frac{dx}{ds} = -\int m X ds, \quad T\frac{dy}{ds} = -\int m Y ds, \quad T\frac{dz}{ds} = -\int m Z ds. \quad (3)$$

Die Gleichungen (1) geben die Bedingungen für das translatorische Gleichgewicht eines Elementes, die (2) diejenigen für jeden endlichen Teil des Fadens.

Multiplizieren wir die dritte der Gleichungen (1) mit y, die zweite mit z und subtrahieren die resultierenden Gleichungen von einander, so ergiebt sich

$$y\, d\left(T\frac{dz}{ds}\right) - z\, d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + (myZ - mzY)\, ds = 0,$$

oder

$$\left(yT\frac{dz}{ds} - zT\frac{dy}{ds}\right)_{s=0}^{s=s} + \int_0^s (myZ - mzY)\, ds = 0,$$

und in ähnlicher Weise entstehen die konformen Relationen

$$\left(xT\frac{dz}{ds} - zT\frac{dx}{ds}\right)_{s=0}^{s=s} + \int_0^s (mxZ - mzX)\, ds = 0,$$

$$\left(xT\frac{dy}{ds} - yT\frac{dx}{ds}\right)_{s=0}^{s=s} + \int_0^s (mxY - myX)\, ds = 0.$$

Diese drei letzten Gleichungen zeigen, dass die Kräfte längs des Bogens s auch die Gleichgewichtsbedingungen der Drehung eines unveränderlichen Systemes erfüllen müssen.

Indem wir die Gleichungen (3) quadrieren und dabei beachten, dass

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \quad (4)$$

ist, erhalten wir für die Spannung T die Relation

$$T^2 = \left(\int m X ds\right)^2 + \left(\int m Y ds\right)^2 + \left(\int m Z ds\right)^2. \quad (5)$$

Aber wir können auch einen anderen Ausdruck für T ableiten. Die Differentiation der (4) nach s giebt

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0. \quad (6)$$

Wenn wir nun die drei Gleichungen (1) der Reihe nach mit dx, dy, dz multiplizieren, die resultierenden Gleichungen addieren, dabei (4) und (6) beachten, so gelangen wir zu

$$T = C - \int m(X dx + Y dy + Z dz), \tag{7}$$

wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet.

Existiert für die an dem Elemente ds wirkende Kraft eine Kräftefunktion U, so dass $mX = \frac{dU}{dx}$, $mY = \frac{dU}{dy}$, $mZ = \frac{dU}{dz}$, dann ergiebt sich, wenn T, T_0 die Spannungen an irgend zwei Stellen (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) bedeuten, woselbst die Kräftefunktion die Werte U, U_0 besitzt,

$$T - T_0 = -(U - U_0).$$

In dem besonderen Falle, wo die Kraft P, deren Componenten mX, mY, mZ sind, normal zu der Seilcurve ist, haben wir mit (4), da dann ihre Richtungscosinus $\frac{P}{mX}$, $\frac{P}{mY}$, $\frac{P}{mZ}$ sind,

$$\frac{mX}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{mY}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{mZ}{P}\frac{dz}{ds} = 0,$$

woraus folgt

$$mX\frac{dx}{ds} + mY\frac{dy}{ds} + mZ\frac{dz}{ds} = 0,$$

mit welchem Werte die (7)

$$T = C$$

giebt, d. h. die Spannung ist unter diesen Umständen durchweg konstant.

Wir können aber für die Spannung T noch einen dritten Ausdruck ableiten. Die Gleichungen (1) lassen sich auch in der Form schreiben

$$\left.\begin{aligned} T\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dx}{ds}dT + mX ds = 0, \quad T\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dy}{ds}dT + mY ds = 0, \\ T\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dz}{ds}dT + mZ ds = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ multipliziert, dann die resultierenden Relationen addiert, so gelangen wir zu

$$T\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\} + dT\left\{\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right\}$$
$$+ m\left\{X\frac{d^2x}{ds^2} + Y\frac{d^2y}{ds^2} + Z\frac{d^2z}{ds^2}\right\}ds = 0.$$

Teilen wir mit ds, beachten, dass der Faktor von dT gleich Null und $\frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} = r =$ dem Krümmungshalbmesser der Curve in dem fraglichen Punkte ist, so wird

$$T\frac{ds}{r^2} + mX\frac{d^2x}{ds^2} + mY\frac{d^2y}{ds^2} + mZ\frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

womit sich ergiebt

$$T = -m\left\{X\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + Y\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} + Z\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right\}r^2. \tag{9}$$

Aus den Gleichungen (8) folgt noch, indem wir die Glieder $T\frac{d^2x}{ds^2}$, $T\frac{d^2y}{ds^2}$, $T\frac{d^2z}{ds^2}$ auf die andere Seite schaffen, dann quadrieren und addieren

$$m^2(X^2+Y^2+Z^2)\,ds^2 = T^2\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\} + dT^2,$$

oder weil

$$m^2(X^2+Y^2+Z^2)=P^2,\ \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \left(\frac{ds}{r}\right)^2 \text{ ist,}$$

$$P^2 = \frac{T^2}{r^2} + \left(\frac{dT}{ds}\right)^2. \tag{10}$$

Ist P senkrecht zur Seilcurve, dann ist $dT = 0$, also

$$P = \frac{T}{r}, \qquad T = Pr. \tag{11}$$

Projizieren wir noch P und seine Componenten auf die Richtung der Tangente an die Curve in dem fraglichen Punkte, bezeichnen mit ϑ den Winkel zwischen der Richtung von P und der Tangente, so ist

$$mX\frac{dx}{ds} + mY\frac{dy}{ds} + mZ\frac{dz}{ds} = P\cos\vartheta, \tag{12}$$

folglich mit (7)

$$T = C - \int P\cos\vartheta\, ds, \qquad dT = -P\cos\vartheta\, ds,$$

so dass mit (11)

$$P\sin\vartheta = \frac{T}{r}. \tag{13}$$

Wenn das ganze Seil in einer Ebene liegt, die Ebene der xy mit dieser Ebene zusammenfällt, dann sind alle $z = 0$ und $Z = 0$, die Differentialgleichungen der Curve reduzieren sich auf

$$dx\int mY\,ds = dy\int mX\,ds. \tag{14}$$

Die Formeln für die Spannung T sind

$$\left.\begin{aligned} T^2 &= \left(\int mX\,ds\right)^2 + \left(\int mY\,ds\right)^2, \quad T = C - \int m(X\,dx + Y\,dy) \\ T &= -m\left\{X\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + Y\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right\}r^2, \quad T = C - \int P\cos\vartheta\, ds. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die zwei ersten Gleichungen für die Spannung T und auch die Differentialgleichung (14) der Curve stimmen mit den durch Fuss gegebenen überein. (Mémoires de St. Pétersbourg, 1794, p. 150, 151.)

Von besonderem Interesse sind diejenigen Fälle, in welchen auf den Faden Parallelkräfte oder Centralkräfte wirken.

Zweiter Abschnitt.

Gleichgewicht freier, unausdehnbarer Fäden unter der Wirkung paralleler Kräfte.

I) Wirkt an einem freien Faden ein System paralleler Kräfte, deren Richtung parallel zur Ordinatenaxe ist, dann sind die drei Componenten einer dieser Kräfte parallel zu den Coordinatenaxen $X = 0$, $Y = Y$, $Z = 0$, so dass die drei Gleichgewichtsbedingungen für das translatorische Gleichgewicht

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + mY = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Die einmalige Integration dieser drei Gleichungen giebt

$$T\frac{dx}{ds} + A = 0, \quad T\frac{dy}{ds} + B + \int mY\,ds = 0, \quad T\frac{dz}{ds} + C = 0.$$

Um hiermit zu der Gleichung der Fadencurve zu gelangen, haben wir die Spannung T zu eliminieren, wodurch wir erhalten

$$A\frac{dy}{dx} = B + \int mY\,ds = C\frac{dy}{dz},$$

oder

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \int mY\,ds} = \frac{dz}{C}.$$

Damit ist $Az = Cx + D$, folglich die Seilcurve eine ebene Linie, deren Ebene mit der Richtung der Kräfte parallel läuft. Nehmen wir nun der Einfachheit halber die Ebene der Curve zur Ebene der xy, dann wird $z = 0$, also auch $dz = 0$, mithin die Curve durch die Gleichungen bestimmt

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \int mY\,ds}, \quad \text{oder} \quad A\frac{dx}{dy} = B + \int mY\,ds, \tag{1}$$

und es stellen die Konstanten A, B die Spannungscomponenten in dem Anfangspunkt des Bogens s der Curve vor.

Die Gleichung $\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$ gab einmal integriert

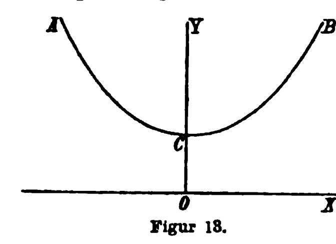
$$T\frac{dx}{ds} = -A,$$

es ist sonach die Spannungscomponente in der Richtung der Abscissenaxe konstant, die Spannung selbst ist

$$T = -A\frac{ds}{dx} = -A\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx} = -A\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (2)$$

Weil $\frac{dx}{ds}$ der Sinus des Winkels ist, welchen die Curventangente eines beliebigen Curvenpunktes mit der Ordinatenaxe einschliesst, so ist offenbar die Spannung in diesem Punkte diesem Sinus umgekehrt proportional. Die Tangenten, welche in zwei beliebigen Punkten an die Curve gezogen werden können, bilden mit der Kraftrichtung ein Dreieck, dessen berührende Seiten sich wie die Spannungen in den fraglichen Curvenpunkten verhalten.

1. Ein vollkommen biegsamer und unelastischer Faden von konstanter Dicke und Dichtigkeit ist an zwei in einer horizontalen Linie liegenden Punkten $A, B,$ deren Entfernung $AB = 2a$ ist, aufgehangen und der Einwirkung der Schwerkraft unterworfen, dann nimmt der Faden im Gleichgewichtszustande die Gestalt einer Curve an, welche die gemeine Kettenlinie genannt wird. Welches ist die Gleichung dieser Curve und die Spannung des Fadens an einer beliebigen Stelle?



Figur 13.

a) Wenn der Faden ACB (Fig 13) im Gleichgewichte hängt, dann ist seine Form offenbar so beschaffen, dass die durch seinen tiefsten Punkt C gezogene Vertikale OCY Symmetrieaxe der Curve ACB ist. Diese Axe sei Ordinatenaxe und die durch einen beliebigen Punkt O in ihr gehende, in der Ebene der Curve gelegene horizontale Gerade OX Abscissenaxe, dann sind die allgemeinen Gleichungen, von denen wir auszugehen haben

$$T\frac{dx}{ds} + A = 0, \qquad A\frac{dy}{dx} = B + \int_{s_0}^{s} mY\,ds.$$

Bezeichnet ϱ die konstante Dichtigkeit, $\varkappa$ den konstanten Querschnitt des Fadens, dann ist $\varrho\varkappa ds$ die Masse des Bogenelementes, $\varrho\varkappa = m =$ derjenigen der Längeneinheit des Fadens, welche hier eine konstanste Grösse ist. Die beschleunigende Kraft der Masseneinheit ist hier $Y = -g$, die Konstante B, welche die Vertikalcomponente der Spannung im tiefsten Curvenpunkte C ist, gleich Null, die Horizontalspannung in diesem Punkte sei gleich τ, so dass $-A = \tau$. Mit diesen Werten erhalten wir als Differentialgleichung der Kettenlinie

$$\tau \frac{dy}{dx} = \varkappa \varrho g \int_0^s ds = \varkappa \varrho g s, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\varkappa \varrho g}{\tau} s = \beta s, \tag{1}$$

wenn $\frac{\varkappa \varrho g}{\tau} = \beta$ gesetzt wird. Die Differentiation dieser Gleichung giebt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \beta \frac{ds}{dx} = \beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

welches Resultat durch Integration übergeht in

$$l\left[\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right] = \beta x + k, \text{ d. i. } \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = e^{\beta x + k},$$

womit sich ergiebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\beta x + k} - e^{-\beta x - k}), \tag{2}$$

und wenn wir nochmals integrieren, so wird

$$y = \frac{1}{2\beta}(e^{\beta x + k} + e^{-\beta x - k}) + C.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten k schreitend, beachten wir, dass für den tiefsten Punkt der Curve $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, also auch $\beta x + k = -\beta x - k$ sein muss, und wenn wir noch berücksichtigen, dass die Ordinatenaxe durch diesen Punkt gehen soll, also auch $x = 0$ ist, so folgt $2k = 0$, d. i. $k = 0$. Damit wird die Gleichung der Kettenlinie

$$y = \frac{1}{2\beta}(e^{\beta x} + e^{-\beta x}) + C.$$

Wählen wir den Coordinatenursprung O so, dass für $x = 0$, $y = \frac{1}{\beta} = \frac{\tau}{\varkappa \varrho g}$, dann ist $C = 0$, daher

$$y = \frac{1}{2\beta}(e^{\beta x} + e^{-\beta x}). \tag{3}$$

Dieses ist die Gleichung der gemeinen Kettenlinie mit der Direktrix als Abscissenaxe, welche gewöhnlich, mit $\beta = \frac{1}{c}$, unter der Form erscheint

$$y = \frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}). \tag{4}$$

Nehmen wir dagegen den tiefsten Punkt C der Curve als Coordinatenursprung, dann ist $C = -\frac{1}{\beta}$, folglich

$$y = \frac{1}{2\beta}(e^{\beta x} + e^{-\beta x} - 2) = \frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} - 2). \tag{5}$$

Die Verbindung der Gleichungen (1) und (2) giebt noch

$$s = \frac{1}{2\beta}(e^{\beta x + k} - e^{-\beta x - k}),$$

oder, da $k=0$, wenn die Ordinatenaxe durch den tiefsten Curvenpunkt geht,

$$s=\frac{1}{2\beta}(e^{\beta x}-e^{-\beta x})=\frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}). \tag{6}$$

Die Spannung in einem beliebigen Punkte des Fadens ist

$$T=-A\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

so dass, weil $\frac{dy}{dx}=\beta s$, $\beta=-\frac{\varkappa\varrho g}{A}$, also $A=-\frac{\varkappa\varrho g}{\beta}$ ist,

$$T=\frac{\varkappa\varrho g}{\beta}\sqrt{1+\beta^2 s^2}. \tag{7}$$

Für den tiefsten Punkt der Curve ist $s=0$, daher die Horizontalspannung daselbst

$$\tau=\frac{\varkappa\varrho g}{\beta},$$

womit

$$T^2=\tau^2+\varkappa^2\varrho^2 g^2 s^2. \tag{8}$$

Daraus geht hervor, dass die Spannung im Scheitel der Curve ein Minimum der Spannungen ist. $\varkappa\varrho g s$ ist das Gewicht des Bogens s, gerechnet vom tiefsten Curvenpunkte an, mithin ist die Differenz der Quadrate der Spannungen in einem beliebigen Punkte und im Scheitel gleich dem Quadrate des Gewichtes des Bogens vom Scheitel bis zu jenem Curvenpunkte.

Die Gleichungen (3) und (6) geben noch $s^2=y^2-\frac{1}{\beta^2}$, womit wir durch (7) erhalten

$$T=\varkappa\varrho g y. \tag{9}$$

Damit zeigt es sich, dass die Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte gleich dem Gewichte eines Bogenstückes der Kettenlinie ist, dessen Länge gleich dem Abstande des fraglichen Curvenpunktes von der Direktrix ist, wodurch die Grösse der Spannung in jedem Curvenpunkte stets sofort angegeben werden kann, wenn seine Ordinate bekannt ist.

Wir haben die Gleichung gefunden $P\sin\vartheta=\frac{T}{r}$. Im vorliegenden Falle ist $P=-\varkappa\varrho$, $\sin\vartheta=-\frac{1}{\beta y}$, wodurch mit Rücksicht auf (9) und den Wert von τ

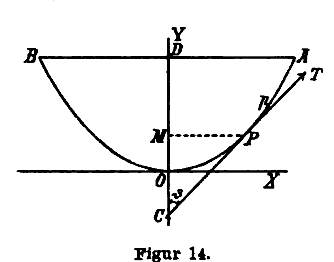
$$r=\frac{T^2}{\varkappa\varrho g\tau}=\frac{T^2}{\beta\tau^2}=c\frac{T^2}{\tau^2}, \tag{10}$$

daher ist der Krümmungshalbmesser dem Quadrate der Spannung T in

dem fraglichen Curvenpunkte direkt proportional. Für den Scheitel ist $T = \tau$, also $r_0 = \frac{1}{\beta} = c$, d. i. gleich dem Parameter der Curve.

In der Theorie der Bewegung und der Kräfte von Schell befindet sich eine sehr elegante Ableitung der Gleichung der Kettenlinie.

b) Eine andere Behandlung dieses Problemes, welche von den allemeinen Gleichgewichtsbedingungen unabhängig ist, geben wir in dem Folgenden.



Figur 14.

Es sei (Fig. 14) O der tiefste Punkt des Fadens AOB, die horizontale Gerade OX Abscissen-, die vertikale Gerade OY Ordinatenaxe, beide Linien in der Ebene des Fadens gelegen, P ein beliebiger Curvenpunkt, die Horizontale $PM = x$, $OM = y$, $OP = s$. Befindet sich der Faden unter der Wirkung der Schwerkraft im Gleichgewichte, so können wir den Bogen OP als unveränderlich ansehen, welcher dann unter der Wirkung dreier Kräfte, nämlich den in den Richtungen der Tangenten in den Punkten O und P der Curve wirkenden Spannungen τ und T und seines Gewichtes G im Gleichgewichte ist. Die Richtungen dieser drei Kräfte laufen parallel zu den Seiten des Dreieckes MPC, wobei C der Schnittpunkt der Tangente in P mit der Ordinatenaxe ist, ihre Grössen verhalten sich wie diese Dreiecksseiten, so dass

$$\frac{G}{\tau} = \frac{MC}{MP} = \frac{dy}{dx}.$$

Nun ist aber der Faden von gleichmässiger Dicke und Dichtigkeit, dadurch kann G durch die Länge s des Bogens OP, die Spannung τ im Scheitel durch eine gewisse Länge c des Fadens ersetzt werden, so dass

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}, \tag{1}$$

folglich ist

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{\sqrt{c^2 + s^2}}{s}, \qquad dy = \frac{s\,ds}{\sqrt{c^2 + s^2}}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$y + C = \int_0^s \frac{s\,ds}{\sqrt{c^2 + s^2}} = \sqrt{c^2 + s^2},$$

weil gleichzeitig y und s verschwinden, ist $C = c$, daher

$$y + c = \sqrt{c^2 + s^2}, \qquad s = \sqrt{y^2 + 2cy}. \tag{2}$$

Mithin ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{c}{s} = \frac{c}{\sqrt{y^2 + 2cy}}, \qquad \text{d. i.} \qquad x = c\, l\, \frac{y + c + \sqrt{y^2 + 2cy}}{c},$$

denn die Integrationskonstante verschwindet, weil gleichzeitig $x = 0$, $y = 0$ sind. Aus der letzten Gleichung folgt durch Übergang vom Logarithmus zu den Zahlen und nach einer einfachen Umformung

$$y + c = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right), \tag{3}$$

oder, wenn wir $y - c$ an Stelle von y setzen, wodurch der Coordinatenursprung in einen Abstand c von O unter diesen Punkt verlegt und die Direktrix der Curve Abscissenaxe wird,

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right), \tag{3'}$$

womit die Gleichungen der Kettenlinie gefunden sind.

Aus (2) und (3) folgt für die Länge des vom Scheitel an gerechneten Bogens s der Curve

$$s = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right). \tag{4}$$

Die Gleichungen (2), (3), (4) bleiben dieselben, wenn die festen Punkte A und B auch nicht in einer horizontalen Linie liegen.

Was nun die Spannung T anbelangt, so ist, weil $\tau = \varkappa \varrho g c$, offenbar auch $T = \varkappa \varrho g L$, mithin

$$\frac{PC}{MC} = \frac{T}{G} = \frac{\varkappa \varrho g L}{\varkappa \varrho g s} = \frac{L}{s} = \frac{ds}{dy}, \qquad \text{also} \qquad L = \frac{s\,ds}{dy}.$$

Aus (2) folgt aber $\frac{s\,ds}{dy} = y + c$, so dass $L = y + c$, mithin

$$T = \varkappa \varrho g (y + c) = \varkappa \varrho g \sqrt{c^2 + s^2} = \sqrt{\tau^2 + \varkappa^2 \varrho^2 g^2 s^2}. \tag{5}$$

Die horizontale und vertikale Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte sind demnach offenbar τ und $\varkappa \varrho g s$, so dass die Horizontalspannung in allen Punkten des Fadens gleich gross ist.

Setzen wir in (4) $x = a =$ der halben Spannweite des Bogens, $s = S =$ Bogen OA, so wird

$$S = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right), \tag{6}$$

welche Gleichung durch die Methode der successiven Versuche für c aufgelöst werden kann. Es lässt sich aber auch leicht eine andere Formel konstruieren. Wir haben nämlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{s}, \qquad \text{also} \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{s}{c}\right)^2}, \text{ mithin}$$

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1+\left(\frac{s}{c}\right)^2}}, \qquad x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+\left(\frac{s}{c}\right)^2}}$$

$$= c\, l\left\{\frac{s}{c} + \sqrt{1+\left(\frac{s}{c}\right)^2}\right\}.$$

Aber mit $\measuredangle PCM = \vartheta$ ist $c = s\, tg\, \vartheta$, womit sich ergiebt

$$\frac{x}{s} = -\, tg\, \vartheta\, l\left(tg\, \frac{\vartheta}{2}\right).$$

Setzen wir nun in dieser Gleichung gleichzeitig $x = a$, $s = S$, so folgt

$$-\, tg\, \vartheta\, l\left(tg\, \frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{a}{S}, \qquad c = S\, tg\, \vartheta. \tag{7}$$

Wird die erste der Gleichungen (7) nach irgend einer Methode näherungsweise für ϑ aufgelöst, dann giebt die zweite den Parameter c, worauf die Scheitelspannung τ leicht berechnet werden kann.

Aus den Gleichungen (1) und (2) geht hervor, dass

$$y = \sqrt{c^2 + s^2} - c, \qquad s = \sqrt{y(y + 2c)}$$

Setzen wir hier gleichzeitig $y = OD = H$, $s = S$, dann folgt

$$H = \sqrt{c^2 + S^2} - c, \quad (8) \qquad S = \sqrt{H(H + 2c)}. \tag{9}$$

Durch (8) ist der Abstand des tiefsten Punktes der Kettenlinie von der Horizontalen AB bestimmt, sobald S gegeben und c mittelst (6) oder (7) berechnet worden ist. Wenn aber H gegeben ist und S gesucht wird, dann muss zuerst c durch die Gleichung

$$\frac{c}{2}\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right) = \sqrt{H(H + 2c)},$$

welche sich aus (6) und (9) ergiebt, oder durch die Gleichung

$$\frac{c}{2}\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right) - c = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{a}{2c}} - e^{-\frac{a}{2c}}\right) = H,$$

welche aus (3) folgt, wenn gleichzeitig daselbst $x = a$, $y = H$ gesetzt wird, bestimmt werden, den gefundenen Wert haben wir in (8) oder (9) zu substituieren.

Aus $\frac{dx}{dy} = \frac{c}{s}$ und $L = y + c$, also $dL = dy$ resultiert ferner

$$s = \frac{c\, dL}{dx}, \qquad ds\, dx + s\, d^2x = 0,$$

$$ds\, dx + \frac{c\, dL\, d^2x}{dx} = 0, \qquad ds\, dx^2 = -\, c\, dL\, d^2x.$$

Es ist aber $\frac{dx}{ds} = \frac{c}{L}$, folglich $dx^2 = \left(\frac{c}{L}\, ds\right)^2$, so dass

$$c\,ds^3 + L^2\,dL\,d^2x = 0,$$

oder
$$-\frac{ds^3}{d^2x\,dL} = -\frac{ds^3}{d^2x\,dy} = \frac{L^2}{c}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{L^2}{c} = r,$$

wenn r den Krümmungshalbmesser der Curve bezeichnet. Für den tiefsten Punkt der Curve ist $L = c$, folglich $r_0 = c$. Die Spannung T der Kettenlinie in einem beliebigen Punkte P ist die mittlere Proportionale zwischen dem Gewichte eines Seilstückes von der Länge des Krümmungshalbmessers für diesen Punkt und dem Gewichte eines Seilstückes von der Länge des Krümmungshalbmessers in dem tiefsten Punkte der Curve.

Entwickeln wir die rechte Seite der Gleichung

$$1 + \frac{y}{c} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

in eine Reihe, so bekommen wir

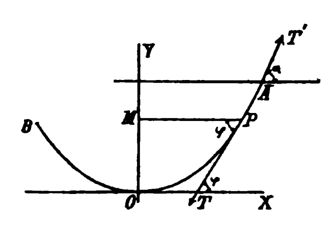
$$\frac{y}{c} = \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^4}{2.3.4.c^4} + \ldots,$$

weil nun x in der Nähe des tiefsten Punktes sehr klein ist, so kann näherungsweise geschrieben werden

$$x^2 = 2\,c\,y,$$

wodurch dargethan ist, dass in der Nähe des tiefsten Punktes die Kettenlinie nahezu mit einer Parabel zusammenfällt.

c) Eine dritte Lösung dieses Problemes kann in der nachstehenden Weise bewirkt werden.



Figur 15.

Die Aufhängepunkte des Fadens seien A, B (Fig. 15), O sei der tiefste Punkt der Fadencurve. Durch den Punkt O legen wir in der Ebene der Curve AOB die Coordinatenaxen OX, OY in horizontaler und vertikaler Richtung, so dass die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Curve $MP=x$, $OM=y$ sind, α und φ seien die Winkel, welche die Tangenten an die Curve in dem Aufhängepunkte A und dem beliebigen Punkte P mit der Horizontalen einschliessen, T' und T die Spannungen des Fadens in den Punkten A und P, s und s' die Längen der Curvenstücke OP und PA, q bezeichne das Gewicht der Längeneinheit des Fadens, so dass $q = \varkappa\varrho g$ ist.

Damit das Seilstück AP im Gleichgewichte ist (wenn wir dasselbe als ein freies, unveränderliches System ansehen) müssen die Kräfte T', T, welche in den Richtungen der Tangenten an die Curve in den Endpunkten des Bogens AP angreifen und im entgegengesetzten Sinne wirken, und

das Gewicht $q\,s'$ dieses Stückes im Gleichgewichte sein. Indem wir diese Kräfte auf die Coordinatenaxen projizieren, erhalten wir die Bedingungen

$$T \cos\varphi - T' \cos\alpha = 0, \quad (1) \qquad T \sin\varphi + q\,s' - T' \sin\alpha = 0. \quad (2)$$

Aus (1) folgt

$$T \cos\varphi = T' \cos\alpha = \tau, \tag{3}$$

d. h. die horizontale Spannung des Fadens ist in jedem seiner Punkte gleich gross.

Aus (2) geht hervor

$$T \sin\varphi = T' \sin\alpha - q\,s', \tag{4}$$

d. h. die vertikale Componente der Spannung in einem beliebigen Punkte des Fadens ist gleich der Differenz aus der Vertikalcomponente der Spannung im Aufhängepunkte und dem Gewichte des über dem fraglichen Punkte liegenden Fadenstückes. Aus (3) folgt noch, da der Winkel φ vom Aufhängepunkte nach dem tiefsten Punkte O hin beständig abnimmt, dass die Spannung vom Aufhängepunkte nach dem tiefsten Punkte hin beständig abnimmt, daselbst ihr Minimum, nämlich $T_{min} = \tau$ erreicht.

Für den Scheitel O der Curve ist $\varphi = 0$, die Länge des für ihn in Frage kommenden Fadenstückes $A\,O = s + s'$, mithin daselbst $T \sin\varphi = 0$ und

$$q\,(s + s') = T' \sin\alpha, \tag{5}$$

womit wir als Fadenlänge S vom tiefsten Punkte bis zum Aufhängepunkte erhalten

$$S = s + s' = \frac{T' \sin\alpha}{q}.$$

Aus (2) und (5) ergiebt sich

$$T \sin\varphi = q\,s, \tag{6}$$

und wenn wir (6) durch (1) teilen, sodann $\frac{q}{T' \cos\alpha} = \beta$ setzen,

$$tg\,\varphi = \frac{q\,s}{T' \cos\alpha}, \quad \frac{d\,y}{d\,s} = \beta\,s. \tag{7}$$

Die Differentiation dieser Gleichung liefert, wenn x als unabhängige Variable, also $d\,x$ als konstant angesehen wird,

$$\frac{d^2 y}{d\,x} = \beta\,d\,s = \beta \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}\,d\,x, \quad \frac{d^2 y}{d\,x \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}} = \beta\,d\,x, \tag{8}$$

oder, mit $\frac{d\,y}{d\,x} = p$,

$$\frac{d\,p}{\sqrt{1 + p^2}} = \beta\,d\,x. \tag{9}$$

Das Integral dieser Gleichung ist, da die Integrationskonstante gleich Null, weil x und p gleichzeitig verschwinden,

$$l(p + \sqrt{1+p^2}) = \beta x, \quad \text{d. i.} \quad 1 = -2p e^{\beta x} + e^{2\beta x},$$

oder, indem wir mit $2p$ dividieren und für p seinen Wert setzen,

$$2\,dy = (e^{\beta x} - e^{-\beta x})\,dx. \tag{10}$$

Durch die Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$2y = \frac{1}{\beta}(e^{\beta x} + e^{-\beta x}) + C.$$

Nun sind x und y gleichzeitig gleich Null, so dass $C = -\frac{2}{\beta}$, mithin

$$y = \frac{1}{2\beta}(e^{\beta x} + e^{-\beta x} - 2), \quad \text{wobei} \quad \beta = \frac{q}{T' \cos\alpha} \text{ ist.} \tag{11}$$

Damit ist die Gleichung der gemeinen Kettenlinie für die durch ihren Scheitel laufende Coordinatenaxen gefunden.

Aus (10) und (7) folgt für die Bogenlänge s der Curve

$$s = \frac{1}{\beta}(e^{\beta x} - e^{-\beta x}). \tag{12}$$

Die Integration der Gleichung (8) kann auch in folgender Weise bewirkt werden. Wir können dieselbe schreiben

$$\frac{\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \beta\,dy, \quad \text{oder} \quad \frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = \beta\,dy.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\sqrt{1+p^2} = \beta y + C,$$

aber mit $y = 0$ ist $\varphi = 0$, also $p = 0$, so dass $C = 1$, mithin

$$\sqrt{1+p^2} = \beta y + 1. \tag{13}$$

Bezeichnet y' die Ordinate des Aufhängepunktes A, dann ist, weil für denselben $p = tg\,\alpha$ ist,

$$\sqrt{1 + tg^2\alpha} = \beta y' + 1, \text{ womit } y' = \frac{1}{\beta}(\sec\alpha - 1). \tag{14}$$

Aus (13) folgt durch Einführung des Wertes von p

$$dx = \frac{1}{\beta}\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{\beta}y + y^2}}, \tag{15}$$

weil nur das positive Vorzeichen der Wurzelgrösse genommen werden darf, da für den Bogen OA dy mit dx wächst. Die Integration der (15) giebt

$$x = \frac{1}{\beta} l \left\{ \frac{1}{\beta} + y + \sqrt{\frac{2}{\beta}y + y^2} \right\} + C.$$

Die Coordinaten des tiefsten Curvenpunktes sind $x = 0$, $y = 0$, mithin ist $C = -\frac{1}{\beta} l\left(\frac{1}{\beta}\right)$, so dass die Gleichung der Kettenlinie

$$x = \frac{1}{\beta} l \left\{ 1 + \beta y + \beta \sqrt{\frac{2}{\beta} y + y^2} \right\}. \tag{16}$$

Diese Gleichung stellt x als Funktion von y dar. Durch Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen und Auflösung der resultierenden Gleichung nach y erscheint genau die (12). Bezeichnen x', y' die Coordinaten des Aufhängepunktes, dann ist zufolge von (14) und (16)

$$x' = \frac{1}{\beta} l \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

Noch erhalten wir durch (7) und (15) für die Bogenlänge s der Curve die Formel

$$s = \sqrt{\frac{2}{\beta} y + y^2}. \tag{18}$$

Die Gleichung für die Krümmungshalbmesser r ebener Curven ist

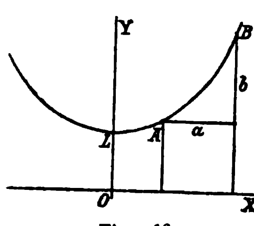
$$r = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Nun ist mit (7) und (8) $\frac{dy}{dx} = \beta s$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \beta \sqrt{1 + \beta^2 s^2}$, folglich

$$r = \frac{(1 + \beta^2 s^2)^{\frac{3}{2}}}{\beta \sqrt{1 + \beta^2 s^2}} = \frac{1}{\beta} (1 + \beta^2 s^2) = \frac{1}{\beta} (1 + 2 \beta y + \beta^2 y^2).$$

Für den tiefsten Curvenpunkt ist $s = 0$, $y = 0$, daher der Krümmungsradius daselbst $r_0 = \frac{1}{\beta} = \frac{\tau}{q}$. Für den Aufhängepunkt A haben wir $y = y'$, $s = S = \sqrt{\frac{2}{\beta} y' + y'^2} = \frac{1}{\beta} tg\, \alpha$, mithin ist daselbst $r = \frac{1}{\beta} sec^2 \alpha = \frac{\tau}{q} sec^2 \alpha$.

2. Ein homogener Faden von der Länge S hängt mit seinen Endpunkten an den festen Punkten A, B und ist der Wirkung der Schwerkraft unterworfen. Welches sind die Elemente der von ihm gebildeten Kettenlinie?



Figur 16.

Wir wählen die noch unbekannte Direktrix OX (Fig. 16) als Abscissenaxe und die durch den tiefsten Punkt L der Curve gehende Vertikallinie OLY als Ordinatenaxe. Die wechselseitigen Abstände der Aufhängepunkte seien a und b, in horizontaler und vertikaler Richtung gemessen, so dass, wenn x, y die Coordinaten des Punktes A, diejenigen des Punktes B $x + a$, $y + b$ sind.

Für die Curve haben wir die Gleichungen gefunden

$$y = \frac{1}{2\beta}(e^{\beta x} + e^{-\beta x}), \quad (1) \qquad s = \frac{1}{2\beta}(e^{\beta x} - e^{-\beta x}). \quad (2)$$

Die Addition und Subtraktion dieser zwei Gleichungen giebt

$$y + s = \frac{1}{\beta} e^{\beta x}, \quad (3) \qquad y - s = \frac{1}{\beta} e^{-\beta x}. \quad (4)$$

Demnach muss für den Aufhängepunkt B sein

$$(y + b + s + S) = \frac{1}{\beta} e^{\beta(x+a)}, \quad (5) \qquad (y + b - s - S) = \frac{1}{\beta} e^{-\beta(x+a)}. \quad (6)$$

Ziehen wir die Gleichungen (5) und (3), (6) und (4) von einander ab, so ergeben sich die Beziehungen

$$\beta(b + S) = e^{\beta x}(e^{\beta a} - 1), \quad (7) \qquad \beta(b - S) = e^{-\beta x}(e^{-\beta a} - 1), \quad (8)$$

in denen die Unbekannten s und y nun nicht mehr vorkommen, sondern nur noch die zwei Unbekannten β und x. Durch die Multiplikation der (7) und (8) mit einander erhalten wir

$$\beta \sqrt{S^2 - b^2} = (e^{\frac{\beta a}{2}} - e^{-\frac{\beta a}{2}}),$$

oder, wenn wir $\beta a = z$, $\frac{\sqrt{S^2 - b^2}}{a} = c$ setzen,

$$c = \frac{1}{z}(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}). \quad (9)$$

Ist durch die Gleichung (9) der Wert von z auf irgend eine Weise in Ausdrücken von a, b, S bestimmt, dann ergiebt sich der Parameter der Curve durch die Gleichung $\beta = \frac{z}{a}$, die Abscisse x durch die Relation (7), die Ordinate y eines beliebigen Curvenpunktes durch die Gleichung (1).

Die (9) lässt sich in verschiedener Weise auflösen. Bedient man sich der Reihenentwickelung, so ist

$$e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}} = z + \frac{z^3}{2.^2 3!} + \frac{z^5}{2.^4 5!} + \cdots,$$

$$c = \frac{1}{z}(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}) = 1 + \frac{z^2}{2.^2 3!} + \frac{z^4}{2.^4 5!} + \cdots,$$

womit annähernd $\frac{z^2}{48} = c - 1, \quad z = 4\sqrt{3(c-1)}$.

Ferner kann z dadurch bestimmt werden, dass wir die Unbekannte z als Abscisse des Durchschnittspunktes der beiden Curven $y = cz$ und $y = e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}$ ansehen, diese Curven verzeichnen und den Wert der Abscisse des Durchschnittspunktes abgreifen. Endlich können wir z mittelst einer Tabelle bestimmen, deren Konstruktion sich wie folgt ergiebt. Die Konstante c ist durch die Relation gegeben $c = \frac{1}{a}\sqrt{S^2 - b^2}$, wobei stets $S > b$ und c

oder $\frac{1}{a}\sqrt{S^2-b^2}>1$ ist. Mit $b=0$ liegen die Aufhängepunkte in derselben Horizontalen, ist dann noch $a=1$, so wird $c=S$ und $z=\beta$. Demnach besitzt die durch S, a und b bestimmte Kettenlinie denselben Parameter wie die Kettenlinie von der Länge S, deren Aufhängepunkte in derselben Horizontalen liegen und den Abstand Eins von einander haben. Setzen wir $\frac{1}{2}(e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}})=\frac{1}{\sin\vartheta}$, so ist auch, wegen $\frac{1}{\sin\vartheta}=\sqrt{1+cotg^2\vartheta}$,

$\frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}{2}=cotg\,\vartheta$, mithin $e^{\frac{z}{2}}=cotg\,\vartheta+\frac{1}{\sin\vartheta}=\frac{\cos\vartheta+1}{\sin\vartheta}=cotg\,\frac{\vartheta}{2}$,

woraus $\frac{z}{2}=l\left(cotg\,\frac{\vartheta}{2}\right)$ folgt. Damit geht unsere transcendente Gleichung über in

$$\frac{1}{c}=tg\,\vartheta.l\left(cotg\,\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Mittelst dieser Gleichung ist nun von $\vartheta=0$ bis $\vartheta=90^0$ eine Tabelle zu berechnen, die in der einen Kolumne die Werte von ϑ, in der anderen diejenigen von $\frac{1}{c}$ oder gleich c enthält. Eine solche Tabelle befindet sich in der analytischen Mechanik von Duhamel, übersetzt durch Schlömilch, Band I, S. 162. Für $\frac{1}{c}=\frac{a}{\sqrt{S^2-b^2}}$ erhalten wir den entsprechenden Wert von ϑ, sodann $\frac{z}{2}=l\left(cotg\frac{\vartheta}{2}\right)$, $\beta=\frac{z}{a}$ u. s. f.

Die Gleichung der Kettenlinie ist $y=\frac{1}{2\beta}(e^{\beta x}+e^{-\beta x})$. Die Entwickelung der Klammergrösse in eine Reihe giebt $y=\frac{1}{\beta}+\frac{\beta}{2!}x^2+\frac{\beta^3}{4!}x^4+\frac{\beta^5}{6!}x^6+\cdots$ und ist für sehr kleine Werte von x $y=\frac{1}{\beta}+\frac{\beta}{2}x^2$, also die Curve in der Nähe des Scheitels annähernd eine Parabel, für welche sie Galilei hielt.

Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

3. Ein Seil von konstantem Querschnitte und konstanter Dichtigkeit ALB (Fig. 17) ist mit seinen Enden in den Punkten A, B einer horizontalen Linie aufgehangen. Die Anspannung in jedem Aufhängepunkte ist gleich dem ganzen Gewichte der Kette. Welches ist die Länge des Seiles? Welches ist die Tiefe des Curvenscheitels L unter der Horizontalen AB? Welches ist die Richtung der Tangente bei A oder B?

Figur 17.

Es sei die Gerade $YCLO$ vertikal, $OL=$ der Länge desjenigen Kettenstückes, dessen Gewicht gleich der Spannung im tiefsten Punkte L ist, OX horizontal, $PM \perp OX$, $OM=x$, $MP=y$, $OL=c$, $ALB=s$, $AC=BC=a$.

Die Gleichung der Curve und ihre ganze Länge ist

$$y=\frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}), \quad (1) \qquad s=c(e^{\frac{a}{c}}-e^{-\frac{a}{c}}). \quad (2)$$

Bezeichnet m die zu irgend einem Punkte des Seiles gehörige Masse, welche hier konstant ist, dann ist die Spannung im Punkte P

$$mgy=\frac{1}{2}mcg(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}),$$

daher diejenige im Aufhängepunkte B

$$mgy'=\frac{1}{2}mcg(e^{\frac{a}{c}}+e^{-\frac{a}{c}}).$$

Nach der Annahme ist aber diese Spannung gleich mgs und wird daher durch (2)

$$mgs=mcg(e^{\frac{a}{c}}-e^{-\frac{a}{c}}),$$

folglich muss sein

$$\frac{1}{2}mcg(e^{\frac{a}{c}}+e^{-\frac{a}{c}})=mcg(e^{\frac{a}{c}}-e^{-\frac{a}{c}}),$$

so dass

$$\frac{1}{2}e^{\frac{a}{c}}=\frac{3}{2}e^{-\frac{a}{c}}, \qquad e^{\frac{2a}{c}}=3,$$

oder

$$\frac{2a}{c}=l(3), \qquad \frac{a}{c}=\frac{1}{2}l(3) \quad (3)$$

sein muss. Mithin ergiebt sich durch (2)

$$s=\frac{2a}{l(3)}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4a}{\sqrt{3}\,l(3)},$$

womit die ganze Länge des Seiles bestimmt ist.

Indem in (1) $x=a$ gesetzt wird, kommt

$$OC=\frac{1}{2}c(e^{\frac{a}{c}}+e^{-\frac{a}{c}}),$$

so dass

$$CL=\left(\frac{1}{2}e^{\frac{a}{c}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{a}{c}}-1\right)c=\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}-1\right)\frac{2a}{l(3)} \text{ mit (3)},$$

$$CL=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\frac{2a}{l(3)}=\frac{2a}{l(3)}\,\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

wodurch der Abstand des tiefsten Punktes des Seiles von der Horizontalen AB gegeben ist.

Ferner sagt die Gleichung (1), dass

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}),$$

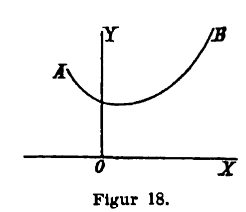
daher ist, wenn α die Horizontalneigung des Fadens bei B bezeichnet,

$$tg\,\alpha = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

folglich ist $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Walton, p. 122.

4. Ein vollkommen biegsamer Faden ist mit seinen Enden in zwei beliebigen Punkten A, B (Fig. 18) befestigt und der Wirkung der Schwerkraft unterworfen. Die Masse des Fadens ändert sich nach einem bestimmten Gesetze, so wie wir von einem Punkte zum andern wandern. Es soll die Gleichung der Fadencurve für den Gleichgewichtszustand und das Änderungsgesetz der Masse des Fadens, wenn die Gleichgewichtscurve bekannt ist, gefunden werden.



Figur 18.

Die Ebene der Curve sei Coordinatenebene, ein beliebiger Punkt O in ihr Coordinatenanfang, die Vertikale OY Ordinaten-, die Horizontale OX Abscissenaxe.

In diesem Falle ist $X = 0$, $Y = -g$. Ferner sind die zur Verfügung stehenden allgemeinen Gleichungen

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \text{oder} \quad T\frac{dx}{ds} + A = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + mY = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) - mg = 0. \tag{2}$$

Bezeichnet τ die Spannung im tiefsten Curvenpunkte, dann ist offenbar $-A = \tau$, somit

$$T\frac{dx}{ds} = \tau. \tag{3}$$

Mit (2) und (3) erhalten wir

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds}\right) = mg, \quad \tau\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right) = mg,$$

mithin

$$\tau\frac{dy}{dx} = \int mg\,ds.$$

Für den tiefsten Curvenpunkt ist $\frac{dy}{dx} = 0$, daher ist, wenn s_0 den Wert von s für diesen Punkt bezeichnet,

$$\tau \frac{dy}{dx} = g \int_{s_0}^{s} m\, ds. \tag{4}$$

Wird m als Funktion der Variablen x, y, s gegeben, dann ist die Form der Fadencurve durch (4) bestimmt.

Die Differentiation der (4) giebt

$$m = \frac{\tau}{g} \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\frac{ds}{dx}},$$

eine Formel, mit welcher m für jeden Punkt der Fadencurve berechnet werden kann, wenn ihre Gestalt gegeben ist. Zufolge der (3) erhalten wir noch in diesem Falle für die Spannung in einem beliebigen Punkte des Fadens

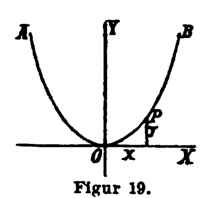
$$T = \tau \frac{ds}{dx}.$$

Johann Bernoulli, Lectiones Mathematicae, Lect. 38, 39, 40; Opera, Tom. III.

Die Gleichungen (4) und (6) können auch sofort durch die Formeln (1) und (2) unter I) angeschrieben werden, wir haben dann nur zu beachten, dass im tiefsten Curvenpunkte $B = 0$, also $-A = \tau$ ist.

Walton, p. 118.

5. Ein vollkommen biegsames Seil AOB (Fig. 19) ist mit seinen Enden in den Punkten A, B befestigt und der Wirkung der Schwerkraft unterworfen. Die Masse in einem beliebigen Punkte P der Seilcurve ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Länge des Bogenstückes OP, gemessen vom tiefsten Curvenpunkte an. Welches ist die Gleichgewichtscurve und die Spannung in einem beliebigen Punkte des Seiles?



Figur 19.

Wir wählen die Ebene der Seilcurve als Coordinatenebene, den tiefsten Punkt O der Curve als Coordinatenursprung, die Axen OX, OY horizontal und vertikal.

Bezeichnet μ die Masse des Seiles in dem Ende eines vom tiefsten Punkte an gerechneten Bogens c, so ist

$$m = \mu \sqrt{\frac{c}{s}},$$

daher erhalten wir nach Problem 4 für die Gleichgewichtscurve die Gleichung

$$\tau\frac{dy}{dx} = g\mu\sqrt{c}\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{s}} = 2g\mu\sqrt{cs}.$$

folglich ist mit $\frac{2g\mu\sqrt{c}}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{s}{\beta}}, \quad \beta\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \frac{\beta\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 1.$$

Die Integration dieser Gleichung bezüglich x giebt, wenn wir beachten, dass gleichzeitig $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$,

$$2\beta\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = x + 2\beta, \qquad 2\beta\,dy = \sqrt{(x+2\beta)^2 - 4\beta^2}\,dx.$$

Durch weitere Integration folgt

$$C + 2\beta y = \frac{1}{2}(x+2\beta)\sqrt{x^2+4\beta x} - 2\beta^2 l\left\{x + 2\beta + \sqrt{x^2+4\beta x}\right\}.$$

Nun ist gleichzeitig $x = 0$, $y = 0$, so dass $C = -2\beta^2 l(2\beta)$, mithin

$$2\beta y = \frac{1}{2}(x+2\beta)\sqrt{x^2+4\beta x} - 2\beta^2 l\frac{x+2\beta+\sqrt{x^2+4\beta x}}{2\beta},$$

welches die verlangte Gleichung der Curve ist.

Die Relation (1) giebt

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x+2\beta}{2\beta},$$

daher ist

$$T = \tau\frac{ds}{dx} = \frac{\tau}{2\beta}(x+2\beta),$$

womit auch die Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte gegeben ist.

Johann Bernoulli, Lect. Math., Opera, Tom. III, p. 497. Walton, p. 120.

6. **Bestimmung des Gesetzes, nach welchem sich die Masse eines Seiles in den aufeinander folgenden Querschnitten ändern muss, damit dasselbe in der Gestalt eines Halbkreises mit horizontalem Durchmesser unter der Wirkung der Schwerkraft hängen kann.**

Die Gleichung der Seilcurve ist

$$x^2 = 2ay - y^2,$$

aus ihr folgt $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2-x^2}$ so dass mit Formel (5) Problem 4

$$m = \frac{\tau}{g}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{ds} = \frac{\tau}{g}\frac{a}{a^2-x^2} = \frac{\tau}{g}\frac{a}{(a-y)^2}.$$

Mithin muss die Masse in jedem Punkte des Seiles umgekehrt proportional

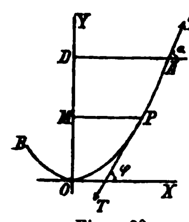
dem Quadrate seines Abstandes von dem horizontalen Durchmesser des Halbkreises sein.

Noch haben wir für die Spannung in einem beliebigen Punkte dieses Seiles

$$T = \tau \frac{ds}{dx} = \frac{\tau a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\tau a}{a - y}.$$

Johann Bernoulli, Opera, Tom. III, p. 502. Walton, p. 121.

7. Ein vollkommen biegsames Seil ist mit seinen Enden befestigt und sein Gewicht der Länge seiner Horizontalprojektion direkt proportional. Welches ist seine Gleichgewichtscurve?



Figur 20.

a) Die Ebene des Seiles AOB (Fig. 20) nehmen wir zur Coordinatenebene, seinen tiefsten Punkt O zum Coordinatenanfang, die Horizontale OX zur Abscissen-, die Vertikale OY zur Ordinatenaxe, so dass mit $MP \parallel OX$ die Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes P sind $MP = x$, $OM = y$. α, φ seien die Horizontalneigungen der Curve in den Punkten A, P. Ferner sei $AD = a$ = der Horizontalprojektion des Seilstückes OA, q das Gewicht der Längeneinheit der Horizontalprojektion, so dass aq das Gewicht des Bogens OA, $(a - x)q$ dasjenige des Bogens PA ist.

Für den Gleichgewichtszustand eines beliebigen Seilstückes PA müssen die Bedingungen erfüllt sein

$$T \cos\varphi - T' \cos\alpha = 0, \quad (1) \qquad T \sin\varphi + (a - x) q - T' \sin\alpha = 0, \quad (2)$$

aus ihnen folgt

$$tg\,\varphi = \frac{T' \sin\alpha - (a - x) q}{T' \cos\alpha}. \tag{3}$$

Für den tiefsten Punkt O des Seiles ist $\varphi = 0$, $x = 0$, mithin

$$T' \sin\alpha = a q, \qquad a = \frac{T' \sin\alpha}{q}, \tag{4}$$

so dass mit (3) und (4) durch Elimination von a

$$tg\,\varphi = \frac{q x}{T' \cos\alpha}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{dy}{dx} = \beta x \quad \text{mit} \quad \frac{q}{T' \cos\alpha} = \beta,$$

womit die Differentialgleichung der Curve gefunden ist. Die Integration dieser Gleichung giebt, da die willkürliche Konstante gleich Null, weil x und y gleichzeitig verschwinden,

$$y = \frac{1}{2} \beta x^2, \qquad x^2 = \frac{2}{\beta} y. \tag{5}$$

Das ist die Gleichung der gemeinen Parabel mit dem Parameter $\frac{2}{\beta} = \frac{2 T' \cos\alpha}{q}$, es wird deshalb diese Seilcurve die parabolische Kettenlinie genannt.

Aus (1) ergiebt sich für die Spannung

$$T\cos\varphi = T'\cos\alpha = \tau, \tag{6}$$

d. h. die Spannung in horizontaler Richtung ist in jedem Curvenpunkte gleich der Spannung τ im tiefsten Curvenpunkte. Die Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte ist

$$T = \frac{T'\sin\alpha - (a-x)q}{\sin\varphi} = \frac{q\,x}{\sin\varphi} = \frac{q}{\beta}\sqrt{1+\beta^2 x^2}.$$

Für die Vertikalspannung haben wir

$$T\sin\varphi = q\,x,$$

es nimmt dieselbe von oben nach unten hin ab, im Aufhängepunkte ist sie ein Maximum, gleich dem Gewichte des Seilstückes vom Aufhängepunkte bis zum tiefsten Punkte, gleich $q\,a$, im tiefsten Punkte ist sie ein Minimum, gleich Null.

Der Abstand des Parabelscheitels von der Horizontalen durch A ist

$$O\,D = \frac{1}{2}\beta\,a^2 = \frac{1}{2\beta}tg^2\alpha.$$

b) Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die vorliegende Aufgabe sind

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad (1) \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + m\,Y = 0. \tag{2}$$

Im vorliegenden Falle ist die Belastung eines Bogenelementes $d\,s = -q\,d\,x$, so dass $m\,Y = -q\,d\,x$, mithin haben wir die zwei Relationen

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad (1') \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) - q\,d\,x = 0. \tag{2'}$$

Die Integration dieser Gleichungen giebt

$$T\frac{dx}{ds} = C, \qquad (3) \qquad T\frac{dy}{ds} - q\,x = C'. \tag{4}$$

Durch die (3) sehen wir, dass die horizontale Spannung in allen Punkten der Curve dieselbe ist. Eliminieren wir aus (3) und (4) $d\,s$, so wird

$$C\frac{dy}{dx} = q\,x + C', \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{q\,x}{C} + C'', \tag{5}$$

woraus durch Integration als Gleichung der Curve folgt

$$y = \frac{1}{2}\frac{q}{C}x^2 + C''x + C'''. \tag{6}$$

Nehmen wir einen der Aufhängepunkte als Coordinatenursprung, dann ist $C''' = 0$, die Gleichung der Curve, welche eine Parabel ist, wird

$$y = \frac{1}{2}\frac{q}{C}x^2 + C''\,x. \tag{7}$$

Ist nun $2\,a$ die Spannweite der Curve, dann sind die Coordinaten des anderen Aufhängepunktes, wenn beide Aufhängepunkte in derselben horizontalen Linie liegen, $x = 2a$, $y = 0$, so dass für die Konstante C'' die

Bedingung $0 = \frac{q}{C}a^2 + C''a$ besteht, woraus folgt $C'' = -\frac{q}{C}a$. Damit geht die Curvengleichung über in

$$y = \frac{q}{2C}(x^2 - 2ax). \tag{8}$$

Verlegen wir den Coordinatenursprung in die Mitte der Spannweite, dann ist an Stelle von x in (8) $(x + a)$ zu substituieren, womit die neue Gleichung wird

$$y = \frac{q}{2C}(x^2 - a^2). \tag{9}$$

Aus (9) ergiebt sich für den Abstand h des tiefsten Punktes der Curve von der Abscissenaxe, da dann $x = 0$ zu setzen ist,

$$h = -\frac{q}{2C}a^2.$$

Es bleibt nun noch die Bestimmung der Konstanten C übrig. Bezeichnet s die ganze Länge des Seiles, so ist

$$s = 2\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\frac{q}{C}\int_0^a \sqrt{\frac{C^2}{q^2} + x^2}\,dx,$$

weil $\frac{dy}{dx} = \frac{q}{C}x$, mithin

$$s = a\sqrt{1 + \left(\frac{q}{C}a\right)^2} + \frac{C}{q}l\left\{\frac{q}{C}a + \sqrt{1 + \left(\frac{q}{C}a\right)^2}\right\}.$$

Wenn nun der Unterschied zwischen der Bogenlänge und der Spannweite sehr klein ist, was bei den Anwendungen gewöhnlich der Fall, so ist auch die Pfeilhöhe $h = -\frac{q}{2C}a^2$ sehr klein und folglich auch $\frac{qa}{C}$ sehr klein, wodurch für solchen Fall die Wurzelgrösse und der Logarithmus in eine Reihe entwickelt werden kann. Mit $z = \frac{q}{C}a$ ist

$$\sqrt{1 + z^2} = 1 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{2.4} + \frac{z^6}{2.4.6} - \ldots,$$

$$l(z + \sqrt{1 + z^2}) = z - \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} - \ldots,$$

$$a\sqrt{1 + z^2} = a + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{C}\right)^2 a^3 - \frac{1}{2.4}\left(\frac{q}{C}\right)^4 a^5 + \ldots,$$

$$\frac{C}{q}l(z + \sqrt{1 + z^2}) = a - \frac{1}{6}\left(\frac{q}{C}\right)^2 a^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{q}{C}\right)^4 a^5 - \ldots.$$

Damit erhalten wir

$$s = 2a + \frac{q^2}{3C^2}a^3, \qquad C = \frac{qa\sqrt{a}}{\sqrt{3(s - 2a)}},$$

wodurch die (9) übergeht in

$$y = \frac{\sqrt{3(s-2a)}}{2a\sqrt{a}}(x^2 - a^2). \tag{10}$$

Endlich ist der Abstand des tiefsten Curvenpunktes von der Sehne AB

$$h = -\frac{1}{2}\sqrt{3a(s-2a)}.$$

8. Ein Seil von veränderlichem Querschnitte ist zwischen zwei gegebenen Punkten A, B aufgehangen und so beschaffen, dass die Spannung, welche auf die Flächeneinheit des Querschnittes fällt, in allen Punkten dieselbe ist. Welches ist die Gleichung der Seilcurve und der Querschnitt des Seiles an einer beliebigen Stelle?

Es sei $\varkappa_0$ der Querschnitt des Seiles in seinem tiefsten Punkte, $\varkappa$ derjenige an einer beliebigen Stelle, dann muss die Bedingung erfüllt sein

$$T : \varkappa = \tau : \varkappa_0, \qquad \text{oder} \qquad \varkappa = \frac{\varkappa_0}{\tau} T. \tag{1}$$

Bezeichnet ϱ die konstante Dichtigkeit des Seiles, so ist die Masse eines Bogenelementes $\varkappa \varrho\, ds$, ihr Gewicht $\varkappa \varrho g\, ds$, wobei $\varkappa$ eine veränderliche Grösse ist.

Die beiden Gleichgewichtsbedingungen sind

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad (2) \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + mY = 0,$$

wovon letztere übergeht in

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \varkappa \varrho g\, ds = 0, \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \varrho \frac{\varkappa_0}{\tau} g T\, ds = 0,$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \gamma \frac{\varkappa_0}{\tau} T\, ds = 0 \qquad \text{mit } \varrho g = \gamma. \tag{3}$$

Die (2) giebt

$$T = -A\frac{ds}{dx}.$$

Im tiefsten Punkte der Curve ist $T = \tau$, $\dfrac{ds}{dx} = 1$, mithin der Ausdruck für die Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte

$$T = \tau\frac{ds}{dx}. \tag{4}$$

Die Einführung dieses Wertes in (3) giebt

$$\tau\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \gamma \varkappa_0 \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} dx, \tag{5}$$

so dass mit $\frac{dy}{dx} = y'$

$$\tau\, dy' = \gamma\, \varkappa_0 \left\{1 + y'^2\right\} dx, \qquad \frac{\tau\, dy'}{1 + y'^2} = \gamma\, \varkappa_0\, dx.$$

Durch die Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$\tau \,.\, arc\,(tg = y') = \gamma\, \varkappa_0\, x + C.$$

Indem wir nun den Ursprung des rechtwinkeligen Coordinatensystemes nach dem tiefsten Punkte der Curve verlegen, verschwindet die Konstante C, denn für $x = 0$ ist $y' = 0$, und die Gleichung lässt sich schreiben

$$\frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{\gamma \varkappa_0}{\tau} x\right),$$

ihre Integration giebt

$$y = \frac{\tau}{\gamma \varkappa_0} l\left(sec \frac{\gamma \varkappa_0}{\tau} x\right), \tag{6}$$

ohne Konstante, denn x und y verschwinden gleichzeitig. Wenn die Spannung und der Querschnitt im Scheitel der Curve bekannt sind, ist durch (6) die Gestalt der Curve gegeben, sie ist bezüglich der Ordinatenaxe symmetrisch.

Für die Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte haben wir mit (4)

$$T = \tau \frac{ds}{dx} = \tau \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \tau \sqrt{1 + tg^2\left(\frac{\gamma \varkappa_0}{\tau} x\right)} = \tau\, sec\left(\frac{\gamma \varkappa_0}{\tau} x\right). \tag{7}$$

Durch (1) und (7) ist der Querschnitt des Seiles daselbst

$$\varkappa = \frac{\varkappa_0}{\tau} T = \varkappa_0\, sec\left(\frac{\gamma \varkappa_0}{\tau} x\right). \tag{8}$$

Damit die Grössen $\varkappa_0$ und τ bestimmt werden können, müssen noch weitere Bedingungen gegeben sein. Unter der Annahme, dass die Curve ausser durch den Coordinatenursprung noch durch einen weiteren Punkt geht, dessen Coordinaten a, b sind, und dass das Seil von $x = 0$ bis $x = a$ ein bestimmtes Gewicht G besitzt, wird die Aufgabe vollständig bestimmt.

Weil die Seilcurve durch den Punkt (a, b) gehen soll, so muss die Gleichung bestehen

$$b = \frac{\tau}{\gamma \varkappa_0} l\left(sec \frac{\gamma \varkappa_0}{\tau} a\right), \qquad \text{oder} \qquad \frac{b}{a} = \frac{l\,(sec\,\omega)}{\omega}, \text{ mit } \omega = \frac{\gamma\, \varkappa_0\, a}{\tau}.$$

Durch Auflösung dieser transcendenten Gleichung ergiebt sich ω, sodann $\frac{\varkappa_0}{\tau} = \frac{\omega}{a\gamma}$.

Das Gewicht eines Längenelementes des Seiles ist $\varkappa \varrho g\, ds = \gamma \varkappa\, ds$

$= \gamma \varkappa_0 sec^2 \left(\frac{\gamma \varkappa_0 x}{\tau}\right) d x$, folglich ist das Gewicht des Seiles von $x = 0$ bis $x = a$

$$G = \gamma \varkappa_0 \int_0^a sec^2 \left(\frac{\gamma \varkappa_0 x}{\tau}\right) d x = \tau \, tg \left(\frac{\gamma \varkappa_0 a}{\tau}\right) = \tau \, tg \, \omega.$$

Hiermit erhalten wir

$$\tau = G \, cotg \, \omega, \qquad \varkappa_0 = \frac{G}{a \gamma} \omega \, tg \, \omega.$$

9. Ein in zwei Punkten A, B aufgehangenes Seil ist so belastet, dass die Belastung proportional der Horizontalprojektion seiner Länge, sein Querschnitt ändert sich so, dass in jedem Punkte eines jeden Querschnittes gleiche Spannung vorhanden ist, wobei ausser dieser Belastung noch das Eigengewicht des Seiles in Rechnung gezogen wird. Welches ist die Gleichung der Gleichgewichtscurve, die gewöhnlich die gleichgespannte Kettenbrückenlinie genannt wird?

Die an einem Längenelemente des Seiles wirkenden Kräfte sind das Seilgewicht $\varkappa \varrho g d s$ und die Belastung $q \, d x$, so dass die Grundbedingungen für das Gleichgewicht

$$d\left(T \frac{d x}{d s}\right) = 0, \quad (1) \qquad d\left(T \frac{d y}{d s}\right) - (\varkappa \varrho g d s + q \, d x) = 0. \quad (2)$$

Der Einfachheit halber legen wir den Coordinatenursprung in den tiefsten Punkt der Seilcurve, die Abscissenaxe horizontal, die Ordinatenaxe vertikal, wie gewöhnlich.

Die Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte ist

$$T = \tau \frac{d s}{d x}. \tag{3}$$

Damit geht die (2) über in

$$\tau \, d\left(\frac{d y}{d x}\right) - (\varkappa \varrho g d s + q \, d x) = 0, \text{ oder } \tau \, d y' = (\varkappa \varrho g \sqrt{1 + y'^2} + q) d x,$$

d. i.

$$\frac{\tau \, d y'}{\varkappa \varrho g \sqrt{1 + y'^2} + q} = d x.$$

Indem wir integrieren, sowie $\varrho g = \gamma$ setzen, wird

$$\tau \int \frac{d y'}{\gamma \varkappa \sqrt{1 + y'^2} + q} = x + C. \tag{4}$$

Da nun die Spannung überall gleich sein soll, so muss sein

$$\frac{T}{\varkappa} = \frac{\tau}{\varkappa_0}, \qquad \text{d. i.} \qquad \varkappa = \frac{\varkappa_0}{\tau} T = \varkappa_0 \frac{d s}{d x} = \varkappa_0 \sqrt{1 + y'^2},$$

wodurch die (4) wird zu

$$\tau \int_0^{\alpha} \frac{d y'}{\gamma \varkappa_0 (1 + y'^2) + q} = x + C. \tag{5}$$

Die Ausführung der Integration giebt

$$\tau \int \frac{d y'}{\gamma \varkappa_0 + q + \gamma \varkappa_0 y'^2} = \frac{\tau}{\gamma \varkappa_0 + q} \int \frac{d y'}{1 + \frac{\gamma \varkappa_0}{g \varkappa_0 + q} y'^2} = \frac{\tau}{m'} \int \frac{d y'}{1 + \frac{n'}{m'} y'^2}$$

$$= \frac{\tau \sqrt{\frac{n'}{m'}}}{m'} \int \frac{d z}{1 + z^2} = \frac{\tau}{\sqrt{m' n'}} arc(tg = z) = \frac{\tau}{\sqrt{m' n'}} arc\left(tg = \sqrt{\frac{n'}{m'}} y'\right),$$

so dass

$$\frac{\tau}{\sqrt{\gamma \varkappa_0 (q + \gamma \varkappa_0)}} arc\left(tg = \frac{\sqrt{\gamma \varkappa_0} y'}{\sqrt{q + \gamma \varkappa_0}}\right) = x + C.$$

Die Coordinaten des tiefsten Punktes sind $x = 0$, $y = 0$, also sind auch x und y' gleichzeitig gleich Null, wodurch $C = 0$ sich ergiebt, und die Gleichung der Curve wird, von dem Bogen zu der Tangente übergehend,

$$d y = \sqrt{\frac{q + \gamma \varkappa_0}{\gamma \varkappa_0}} tg \frac{\sqrt{\gamma \varkappa_0 (q + \gamma \varkappa_0)}}{\tau} x \, d x, \text{ d. i. } d y = m' tg (n' x) d x. \tag{6}$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$y = -\frac{m'}{n'} l (\cos n' x) + C = \frac{m'}{n'} l (\sec b x) + C,$$

$$y = \frac{\tau}{\gamma \varkappa_0} l \left(\sec \frac{\sqrt{\gamma \varkappa_0 (q + \gamma \varkappa_0)}}{\tau} x\right), \tag{7}$$

denn die willkürliche Konstante ist gleich Null, weil für den tiefsten Curvenpunkt x und y gleichzeitig verschwinden.

Die Gleichung der Curve, welche bezüglich der Ordinatenaxe symmetrisch ist, lässt sich mit $\frac{\tau}{\gamma \varkappa_0} = m$, $\frac{\tau}{\sqrt{\gamma \varkappa_0 (q + \gamma \varkappa_0)}} = n$ auf die sehr einfache Form bringen

$$y = m \, l \left(\sec \frac{x}{n}\right). \tag{8}$$

Die Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte kann jetzt mittelst der Gleichungen (3) und (6) dargestellt werden, wir erhalten

$$T = \tau \frac{d s}{d x} = \tau \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2}$$

$$= \frac{\tau}{\gamma \varkappa_0} \sqrt{\gamma^2 \varkappa_0^2 + \gamma \varkappa_0 (q + \gamma \varkappa_0) tg \frac{\gamma \varkappa_0 (q + \gamma \varkappa_0)}{\tau^2} x^2}, \tag{9}$$

$$T = m \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} tg (n^2 x^2)}. \tag{10}$$

Die in den Gleichungen vorkommenden Grössen x_0 und τ, der Querschnitt des Seiles im Scheitel der Curve und die Spannung ebendaselbst sind nur durch gewisse Nebenbedingungen bestimmbar. Soll z. B. das Seil mit $n$facher Sicherheit konstruiert werden und durch einen Punkt (a, b) gehen, dann genügen diese Bedingungen zu Ermittelung von x_0 und τ. Für die Curve muss in diesem Falle auch die Gleichung erfüllt sein

$$b = \frac{\tau}{\gamma x_0} l\left(sec \frac{\sqrt{\gamma x_0 (q + \gamma x_0)}}{\tau} a\right), \quad \text{oder} \quad b = m l\left(sec \frac{a}{n}\right). \tag{11}$$

Bezeichnet F den Festigkeitscoëfficienten, $f = \frac{F}{\nu}$ den Sicherheitscoëfficienten des Seilmateriales, dann muss für die Spannung pro Flächeneinheit eines jeden Querschnittes die Gleichung erfüllt sein

$$\frac{T}{x} = \frac{\tau}{x_0} = \frac{F}{\nu} = f, \qquad \text{womit} \qquad \tau = x_0 f.$$

Durch Substitution dieses Wertes von τ in die Gleichung (11) wird

$$b\frac{\gamma}{f} = l\left(sec \frac{\sqrt{\gamma x_0 (q + \gamma x_0)}}{x_0 f} a\right).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich ein Hilfswinkel ϑ nach der Formel

$$l(sec\,\vartheta) = b\frac{\gamma}{f}, \qquad \vartheta = \frac{\sqrt{\gamma x_0 (q + \gamma x_0)}}{x_0 f} a. \tag{12}$$

Daraus finden wir

$$x_0 = \frac{\frac{q}{\gamma}}{\left(\frac{f\vartheta}{a\gamma}\right)^2 - 1}, \qquad \tau = \frac{\frac{q}{\gamma} f}{\left(\frac{f\vartheta}{a\gamma}\right)^2 - 1}, \tag{13}$$

wodurch der Querschnitt und die Spannung im Scheitel bekannt sind. Auch ist noch

$$m = \frac{f}{\gamma}, \qquad n = \frac{a}{\vartheta}.$$

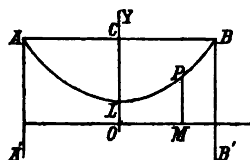
Bezeichnet φ die Horizontalneigung der Curve in einem beliebigen Punkte, dann sind die bei einer Berechnung zu verwendenden Formeln

$$y = m\,l\left(sec \frac{x}{n}\right), \qquad tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} tg \frac{x}{n},$$

$$x = x_0\,sec\,\varphi, \qquad T = x f = x_0 f\,sec\,\varphi.$$

8. u. 9. Duhamel, Analyt. Mechanik.

10. Ein gleichförmiges Seil $A'ALBB'$ ist über zwei Stützen A und B (Fig. 21, S. 61) in derselben horizontalen Linie gelegt, so dass es im Gleichgewichte bleibt. Es ist die Länge des Seiles und die wechsel-



Figur 21.

seitige Entfernung der beiden Stützpunkte gegeben. Welchen Druck haben die Auflagerpunkte auszuhalten?

Es sei L der tiefste Punkt der Curve ALB, OLY eine vertikale Linie durch L, wobei $OL =$ der Länge des Seilstückes ist, dessen Gewicht mit der Spannung bei L übereinstimmt, die Horizontale OX Abscissen-, die Vertikale OY Ordinatenaxe, $OM = x$, $MP = y$.

Mit $OL = c$ ist die Gleichung der Curve ALB

$$y = \frac{1}{2} c(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}), \tag{1}$$

wenn m die Masse des Seiles pro Längeneinheit bedeutet, so ist die Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte P

$$mgy = \frac{1}{2} mcg(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}),$$

folglich wird die Spannung bei B, wenn $AC = BC = a$, gleich sein

$$\frac{1}{2} mcg(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}). \tag{2}$$

Die Spannung in B ist aber gleich dem Gewichte des Seilstückes BB', daher, mit $BB' = s$, gleich mgs, mithin muss sein

$$mgs = \frac{1}{2} mcg(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}), \quad \text{oder} \quad s = \frac{1}{2} c(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}). \tag{3}$$

Nehmen wir die Länge des ganzen Seiles $A'ALBB'$ gleich $2S$, dann ist die Länge des Stückes LBB' gleich S und $S - s$ ist die Länge des Bogens BL. Mithin muss sein

$$S - s = \frac{1}{2} c(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}). \tag{4}$$

Die Addition der Gleichungen (3) und (4) giebt

$$S = ce^{\frac{a}{c}},$$

wobei c von den bekannten Grössen a und S abhängig ist. Bestimmen wir den Wert von c aus dieser letzten Gleichung und setzen ihn in (2) ein, so wird die Spannung in dem Stützpunkte B bekannt.

Die Differentiation der (1) giebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}),$$

wenn ferner Bogen $LP = s'$ gesetzt wird, so ist

$$s' = \frac{1}{2} c(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}), \quad \frac{ds'}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}),$$

folglich

$$\frac{dy}{ds'} = \frac{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}},$$

daher, mit φ den Winkel zwischen der Linie BB' und der Curve BL bei B bezeichnend,

$$\cos\varphi = \frac{e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}}{e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}}. \tag{5}$$

Stellt nun P den Druck auf die Stütze B und T die Spannung des Seiles daselbst dar, dann ist

$$P^2 = 2\,T^2 + 2\,T^2 \cos\varphi = 2\,T^2 (1 + \cos\varphi).$$

demnach mit (2) und (5)

$$P^2 = \frac{1}{2} m^2 c^2 g^2 \left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right)^2 \left\{1 + \frac{e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}}{e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}}\right\},$$

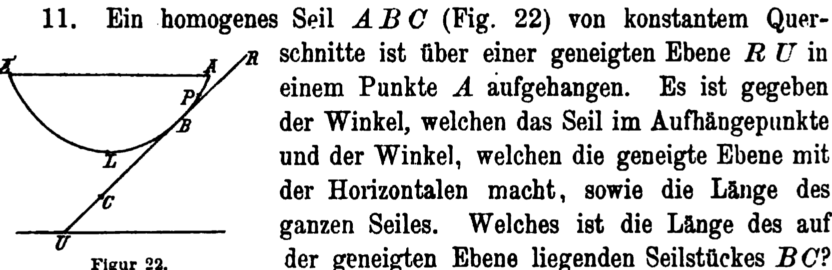
womit der verlangte Wert der Pressung in einem Stützpunkte

$$P = m c g \sqrt{1 + e^{\frac{2a}{c}}}$$

ist.

Walton, p. 124.

11. Ein homogenes Seil ABC (Fig. 22) von konstantem Querschnitte ist über einer geneigten Ebene RU in einem Punkte A aufgehangen. Es ist gegeben der Winkel, welchen das Seil im Aufhängepunkte und der Winkel, welchen die geneigte Ebene mit der Horizontalen macht, sowie die Länge des ganzen Seiles. Welches ist die Länge des auf der geneigten Ebene liegenden Seilstückes BC?



Figur 22.

Es sei $ABLA'$ die Kettenlinie, von welcher AB ein Bogen ist, L ihr tiefster Punkt, P ein beliebiger Punkt in dem Curvenbogen AL, φ die Horizontalneigung der Curve bei P, T die Spannung daselbst; α, β seien die Werte von φ bei A, B. Ferner sei c der Parameter der Curve, m die Masse des Seiles in einem beliebigen Punkte P, $LP = s$, $ABC = S$, $BC = S'$.

Zufolge der Beschaffenheit der Kettenlinie ist

$$T\cos\beta = m c g, \quad (1) \qquad s = c\,tg\,\varphi. \tag{2}$$

Die Spannung bei B ist gleich $m g S' \sin\beta$, folglich, wegen (1),

$$m g S' \sin\beta \cos\beta = m c g, \qquad c = S' \sin\beta \cos\beta. \tag{3}$$

Ferner ist durch (2) $LBA = c\,tg\,\alpha$, $LB = c\,tg\,\beta$, daher

$$S - S' = c\,(tg\,\alpha - tg\,\beta) = S' \sin\beta\cos\beta\,(tg\,\alpha - tg\,\beta) \text{ mit } (3),$$
$$S\cos\alpha = S'(\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta\cos\beta - \sin^2\beta\cos\alpha),$$
$$S\cos\alpha = S'\cos\beta\cos(\alpha-\beta), \qquad \therefore S' = \frac{S\cos\alpha}{\cos\beta\cos(\alpha-\beta)}.$$

Walton, p. 125.

12. Bei einem schweren Seile ändert sich die Dichtigkeit umgekehrt proportional der Länge desselben, gerechnet von einem bestimmten Punkte in ihm. Welches ist die Gleichgewichtsform des Seiles?

Für das Gleichgewicht des Seiles haben wir, wenn α eine Konstante bedeutet, die Bedingungen

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\alpha}{s^2}.$$

Die Integration dieser Gleichungen und die nachherige Elimination von T giebt

$$p = \frac{dy}{dx} = b - \frac{a}{s}, \tag{1}$$

wobei a und b konstante Grössen sind.

Bezeichnet r den Krümmungshalbmesser für einen beliebigen Punkt der Curve, so ist

$$r = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \frac{1+p^2}{\frac{dp}{ds}},$$

daher durch (1)

$$ar = (1+b^2)s^2 - 2abs + a^2.$$

Setzen wir nun $s = s_1 + \mu$ und bestimmen μ so, dass in dem Resultate der Coëfficient der ersten Potenz von s verschwindet, dann ist

$$\mu = \frac{ab}{1+b^2}, \qquad r = \frac{1+b^2}{a}s_1{}^2 + \frac{a}{1+b^2} = \frac{s_1{}^2}{c} + c,$$

worinnen c wieder eine Konstante ist. Bedeutet noch φ den Contingenzwinkel, so haben wir $r = ds_1 : d\varphi$, mithin

$$d\varphi = \frac{c\,ds_1}{c^2 + s_1{}^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt, dabei beachtend, dass $\varphi = 0$, wenn $s_1 = 0$ ist,

$$s_1 = c\,tg\,\varphi.$$

Nun seien x_1, y_1 die auf ein solches Axensystem bezogenen Coordinaten, dass die Tangente parallel zu der Axe der x_1 ist, wenn $\varphi = 0$, dann ist

$$s_1 = c\frac{dy_1}{dx_1} = cp_1, \qquad \sqrt{1+p_1{}^2} = c\frac{dp_1}{dx_1}, \qquad \frac{x_1}{c} + c' = l\left\{p_1 + \sqrt{1+p_1{}^2}\right\},$$

wo c' eine weitere Konstante bedeutet. Der Ursprung des Coordinaten-

systemes sei ein solcher, dass $x_1 = 0$, wenn $p_1 = 0$, dann ist $c' = 0$, und wir erhalten

$$p_1 + \sqrt{1 + p_1{}^2} = e^{\frac{x_1}{c}}, \quad -p_1 + \sqrt{1 + p_1{}^2} = e^{-\frac{x_1}{c}}, \quad 2p_1 = e^{\frac{x_1}{c}} - e^{-\frac{x_1}{c}},$$

folglich

$$y_1 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x_1}{c}} + e^{-\frac{x_1}{c}}\right), \tag{2}$$

den Ursprung des Coordinatensystemes so nehmend, dass $y_1 = c$, wenn $x_1 = 0$ ist.

Wenn $s_1 = 0$, so ist $s = \mu = \frac{a b}{1 + b^2}$, daher mit (1) $p = -\frac{1}{b}$, folglich ist die Axe der Kettenlinie unter einem solchen Winkel γ gegen den Horizont geneigt, für welchen wir die Beziehung haben $\gamma = arc\,(tg = b)$.

Haton de la Goupillière, Nouvelles Annales de Mathématiques, 2me Série, Tom. IX, p. 554. Walton, p. 126.

13. Ein homogenes Seil von konstantem Querschnitte hängt im Gleidhgewichte über zwei glatte Bolzen, welche in einer horizontalen Linie liegen und eine gegebene Entfernung a von einander haben. Welches sind die Tiefen h der Enden des Seiles unter den Bolzen, wenn die Spannung in seinem Mittelpunkte dem Gewichte seines krummlinigen Teiles gleich ist?

$$h = \frac{a\sqrt{5}}{4\,l\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

14. Ein homogener, schwerer Faden von konstantem Querschnitte läuft durch zwei glatte, kleine, auf einem festen, horizontalen Stabe ruhende Ringe. Wenn einer der Ringe fest ist, der andere in irgend einem Punkte des Stabes gehalten wird, zu finden den Ort der Ruhelage jenes Fadenendes, welches das entferntere von dem festgehaltenen Ringe ist.

Es sei S die Länge des Fadens, dann ist mit dem festen Ringe als Coordinatenursprung, horizontaler Abscissen- und vertikaler Ordinatenaxe die Gleichung des verlangten Ortes

$$x = \sqrt{S y}\,.\,l\left(\frac{S}{4\,y}\right).$$

15. AOB (Fig. 19, S. 51) ist ein vollkommen biegsamer, schwerer Faden, er befindet sich in der Ruhelage; die Masse in einem beliebigen Punkte ist direkt proportional dem Cosinus der Horizontalneigung eines Elementes der Curve in diesem Punkte. Welches ist die Gleichgewichtscurve?

$m = \beta \frac{dx}{ds}$ nehmend, wobei β eine konstante Grösse bedeutet, finden wir als Gleichung der Curve

$$x^2 = \frac{2\,\tau}{\beta\,g}\,y,$$

welches zeigt, dass die Seilcurve eine gemeine Parabel ist.

Jakob Bernoulli, Acta Erudit, Lips. Jun., Opera, Tom. I, p. 449.
Johann Bernoulli, Opera, Tom. III, p. 501.

16. Man soll die Gleichung der Kettenlinie finden, wenn die Masse des Seiles von Punkt zu Punkt sich wie $x \cos\varphi$ ändert, wo φ die Horizontalneigung eines Curvenelementes bezeichnet.

$m = \beta x \frac{dx}{ds}$ nehmend, ergiebt sich als verlangte Gleichung

$$6 \tau y = g \beta x^3,$$

welche der kubischen Parabel angehört.

Jakob Bernoulli, ib. Johann Bernoulli, ib.

17. Zu finden die Gleichung der Kettenlinie, wenn die Masse des Fadens in einem beliebigen Punkte direkt proportional $\sqrt{x} \cos\varphi$ ist.

$m = \beta \sqrt{x} \frac{dx}{ds}$ nehmend, ergiebt sich die Gleichung

$$16 g^2 \beta^2 x^5 = 225 \tau^2 y^2.$$

Jakob Bernoulli, ib. Johann Bernoulli, ib.

18. Bestimme die Gleichung der Kettenlinie, wenn die Masse des Fadens in einem beliebigen Punkte direkt proportional $y^n \sin\varphi$ ist, wobei n eine beliebige positive Grösse bedeutet. Wird der Ursprung des Coordinatensystemes so gewählt, dass die Axe der x durch den tiefsten Punkt der Seilcurve läuft und dass $y = \infty$, wenn $x = 0$ ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$x y^n = -\frac{(n+1)\tau}{n g \beta}.$$

Jakob Bernoulli, ib. Johann Bernoulli, ib.

19. Bestimme die Masse in einem beliebigen Punkte eines Fadens, welcher eine gemeine Parabel zur Curve hat, deren Parameter a ist.

$$m = \frac{2\tau}{g\sqrt{a^2 + 4x^2}}.$$

Johann Bernoulli, Opera, Tom. III, p. 504.

20. Ein mit seinen äussersten Enden an zwei in derselben horizontalen Linie liegenden Bolzen aufgehangener Faden bildet durch sich selbst eine Cycloide. Welches ist die Masse in einem beliebigen Punkte des Fadens? Welches ist das Gewicht des Bogens zwischen diesem und dem tiefsten Punkte?

Es sei G das Gewicht des Bogens, die Cycloide durch die Gleichungen gegeben $x = a(\varphi + \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$, dann wird gefunden werden

$$m = \frac{\tau \sec^3 \frac{\varphi}{2}}{4ag}, \qquad G = \tau \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

21. Das eine Ende A eines gleichförmigen Fadens ist an einen festen Punkt A gefesselt, das andere ist an einem Gewichte befestigt, welches auf eine rauhe, durch A gehende horizontale Ebene gelegt ist, und der Faden hängt durch einen Schlitz in der horizontalen Ebene. Man soll den grössten Abstand des Gewichtes von A bestimmen, bei welchem Gleichgewicht möglich sein kann.

Wenn s die Länge des Fadens, x der grösste Abstand des Gewichtes von A, μ der Reibungscoëfficient und n das zweifache Verhältnis zwischen dem gegebenen Gewichte und dem Gewichte des Fadens ist, so wird man finden

$$e^{\frac{x}{a}} = \left\{ \frac{1 + [1 + \mu^2(1+n^2)]^{\frac{1}{2}}}{\mu(1+n)} \right\}^{\mu(1+n)}$$

22. Ein gleichförmiges Seil ist an zwei Bolzen, welche in einer horizontalen Linie liegen, mit seinen Enden aufgehangen. Die Länge des Seiles soll so bestimmt werden, dass der Druck auf die um die Strecke $2a$ von einander entfernten Bolzen ein Minimum ist.

Bezeichnet c den Parameter der Seilcurve, s die verlangte Seillänge, so wird gefunden werden

$$e^{\frac{a}{c}} = \left(\frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{a}{c}-1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad s = c\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right).$$

Durch die erste Gleichung lässt sich $\frac{a}{c}$ bestimmen, sodann ist s mittelst der zweiten zu berechnen. Wenn z. B. $2a = 10$ Meter, dann ist annähernd $c = 4{\cdot}168$ Meter, $s = 12{\cdot}578$ Meter.

Diarian Repository, p. 644.

23. Ein schwerer Faden hängt in der Gestalt einer Curve, deren Gleichung $a^3 y = x^4$ ist. Bestimme den Curvenpunkt, in welchem die Masse ein Maximum ist, und diesen Maximalwert.

Sind x, y die Coordinaten dieses Punktes und ist m das verlangte Maximum, so wird gefunden werden

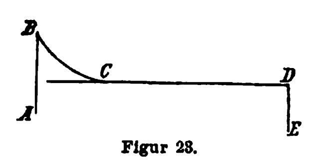
$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{1}{4}a, \qquad m = 2\sqrt{3}\,\frac{\tau}{ag}.$$

Das Gesetz, nach welchem sich die Masse dieses Fadens ändert, ist irrtümlich untersucht worden in „The Ladys and Gentlemans Diary for the year 1745." Siehe auch: Diarian Repository, p. 435.

24. Ein gleichförmiger Faden von der Länge $2S$ ist an zwei Punkten mit dem wechselseitigen Abstand $2a$ in derselben horizontalen Linie aufgehangen. Welches ist die Gleichung zur Bestimmung der Horizontalneigung α der Curve in einem der Aufhängepunkte?

$$a = S\,cotg\,\alpha\,.\,l\left(tg\,\frac{\pi + 2\alpha}{4}\right).$$

25. Ein homogenes Seil konstanten Querschnittes $ABCDE$ (Fig. 23) läuft über eine glatte Rolle B, die Teile BA, DE hängen frei, der Teil CD ruht auf einem glatten, horizontalen Tische. CD ist die halbe Länge des ganzen Seiles, $AB = 2\,.\,DE$. Vergleiche die Länge des Seiles mit der Höhe von B über CD.



Figur 23.

Das verlangte Verhältnis ist gleich $2(3+\sqrt{3})$.

26. Ein Seil von veränderlicher Dicke hängt in der Gestalt einer Curve mit der Gleichung $y = b\,l\left(sec\,\frac{x}{b}\right)$, wobei die Abscissenaxe horizontal ist. Welches ist das Änderungsgesetz der Dicke und der Spannung?

Die Spannung des Seiles an einer beliebigen Stelle ist direkt proportional seinem Querschnitte daselbst und letzterer direkt proportional $sec\,\frac{x}{b}$.

27. Die Masse eines Seiles ist so verteilt, dass — wenn es mit seinen Enden an zwei Punkten aufgehangen ist — die Spannung wie die Dichtigkeit wechselt. Welches ist die Gleichung seiner Gleichgewichtscurve?

Es sei der tiefste Curvenpunkt Coordinatenursprung, die Axe der x Tangente in diesem Punkte, c eine Konstante, dann ist die verlangte Gleichung

$$y = c\,l\left(\sec \frac{x}{c}\right).$$

28. Ein homogenes Seil von konstanter Dicke und der Länge S hängt über zwei festen Punkten, die in einer horizontalen Linie liegen. An seinem Mittelpunkte ist mit dem einen Ende ein anderes ebensolches Seil von der Länge S' angehangen. Jede der zwei Tangenten an das erste Seil in seinem Mittelpunkte macht mit der Vertikalen den Winkel ϑ. Welches ist der wechselseitige Abstand a der beiden festen Punkte? Zeige, dass ϑ niemals einen gewissen Wert überschreiten kann.

$$a = S' \, tg\,\vartheta . l\left(\frac{S+S'}{S'} \frac{tg\frac{\vartheta}{2}}{tg\,\vartheta}\right).$$

Der Wert von ϑ kann niemals den durch die Gleichung $tg^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{S-S'}{S+S'}$ gegebenen überschreiten.

29. Ein Seil von variabler Dichtigkeit hängt von zwei festen Punkten in Gestalt der Curve $s = f(\varphi)$ herab. Der Coordinatenursprung befindet sich in dem tiefsten Curvenpunkte und φ ist die Vertikalneigung der Curve in einem beliebigen Punkte. Welches ist das Dichtigkeitsgesetz?

Die Dichtigkeit ist umgekehrt proportional dem Produkte $\sin^2\varphi . f'(\varphi)$.

30. Ein Seil von veränderlicher Dicke aber durchaus von demselben Material hängt von zwei festen Punkten herab. Welches ist das Gesetz der Dicke, welches die Gestalt der Curve, wenn die Spannung in den einzelnen Punkten des Seiles sich wie seine Dicke ändert?

Wähle den tiefsten Curvenpunkt als Coordinatenursprung, die Axe der x horizontal, diejenige der y vertikal. s sei die Länge eines gleichförmigen Seiles, dessen Dicke gleich derjenigen im tiefsten Punkte des gegebenen Seiles und dessen Gewicht gleich demjenigen einer Bogenlänge vom tiefsten Punkte bis zum Punkte (x, y) ist; endlich sei c die Länge eines gleichförmigen Seiles von der Dicke im tiefsten Punkte des ersten Seiles und von einem Gewichte gleich der Spannung daselbst. Ist noch $\varkappa_0$ der Querschnitt im tiefsten Punkte, $\varkappa$ derjenige im Punkte (x, y) des gegebenen Seiles, so findet sich

$$\varkappa_0 = \frac{\varkappa}{c}(c^2 + s^2), \quad y = c\,l\left(\frac{\sqrt{c^2+s^2}}{c}\right), \quad s = c\,tg\,\frac{x}{c}.$$

Sir Davies Gilbert, Philosophical Transactions for 1826.

13—30. Walton, p. 128—133.

31. Die Enden einer gleichförmigen Kette sind an zwei in einer horizontalen Linie liegende, feste Punkte A, B gefesselt. Ein Glied C dieser Kette bleibt auf einem geradlinigen Drahte, welcher A und B verbindet, so dass die Kette zwei Festons AC und BC bildet. Beweise unter Vernachlässigung der Reibung, dass der kleinere dieser Festons kongruent einem Teile des grösseren ist.

32. Die Enden eines gleichförmigen Seiles von der Länge $2S$ sind an zwei feste Punkte in einer horizontalen Linie gefesselt. Wenn $2a$ der wechselseitige Abstand der Aufhängepunkte ist, T, c die respektiven Seillängen, deren Gewichte die Spannungen in einem der beiden Aufhängepunkte und im tiefsten Punkte des Seiles repräsentieren, beweise, dass — wenn S einen solchen Wert besitzt, welcher T zu einem Minimum macht — sein muss

$$cT = aS.$$

33. Bei einem an zwei festen Punkten aufgehangenen Seile ändert sich die Dichtigkeit von Punkt zu Punkt wie die Spannung in diesen Punkten. Welche Gleichgewichtsform besitzt das Seil, wenn seine Dicke konstant ist?

Mit dem tiefsten Punkte als Coordinatenanfang und horizontaler Abscissenaxe ist die verlangte Gleichung, unter c eine Konstante verstanden,

$$e^{\frac{y}{c}} = sec\frac{x}{c}.$$

31—33. Walton, p. 202.

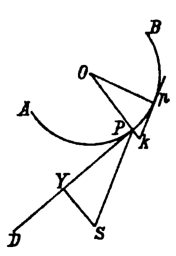
34. Ein vollkommen biegsamer Faden mit vereinigten Enden hängt über zwei in einer horizontalen Linie festen Bolzen in Gestalt zweier Festons. Wenn P, P' die Spannungen in den Scheiteln der Festons, α, α' die Horizontalneigungen der Festons an jedem Bolzen sind, beweise, dass das Gewicht des halben Fadens gleich $P tg\,\alpha + P' tg\,\alpha'$ ist. Beweise auch, dass das Gewicht des Fadenteiles von der Länge gleich dem Abstande zwischen dem Scheitel der Festons gleich $P \quad P'$ ist.

Walton, p. 203.

Dritter Abschnitt.

Gleichgewicht freier, unausdehnbarer Fäden unter der Wirkung von Centralkräften.

1. Bestimmung der Gleichung der Curve, welche im Gleichgewichtszustande ein vollkommen biegsamer, unausdehnbarer Faden bildet, wenn auf ihn irgend eine Centralkraft wirkt.



Figur 24.

Es sei AB (Fig. 24) ein beliebiger Teil des Fadens, S das Centrum der anziehenden Kraft, P ein beliebiger Punkt in dem Faden, PD die Tangente an den Faden in diesem Punkte, p ein Punkt des Fadens sehr nahe bei P, pk die Tangente in p an AB. Ferner seien OP, Op die Curvennormalen zu P, p, welche sich in dem Krümmungsmittelpunkte O von Pp schneiden, so dass OP der Krümmungshalbmesser zu P ist; die Verlängerung von OP schneidet die Tangente pk in k. Wir setzen $OP = \varrho$, $SP = r$, $SY \perp PD = p$, $\sphericalangle SPD = \varphi$, $\sphericalangle kOp = \psi$, $m =$ der Masse des Fadens bei P, $T =$ der Spannung in P, $T + dT =$ derjenigen in p, $Pp = ds$, $F =$ der Centralkraft in P.

Die an dem Fadenelemente $Pp = ds$ wirkenden Kräfte sind T,

$T + dT$ und F. Diese Kräfte zerlegen wir in normaler und paralleler Richtung zu PD, so dass die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$F m\, ds \sin\varphi = (T + dT)\cos \sphericalangle pkO = (T + dT)\sin\psi,$$

oder, indem wir nur unendlich kleine Grössen erster Ordnung beibehalten,

$$F m\, ds \sin\varphi = T\psi = T\frac{ds}{\varrho},$$

daher

$$F m \sin\varphi = \frac{T}{\varrho}, \tag{a}$$

$$F m\, ds \cos\varphi = (T + dT)\sin \sphericalangle pkO - T = (T + dT)\cos\psi - T,$$

oder, indem wir wieder nur die Infinitesimalen erster Ordnung beibehalten,

$$F m\, ds \cos\varphi = dT,$$

daher, weil $ds \cos\varphi = dr$ ist,

$$F m\, dr = dT. \tag{b}$$

Durch die Gleichung (a) ergiebt sich, wegen $\varrho = -r\frac{dr}{dp}$, $\sin\varphi = \frac{p}{r}$,

$$F m\, dr + \frac{dp}{p} T = 0,$$

so dass, wenn wir (b) in Erwägung ziehen,

$$\frac{dp}{p} + \frac{dT}{T} = 0, \quad l(p) + l(T) = l(C), \quad l(Tp) = l(C),$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet. Mithin erhalten wir

$$p = \frac{C}{T} = \frac{C}{\int F m\, dr}, \tag{c}$$

welches die Gleichung der Fadencurve in p und r bei gegebenem Ausdrucke für F ist.

Bezeichnen wir ferner mit ϑ den Winkel zwischen dem Strahle SP und irgend einer festen Geraden in der Ebene der Fadencurve, dann haben wir für die Länge des Perpendikels p die Relation

$$p = \frac{r^2\, d\vartheta}{\sqrt{dr^2 + r^2\, d\vartheta^2}},$$

mithin ist, wenn $\int F m\, dr = R$ gesetzt wird, durch (c)

$$R r^2\, d\vartheta = C\sqrt{dr^2 + r^2\, d\vartheta^2},$$

$$d\vartheta = \frac{C\, dr}{r\sqrt{R^2 r^2 - C^2}}. \tag{d}$$

Dieses ist die Differentialgleichung der Fadencurve zwischen r und ϑ.

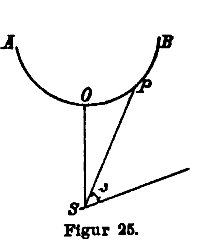
Die hier gegebene Lösung stimmt überein mit derjenigen von Johann Bernoulli (Opera, Tom. IV, p. 238).

Der Wert der Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte folgt aus der Gleichung (b), wenn F als Funktion von r bekannt ist.

Die Resultate, zu denen wir gelangt sind, können auch aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für eine Seilcurve abgeleitet werden. Die Methode der tangentialen und normalen Kräftezerlegung ist indessen für den Fall von Centralkräften bequemer.

Wenn die Centralkraft abstossend, anstatt anziehend wirkt, so haben wir in den obigen Formeln nur F durch $-F$ zu ersetzen.

2. Auf einen homogenen Faden von konstantem Querschnitte wirkt eine Attraktionskraft, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ist. Welches ist die Gleichgewichtscurve des Fadens?



Figur 25.

Es sei AOB (Fig. 25) die Fadencurve, S das Kraftcentrum, SO der die Curve unter rechtem Winkel treffende Fahrstrahl, SP ein beliebiger Radiusvektor, τ die Spannung bei O, $SO = c$, μ die Attraktion in der Distanz c.

Hier haben wir

$$R = \int F m\, dr = \int \mu \frac{c^2}{r^2} m\, dr = C' - \frac{\mu m c^2}{r},$$

aber nach 1, (b) ist $T = R$, demnach $\tau = C' - \mu m c$, so dass

$$T = R = \tau + \mu m c\left(1 - \frac{c}{r}\right). \tag{1}$$

Nun erhalten wir mit 1, (d)

$$d\vartheta = \frac{C\, dr}{r\left\{\left(\tau + \mu m c - \frac{\mu m c^2}{r}\right)^2 r^2 - C^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Nach 1, (c) ist wegen $p = c$ und $T = \tau$ für den Punkt O die Konstante $C = c\tau$, daher

$$d\vartheta = \frac{c\tau\, dr}{r\left\{\left(\tau + \mu m c - \frac{\mu m c^2}{r}\right)^2 r^2 - c^2\tau^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzen wir zur Vereinfachung $\tau = n\mu m c$, so wird

$$d\vartheta = \frac{n c\, dr}{r\left\{(n+1)^2 r^2 - 2(n+1)cr + c^2 - n^2c^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Gleichung der Fadencurve, welche aus der Integration dieser Relation hervorgeht, besitzt drei verschiedene Formen, je nachdem $n \gtreqless 1$ ist.

1) $n > 1$. Das Integral der Differentialgleichung ist mit $\vartheta = 0$ für $r = c$

$$r = \frac{(n-1)\,c}{n\cos\left(\sqrt{n^2-1}\,\frac{\vartheta}{n}\right) - 1}. \tag{2}$$

2) $n = 1$. Unter derselben Voraussetzung erhalten wir

$$r = \frac{c}{1-\vartheta^2}. \tag{3}$$

3) $n < 1$. Bei derselben Annahme ist

$$e^{\sqrt{1-n^2}\,\frac{\vartheta}{n}} + e^{-\sqrt{1-n^2}\,\frac{\vartheta}{n}} = \frac{2}{n\,r}\left\{r - (1-n)\,c\right\}. \tag{4}$$

Ferner ergiebt sich mit 1, (c), weil $C = c\,\tau$ ist,

$$p = \frac{c\,\tau}{T},$$

daher, wegen (a),

$$p = \frac{c\,\tau}{\tau + \mu\,m\,c - \frac{\mu\,m\,c^2}{r}} = \frac{n\,c}{n+1-\frac{c}{r}},$$

folglich bekommen wir mit $r = \infty$ als Perpendikellänge $p = \frac{n\,c}{n+1}$, was zeigt, dass die drei Fadencurven, welche den drei Werten von $n \gtreqless 1$ entsprechen, dieselben Asymptoten besitzen, die innerhalb einer Entfernung $\frac{n\,c}{n+1}$ von dem Kraftcentrum laufen. Setzen wir noch in (2), (3), (4) $r = \infty$, so ergiebt sich für die Neigungen der beiden Asymptoten einer jeden Curve gegen den Fahrstrahl SO

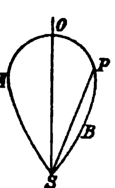
$$\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\,arc\left(cos = \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}\,l\,\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}.$$

Johann Bernoulli, Opera, Tom. IV, p. 240.
Whewell's Mechanics, 3rd. edit., p. 183.

3. Man soll die Gleichung der Gleichgewichtscurve eines gleichförmigen Fadens AOB (Fig. 25, S. 70) finden, wenn sich die Intensität der von dem Centrum S ausgehenden Attraktionskraft wie die n^{te} Potenz der Entfernung verhält und die Spannung in O gleich dem $(n+1)^{ten}$ Teile des Gewichtes eines Fadenstückes von der Länge OS ist, wobei angenommen wird, dass auf jedes Fadenelement eine konstante Kraft wirkt, welche derjenigen in O gleich und nach S gerichtet ist.

Mit Beibehaltung der Bezeichnungen unter 2 ergiebt sich für die Fadenlinie die Gleichung

$$\left(\frac{c}{r}\right)^{n+2} = cos\,(n+2)\,\vartheta.$$



Figur 26.

4. Die Gleichung der Gleichgewichtscurve eines Fadens $SAOB$ (Fig. 26) von konstantem Querschnitte zu finden, wenn seine Enden in dem Centrum S einer Repulsivkraft befestigt sind, deren Intensität sich umgekehrt wie die n^{te} Potenz der Entfernung verhält, die Spannung bei O gleich dem $(n-1)^{ten}$ Teile des Gewichtes eines Fadenstückes von der Länge OS ist, wobei jedes Element dieser Länge von einer konstanten Kraft beansprucht gedacht ist, welche derjenigen von S auf O gleich ist.

$$\left(\frac{r}{c}\right)^{n-2} = \cos(n-2)\vartheta.$$

1—4. Walton, p. 133—138.

Vierter Abschnitt.

Der über eine Fläche gespannte, vollkommen biegsame, unausdehnbare Faden.

1. Ein vollkommen biegsamer, unausdehnbarer Faden ruht unter der Wirkung beliebiger Kräfte auf einer glatten Fläche. Welches ist die Form des Fadens?

Es sei R die Reaktion der Fläche in dem beliebigen Punkte (x, y, z) des Fadens, T die Spannung des Fadens daselbst, $u = f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche. Damit erhalten wir, wenn λ einen gewissen Coëfficienten, m die zu dem Punkte (x, y, z) gehörige Fadenmasse bedeutet, die drei Bedingungen

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + mX + \lambda R\frac{du}{dx} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + mY + \lambda R\frac{du}{dy} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + mZ + \lambda R\frac{du}{dz} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0. \tag{4}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt durch Elimination von $\frac{dT}{ds}$ und λR, indem wir übers Kreuz multiplizieren,

$$\left.\begin{aligned} 0 = \left(mX + T\frac{d^2x}{ds^2}\right)\left(\frac{dy}{ds}\frac{du}{dz} - \frac{dz}{ds}\frac{du}{dy}\right) \\ + \left(mY + T\frac{d^2y}{ds^2}\right)\left(\frac{dz}{ds}\frac{du}{dx} - \frac{dx}{ds}\frac{du}{dz}\right) \\ + \left(mZ + T\frac{d^2z}{ds^2}\right)\left(\frac{dx}{ds}\frac{du}{dy} - \frac{dy}{ds}\frac{du}{dx}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Aber mit (1), (2), (3) und (4) ergiebt sich

$$0 = dx \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + dy \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + dz \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)$$
$$+ m(X dx + Y dy + Z dz),$$

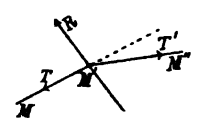
daher

$$0 = dT + m(X dx + Y dy + Z dz). \tag{6}$$

Die Gleichungen (5) und (6) bestimmen in Verbindung mit der Gleichung der Fläche die Gestalt des Fadens.

Eine sehr elegante Lösung dieses Problemes, welche sich in der Theorie der Bewegung etc. von Schell vorfindet, ist die folgende.

Ist ein vollkommen biegsamer Faden durch zwei Kräfte P und Q über eine Fläche hingespannt, so lässt sich derselbe als ein Seilpolygon von unendlich kleinen, unendlich vielen Seiten ansehen, an dessen Knotenpunkten die Widerstände der Fläche in zu ihr normaler Richtung thätig sind. Denken wir uns aus diesem Polygone zwei aneinander stossende Elemente herausgenommen, welches die unendlich kleinen Strecken MM', $M'M''$ (Fig. 27) sein mögen, so wirken an denselben die Spannungen T und T' in ihren Richtungen und der Normalwiderstand R am Knoten, welche drei Kräfte im Gleichgewichte sein müssen. Damit dieses der Fall ist, müssen die Richtungen dieser drei Kräfte in einer Ebene liegen, oder — was dasselbe ist — die Richtungen der zwei Tangenten in zwei aufeinander folgenden Punkten der Fadencurve und die Flächennormale müssen in eine Ebene hineinfallen. Die Ebene dieser Tangenten ist aber die Schmiegungsebene der Fadencurve, es muss diese daher die Normale der Fläche enthalten, oder ihr Krümmungshalbmesser muss die Richtung der Normalen besitzen, welches die Eigenschaft der kürzesten Linie auf der Fläche ist. Daher ist ein zwischen zwei Punkten über eine Fläche hingespannter Faden im Gleichgewichte, wenn er überall mit der kürzesten Linie der Fläche zwischen diesen zwei Punkten zusammenfällt.



Figur 27.

Für die Spannungen T und T' besteht die Beziehung $\frac{T}{\sin \widehat{T'R}} = \frac{T'}{\sin \widehat{TR}}$.
Der Winkel zwischen den beiden Tangenten ist unendlich klein, die Normale der Fläche ist senkrecht zu der Tangente jeder auf ihr gezogenen Curve durch den Flächenpunkt derselben, folglich sind die Winkel $\widehat{T'R}$ und $\widehat{TR}$ nur unendlich wenig von $\frac{\pi}{2}$ verschieden, so dass $T' = T$ ist. Daher ist die Spannung des Fadens in je zwei aufeinander folgenden Curvenelementen gleich gross, konstant, also auch durchweg den Faden konstant, sonach müssen auch die Kräfte P und Q, welche den Faden über die

Fläche hinspannen, einander gleich sein und in den Richtungen der Tangenten der Fadencurve wirken, da sie den Endspannungen gleich sein müssen, wenn Gleichgewicht sein soll. Für den Normaldruck R des Fadens auf die Fläche an einer bestimmten Stelle besteht das Verhältnis $R : \sin \measuredangle\, M M' M'' = T : \sin \widehat{T' R}$. Nun ist im Grenzfalle der Winkel $M M' M''$ das Supplement des Contingenzwinkels $d\alpha$ und $\sin \widehat{T' R} = 1$, folglich ist $R = T\, d\alpha$, oder, weil der Krümmungshalbmesser r im Punkte M durch die Relation gegeben ist $r = \frac{ds}{d\alpha}$, $R = \frac{T}{r} ds = \frac{P}{r} ds = \frac{Q}{r} ds$. Daraus lässt sich erkennen, dass der Druck des Fadens an jeder Stelle unendlich klein, proportional der Krümmung daselbst und proportional der Intensität der beiden gleichen Kräfte ist, welche den Faden über die Fläche hinspannen. Ist die Krümmung der Fläche überall dieselbe, so ist auch der Druck derselbe. Ein über eine Kugelfläche hinweggespannter Faden hat die Form eines Kreisbogens, weil dieser die kürzeste Linie auf der Kugelfläche ist, der Druck ist überall derselbe, weil der Krümmungshalbmesser konstant, gleich dem Kugelradius ist. Der über einen Kreiscylinder hinweggespannte Faden nimmt die Gestalt einer gemeinen Schraubenlinie an, der Druck ist überall derselbe, denn der Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie ist konstant. Bezeichnet a den Cylinderradius, α den Winkel, welchen die Tangente der Curve mit der Erzeugungslinie des Cylinders einschliesst, so ist $r = \frac{a}{\sin^2 \alpha}$, folglich $R = \frac{P}{a} ds \sin^2 \alpha$. Mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird dieser Druck zu einem Maximum, also dann, wenn der Faden in einer zur Cylinderaxe senkrechten Ebene liegt, wenn er die Form eines Kreisbogens annimmt. Mit $\alpha = 0$ wird $R = 0$, d. h. der Druck ist Null, wenn der Faden längs einer Erzeugungslinie des Cylinders gespannt wird.

Denken wir uns die Fläche hinweg, so bleibt Gleichgewicht bestehen, wenn in allen Punkten Kräfte $\frac{P}{r} ds$ in der Richtung der Hauptnormalen der Fadencurve angebracht werden, welche in der Richtung vom Krümmungsmittelpunkte nach dem Curvenpunkte hin wirken. Wird also ein Faden durch Kräfte $F ds$ im Gleichgewichte erhalten, die in der Richtung der Normalen wirken, so ist F umgekehrt proportional dem Krümmungsradius der Fadencurve veränderlich, die Spannung ist in allen Elementen dieselbe, nämlich $F r ds$.

Zu denselben Resultaten können wir auch durch direkte Rechnung gelangen, indem wir von den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen ausgehen. was der Studierende zur selbständigen Übung thun mag.

2. Ein vollkommen biegsamer, schwerer Faden ab (Figur 28) ruht auf dem Bogen einer ebenen Curve APB in einer vertikalen Ebene. Welches ist die Spannung des Fadens und der Druck auf die Curve an einer beliebigen Stelle?

Figur 28.

Es seien P, p zwei unendlich nahe gelegene Curvenpunkte, PO, pO die Curvennormalen zu diesen Punkten, so dass O der Krümmungsmittelpunkt. Ferner seien aX, aY die Coordinatenaxen in der Ebene der Curve, erstere horizontal, letztere vertikal angenommen. Weiter sei Bogen $aP = s$, $Pp = ds$, $T =$ der Spannung in P, $T + dT =$ derjenigen in p, $m =$ der zu einem beliebigen Punkte gehörigen Masse des Fadens, $R =$ dem Drucke auf die Curve bei P, $\sphericalangle POp = \varphi$, $PO = r$.

Für den Gleichgewichtszustand müssen, wenn wir die an dem Elemente ds wirkenden Kräfte in paralleler und senkrechter Richtung zu der Tangente im Punkte P zerlegen, die Bedingungen erfüllt sein

$$(T + dT)\cos\varphi - T = mg\,ds\frac{dy}{ds}, \tag{1}$$

$$mg\,ds\frac{dx}{ds} + (T + dT)\sin\varphi = R\,ds. \tag{2}$$

Mit (1) ergiebt sich, wenn wir die Differentiale höherer Ordnung als der ersten vernachlässigen und beachten, dass $T = 0$, wenn $y = 0$ ist,

$$dT = mg\,dy, \qquad T = mgy. \tag{3}$$

womit die Spannung in einem beliebigen Punkte des Fadens bestimmt ist.

Die (2) giebt, unter denselben Verhältnissen,

$$mg\frac{dx}{ds} + T\frac{\varphi}{ds} = R,$$

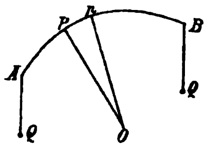
da aber $\frac{\varphi}{ds} = \frac{1}{r}$ ist, so erhalten wir für den Druck auf die Curve in einem beliebigen Punkte

$$R = mg\frac{dx}{ds} + \frac{T}{r} = mg\left(\frac{dx}{ds} + \frac{y}{r}\right). \tag{4}$$

Walton, p. 138.

3. An den beiden Enden eines über eine in einer vertikalen Ebene befindlichen Curve gelegten, vollkommen biegsamen, gewichtslosen Fadens sind zwei Gewichte Q, Q angehangen. Welches ist der Druck auf die Curve an einer beliebigen Stelle?

Es sei APB (Fig. 29, S. 76) die Curve, OP, Op seien die Normalen



Figur 29.

zwei aufeinander folgenden Curvenpunkten P, p; ϑ sei die Neigung von OP zu einer gewissen in der Ebene der Curve gelegenen Linie, $\measuredangle\, POp = d\vartheta$, $OP = r$, Bogen $AP = s$, $Pp = ds$, $p =$ dem Drucke im Punkte P, $T =$ der Spannung des Fadens bei P, $T + dT =$ derjenigen bei p.

Damit erhalten wir für das Gleichgewicht des Fadenelementes Pp durch Zerlegung der Kräfte T, $T + dT$, p in senkrechter und paralleler Richtung zu der Tangente in P

$$(T + dT)\sin d\vartheta = p\,ds = p\,r\,d\vartheta, \quad (1) \qquad (T + dT)\cos d\vartheta - T = 0. \quad (2)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn wir nur die Differentiale der ersten Ordnung beibehalten,

$$T d\vartheta = p\,r\,d\vartheta, \quad T = p\,r, \quad (3) \qquad dT = 0, \quad T = C. \quad (4)$$

In A ist offenbar die Spannung gleich dem Gewichte Q, folglich $T = Q$, mithin wegen (3)

$$Q = p\,r, \qquad p = \frac{Q}{r}.$$

Der ganze Druck auf die Curve ist demnach gleich

$$\int p\,ds = Q\int\frac{ds}{r} = Q\int_{\vartheta'}^{\vartheta''} d\vartheta = Q(\vartheta'' - \vartheta'), \quad (5)$$

wenn die Tangenten in den Punkten, wo der Faden die Curve verlässt, vertikal sind, haben wir πQ für die ganze Pressung auf die Curve, sind dieselben nicht vertikal, dann sind natürlich in den Punkten A und B zu der Pressung auf die Curve noch Pressungen hinzuzufügen.

Euler, Nov. Comment. Petrop. 1775, p. 307. Prisson, Traîté de Mécanique, Tom. I, ch. 3. Walton, p. 139.

4. Über eine in einer vertikalen Ebene liegende rauhe Curve ist ein vollkommen biegsamer, gewichtsloser Faden gelegt, an dessen Enden zwei Gewichte P, Q hängen, von denen Q so viel grösser als P ist, dass sich das System gerade im Gleichgewichte befindet (Fig. 30.). Welches ist das Verhältnis $P : Q$, sowie der auf die Curve ausgeübte Druck?

Figur 30.

Es bezeichne μ den Reibungscoëfficienten und die übrigen Benennungen seien dieselben wie unter 3.

Der Reibungswiderstand an dem Fadenelemente Pp ist $\mu p\,ds$, er wirkt annähernd in der Richtung der Tangente im Punkte P. Mit derselben Kräftezerlegung wie vorhin sind die Gleichgewichtsbedingungen

$$(T + dT)\sin d\vartheta = p\,ds = p\,r\,d\vartheta, \quad (1) \qquad (T + dT)\cos d\vartheta - T + \mu p\,ds = 0. \quad (2)$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$T\,d\vartheta = p\,r\,d\vartheta, \qquad T = p\,r. \tag{3}$$

$$d\,T + \mu\,p\,d\,s = 0, \quad d\,T + \mu\frac{T}{r}\,d\,s = 0 \text{ mit (1),}$$

und, indem wir integrieren,

$$l(T) - \mu\int\frac{d\,s}{r} = -\mu\int d\,\vartheta = C - \mu\,\vartheta, \tag{4}$$

mithin ist, da die Werte von T bei A und B gleich P und Q sind,

$$l(P) = C - \mu\,\vartheta_1, \qquad l(Q) = C - \mu\,\vartheta_2, \tag{5}$$

daher

$$l\left(\frac{P}{Q}\right) = \mu\,(\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad \frac{P}{Q} = e^{\mu(\vartheta_2 - \vartheta_1)}. \tag{6}$$

Die (6) giebt das Verhältnis zwischen P und Q unter den Umständen des Problemes. Weiter erhalten wir mit (4) und (5)

$$l\left(\frac{T}{Q}\right) = \mu\,(\vartheta_2 - \vartheta), \qquad T = Q\,e^{\mu(\vartheta_2 - \vartheta)}, \tag{7}$$

folglich ist der ganze Druck auf die Curve $A\,B$

$$\int p\,d\,s = \int\frac{d\,s}{r}\,T = \int T\,d\,\vartheta = Q\int e^{\mu(\vartheta_2 - \vartheta)}\,d\,\vartheta = C - \frac{Q}{\mu}\,e^{\mu(\vartheta_2 - \vartheta)},$$

aber für $\vartheta = \vartheta_1$ ist dieser Druck offenbar gleich Null, folglich ist $C = \frac{Q}{\mu}\,e^{\mu(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$, mithin ist die ganze Pressung von ϑ_1 bis ϑ_2 gleich

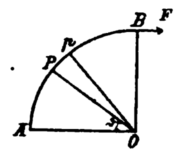
$$\frac{Q}{\mu}\left\{e^{\mu(\vartheta_2 - \vartheta_1)} - 1\right\}.$$

Zu diesem Drucke auf die Curve von A bis B sind noch die Pressungen in den Endpunkten A und B zu addieren.

Wenn die Curve ein Halbkreis ist, so haben wir $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \pi$, folglich $P : Q = e^{\mu\pi}$.

Euler, Nov. Comment. Petrop. 1775, p. 316. Poisson, Traîté de Mécanique, Tom. I, ch. 3. Walton, p. 140.

5. Auf der Curve eines Kreisquadranten mit vertikaler Ebene, von welchem einer der beiden äussersten Halbmesser horizontal ist, liegt ein vollkommen biegsamer, homogener, schwerer Faden, die Curve ist vollkommen glatt. Welches ist die Kraft F, die eben das Herabgleiten des schweren Fadens von der Curve verhindern kann? Wie verhält sich der Druck auf die Curve zu dem Gewichte G des Fadens?



Figur 31.

Es sei (Fig. 31) $A\,P\,B$ die Curve, $O\,A = a$, $\sphericalangle A\,O\,P = \vartheta$, $\sphericalangle A\,O\,p = \vartheta + d\vartheta$, T die Spannung in P, $T + d\,T$ diejenige in p, p der auf den Bogen $A\,P$, $d\,p$ der auf das Bogenelement $P\,p = d\,s$ ausgeübte Druck.

An dem Fadenelemente wirken die Kräfte T, $T + d\,T$,

sein Gewicht $m g a d \vartheta$, welche mit der Reaktion des Curvenbogens ds im Gleichgewichte sein müssen. Für den Gleichgewichtszustand muss mit O als Drehpunkt, wodurch diese Reaktion ausgeschlossen wird, die Momentengleichung erfüllt sein

$$(T + dT) a - T a - m g a d \vartheta . a \cos \vartheta = 0, \tag{1}$$

woraus folgt

$$dT = m g a \cos \vartheta d \vartheta, \qquad T = m g a \int \cos \vartheta d \vartheta,$$
$$T = m g a \sin \vartheta. \tag{2}$$

Da nun in B offenbar $T = F$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so ist die verlangte Kraft

$$F = m g a, \tag{3}$$

d. h. mindestens gleich dem Gewichte eines Fadenstückes von der Länge des Bogenhalbmessers.

Für den Druck auf das Curvenelement Pp, welcher von den Spannungen T, $T + dT$ und dem Gewichte des entsprechenden Fadenelementes herrührt, haben wir die Gleichung

$$dp = m g a d \vartheta \sin \vartheta + T d \vartheta = m g a \sin \vartheta d \vartheta + m g a \sin \vartheta d \vartheta,$$
$$dp = 2 m g a \sin \vartheta d \vartheta. \tag{4}$$

Damit ist

$$p = C - 2 m g a \cos \vartheta,$$

und weil $C = 2 m g a$, wegen des gleichzeitigen Verschwindens von ϑ und p für den Punkt A, so ergiebt sich

$$p = 2 m g a (1 - \cos \vartheta). \tag{5}$$

Für den Gesamtdruck von A bis B, d. i. von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, erhalten wir demnach

$$\int dp = 2 m g a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d \vartheta = 2 m g a = F. \tag{6}$$

Somit ist das gewünschte Verhältnis zwischen Gesamtdruck und Fadengewicht

$$\frac{F}{G} = \frac{2 m g a}{m g a \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}. \tag{7}$$

6. Wenn in der vorhergehenden Aufgabe der Quadrant nicht glatt, sondern rauh ist und der Reibungscoëfficient mit μ bezeichnet wird, wie gross ist dann die Kraft F?

Die an dem Fadenelemente Pp thätigen Kräfte sind hier die Spannungen T, $T + dT$, der Reibungswiderstand μdp, das Gewicht $m g a d \vartheta$ und die Reaktion der Curve. Nehmen wir Momente um den Punkt O, dann ist die Gleichgewichtsbedingung

$$(T + dT) a - T a + \mu dp . a - m g a d \vartheta . a \cos \vartheta = 0,$$

oder

$$\frac{dT}{d\vartheta} + \mu \frac{dp}{d\vartheta} = m g a \cos \vartheta. \quad (1)$$

Ferner ist wieder

$$dp = m g a \, d\vartheta \sin \vartheta + T d\vartheta, \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{d\vartheta} = m g a \sin \vartheta + T.$$

Wenn wir diesen Wert von $\frac{dp}{d\vartheta}$ in (1) substituieren, so wird

$$\frac{dT}{d\vartheta} + \mu T = m g a (\cos \vartheta - \mu \sin \vartheta).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $e^{\mu \vartheta}$ und integrieren, so folgt

$$T e^{\mu \vartheta} = \frac{2 \mu \cos \vartheta + (1 - \mu^2) \sin \vartheta}{1 + \mu^2} m g a e^{\mu \vartheta} + C.$$

Mit $\vartheta = 0$ ist $T = 0$, wodurch $C = -\frac{2\mu}{1 + \mu^2} m g a$, mithin

$$T e^{\mu \vartheta} = \frac{m g a}{1 + \mu^2} \left\{ [2 \mu \cos \vartheta + (1 - \mu^2) \sin \vartheta] e^{\mu \vartheta} - 2 \mu \right\}. \quad (2)$$

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ muss $F = T$ sein, daher ist mit (2) die das Gleichgewicht haltende Kraft

$$F = \frac{m g a}{1 + \mu^2} \left\{ 1 - \mu^2 - 2 \mu e^{\mu \frac{\pi}{2}} \right\}. \quad (3)$$

Ferner erhalten wir durch die Integration der Gleichung (1)

$$T = \mu p = m g a \sin \vartheta,$$

wo keine Konstante hinzuzufügen ist, weil T, p, ϑ gleichzeitig verschwinden. Damit ist der Druck auf die Curve von A bis P

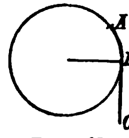
$$p = \frac{1}{\mu} (m g a \sin \vartheta - T).$$

Mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir den Druck P auf den ganzen Quadranten, nämlich

$$P = \frac{1}{\mu} (m g a - F) = \frac{2 m g a}{1 + \mu^2} (\mu + e^{\mu \frac{\pi}{2}}).$$

7. Ein schwerer, gleichförmiger Faden ruht auf einer vollständigen Cycloide, ihre Axe liegt vertikal, ihr Scheitel aufwärts, die Länge des Fadens deckt gerade den ganzen Bogen der Cycloide. Wie ändert sich die Pressung in den einzelnen Curvenpunkten?

Die Pressung ist der Krümmung umgekehrt proportional.



Figur 32.

8. Ein schwerer Faden ABC (Fig. 32) ist mit seinem höchsten Ende an dem Umfange eines vertikalen Kreisschnittes eines rauhen, horizontalen Cylinders mit beweglicher Axe befestigt. Die Längen der zwei Teile AB, BC des Fadens sind gegeben. Welches ist das Moment einer Kraft um die Cylinderaxe, die Gleichgewicht hervorbringt?

Es sei $AB = a$, $BC = b$, $r =$ dem Halbmesser des Cylinders, $m =$ der Masse einer Längeneinheit des Fadens, dann ist das verlangte Moment gleich

$$mrg\left(r \sin\frac{a}{r} + b\right).$$

9. Zwei gleiche Gewichte P, P' sind durch einen homogenen, vollkommen biegsamen Faden verbunden, welcher über einen rauhen, festen, horizontalen Kreiscylinder läuft. Zu vergleichen die Kräfte, welche erforderlich sind, P zu heben, je nachdem P hinaufgestossen, oder P' herabgezogen wird.

Wenn p die Kraft in dem ersteren, p' diejenige in dem letzteren Falle bezeichnet, so ist

$$\frac{p'}{p} = e^{\mu\pi}.$$

10. Wenn ein Gewicht P an dem einen Ende eines homogenen, feinen Fadens, der über einen rauhen Cylinder gelegt ist, befestigt ist und der Faden an dem anderen Ende ein Gewicht nP tragen kann, wie gross ist das Gewicht, welches der Faden tragen kann, wenn er $r$mal um den Cylinder gewunden ist?

Das verlangte Gewicht ist gleich $n^{2r+1}P$.

11. Ein Faden ist um einen glatten elliptischen Cylinder in einer zur Cylinderaxe senkrechten Ebene gewunden. In den Brennpunkten der Ellipse wirken zwei anziehende Centralkräfte, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung sind und in gleichen Distanzen gleiche Wirkungen hervorbringen. Man soll die Spannungen des Fadens in den Endpunkten der grossen und kleinen Axe vergleichen.

Die Spannung in einem Endpunkte der grossen Axe verhält sich zu derjenigen in einem Endpunkte der kleinen Axe wie $(1 + e^2) : 1$, wo e die Excentricität eines Cylinderquerschnittes bedeutet.

12. Die Endpunkte eines Fadens von der Länge $7a$ sind an denjenigen eines gleichförmigen, schweren Stabes von der Länge $5a$ befestigt. Der Faden ist über einen dünnen, runden Bolzen gelegt und hängt der Stab in Ruhe, wenn der Aufhängepunkt irgendwo innerhalb eines Abstandes a von der Mitte des Fadens sich befindet. Man soll den Reibungscoëfficienten zwischen dem Faden und dem Bolzen bestimmen, sowie die Horizontalneigung des Stabes ermitteln, wenn er in einer Lage an der Grenze der Bewegung hängt, und die Spannungen der zwei Teile des Fadens.

Bezeichnet μ den Reibungscoëfficienten, G das Gewicht des Stabes, T die Spannung des längeren, T' diejenige des kürzeren Teiles des Fadens und ϑ die Horizontalneigung des Stabes, dann ist

$$\mu = \frac{2}{\pi}\, l\left(\frac{4}{3}\right); \quad T = \frac{4}{5}G, \quad T' = \frac{3}{5}G, \quad \cos\vartheta = \frac{24}{25}.$$

13. Ein dünner, unausdehnbarer Faden, in welchem die Dichtigkeit in geometrischer, wie die Entfernung des fraglichen Punktes von einem Endpunkte in arithmetischer Progression wächst, ist direkt quer über einen rauhen, horizontalen Cylinder gelegt. Der Umfang eines Vertikalschnittes des Cylinders ist der zweifachen Länge des Fadens gleich. Es soll der Reibungscoëfficient unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass der Faden eben getragen wird, wenn seine beiden Enden in der horizontalen Ebene durch die Cylinderaxe sich befinden.

In Übereinstimmung mit der Hypothese ist der Ausdruck für die Dichtigkeit in einem Abstande s von dem einen Ende des Fadens $\alpha e^{\frac{s}{k}}$; bezeichnet r den Cylinderhalbmesser, so ist

$$\mu = \frac{r}{2k}.$$

7—13. Walton, p. 142—143.

14. Ein feiner Faden schliesst gerade ohne Spannung den Umfang einer Ellipse ein. In dem einen Brennpunkte der Ellipse befindet sich der Sitz einer Centralkraft, deren Intensität umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ist. Es soll bewiesen werden, dass die Summe der Spannungen des Fadens in den Endpunkten irgend einer Brennpunktssehne unveränderlich ist und dass der Normaldruck auf die Ellipse in einem beliebigen Punkte umgekehrt proportional dem Kubus des konjugierten Durchmessers ist.

15. Der tiefere Halbmesser eines festen Kreissektors ist horizontal, seine Ebene vertikal. Beweise, dass ein homogener Faden von der Länge gleich dem Halbmesser plus Bogenlänge, welcher über den Bogen und den höheren Halbmesser gelegt ist, im Gleichgewichte bleibt, wenn der Faden eben Bogen und Radius deckt.

16. Ein gleichförmiger Faden stützt sich auf die Fläche einer Kugel und ist mit dem einen Ende an ihrem höchsten Punkte befestigt. Die Länge des Fadens ist gleich derjenigen eines Quadranten eines grössten Kugelkreises. Beweise, dass der ganze durch den vom höchsten Punkte an gerechneten dritten Teil des Fadens ausgeübte Druck gleich der Spannung in dem höchsten Punkte des Fadens ist.

14 und 16. Walton, p. 203.

Zweite Abteilung.

Gleichgewicht vollkommen biegsamer, elastischer Fäden.

Wird ein homogener, gleichförmiger, ausdehnbarer Faden von gegebener Länge durch eine beliebige Kraft, welche jedoch eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf, gedehnt, so ist durch Experimente dargethan worden, dass die Ausdehnung des Fadens proportional seiner natürlichen Länge und der dehnenden Kraft ist. Daraus ist leicht zu ersehen, dass die Ausdehnung, wenn der Faden von veränderlicher Länge ist, wechseln wird wie das Produkt aus der Kraft und der veränderlichen Länge des Fadens. Bezeichnet daher a die natürliche Länge eines Fadens, a' seine Länge unter der Wirkung der streckenden Kraft P, λ eine konstante, von der Beschaffenheit des Fadens abhängige Grösse, welche durch Versuche bestimmt und Elastizitätsmodulus genannt wird, dann besteht die Gleichung

$$a' = a\left(1 + \frac{P}{\lambda}\right).$$

Diese Theorie wurde zuerst von Hooke in der Form eines Anagrammes unter einem Verzeichnisse von Erfindungen am Ende seiner Beschreibung des Helioskopes in dem Jahre 1676 verkündigt. Das Anagramm lautet: „ceiiinosssttuu“, aus welchem der

Satz: „ut tensio sic vis" gezogen werden kann. Er veröffentlichte später ein Werk unter dem Titel: „De Potentia Restitutiva or Spring", in welchem die Theorie mit experimentellen Erläuterungen ausführlich entwickelt wurde. Hooke's Theorie bildet die Basis einer Denkschrift von Leibnitz in Acta Eruditorum 1684, betitelt „Demonstrationes Novae de Resistentia Solidorum". Der Leser, welcher diesen Gegenstand eingehender kennen lernen will, wird auf Gravesande's Element. Physic. Lib. I, c. 26 verwiesen.

1. Ein elastischer Faden AC (Fig. 33) ist mit dem einen Ende an einem festen Punkte A aufgehangen und trägt in einem Punkte B ein Gewicht. Die natürlichen Längen von AB, BC sind gegeben. Welches ist die Länge des Fadens AC unter seinen gegenwärtigen Verhältnissen?

A, P, p, B, Q, C

Fig. 33.

Lasse sein m die Masse der Längeneinheit des Fadens in seinem natürlichen Zustande, a, b die natürlichen Längen von AB, BC, a', b' die Längen dieser Strecken unter den Verhältnissen des Problemes, c die Länge eines Teiles des ungestreckten Fadens, dessen Gewicht gleich der in B angehangenen Last ist, P einen beliebigen Punkt in AB, p einen benachbarten Punkt, $AP = x$, $Pp = dx$, T die Spannung in P und $T + dT$ diejenige in p.

Nach Hooke's Prinzip ist das Gewicht des Fadenelementes Pp gleich $\frac{m g\, dx}{1 + \frac{T}{\lambda}}$, folglich erhalten wir für das Gleichgewicht dieses Elementes

$$T + dT + \frac{m g\, dx}{1 + \frac{T}{\lambda}} - T = 0, \qquad \text{oder} \qquad \left(1 + \frac{T}{\lambda}\right) dT + m g\, dx = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$T\left(1 + \frac{T}{2\lambda}\right) + m g x = C.$$

Aber es ist klar, dass $T = mg(a + b + c)$, wenn $x = 0$, und $T = mg(b + c)$, wenn $x = a'$, folglich bekommen wir

$$(a + b + c)\left\{1 + \frac{mg}{2\lambda}(a + b + c)\right\} = (b + c)\left\{1 + \frac{mg}{2\lambda}(b + c)\right\} + a',$$

daher

$$a' = a\left\{1 + \frac{mg}{2\lambda}(a + 2b + 2c)\right\}. \tag{1}$$

Ferner erhalten wir, wenn Q ein beliebiger Punkt in BC, $BQ = y$ und $\tau =$ der Spannung in Q ist, wie vorher

$$\tau\left(1 + \frac{T}{2\lambda}\right) + m g y = C.$$

Aber es ist offenbar $\tau = mgb$, wenn $y = 0$, und $\tau = 0$, wenn $y = b'$ ist, folglich muss sein

$$b' = b\left(1 + \frac{mgb}{2\lambda}\right). \tag{2}$$

Demnach ergiebt sich mit (1) und (2), wenn l' die ganze Länge des Fadens AC bezeichnet,

$$l' = a + b + \frac{mg}{2\lambda}\left\{a(a + 2b + 2c) + b^2\right\}.$$

2. Ein dehnbarer Faden von der natürlichen Länge a ist mit dem einen seiner Enden an dem Gipfel einer glatten, geneigten Ebene befestigt, welche dieselbe Länge a besitzt. Wie gross ist die Länge des von der schiefen Ebene herabhängenden Fadenstückes, wenn der Faden durch sein eigenes Gewicht gedehnt wird?

Es sei ACD (Fig. 34) der Faden, A der Gipfel der geneigten Ebene AC, P ein beliebiger Punkt in AC und p ein darauf folgender Punkt, t die Spannung in P, T diejenige in A und τ diejenige in C, $AP = x$, $Ap = x + dx$, $m =$ der Masse zu irgend einem Punkte des Fadens, wenn er unausgedehnt ist, α die Horizontalneigung von AC.

Figur 34.

Die Masse des Fadenelementes Pp ist $m\,dx : \left(1 + \frac{t}{\lambda}\right)$, und daher, weil $t + dt$ die Spannung in p, muss für das Gleichgewicht die Bedingung erfüllt werden

$$dt + \frac{mg\sin\alpha}{1 + \frac{t}{\lambda}}dx = 0, \qquad \text{oder} \qquad \left(1 + \frac{t}{\lambda}\right)dt + mg\sin\alpha\,dx = 0,$$

welche Gleichung integriert giebt

$$t\left(1 + \frac{t}{2\lambda}\right) + mgx\sin\alpha = C,$$

folglich bekommen wir, da τ der Wert von t, wenn $x = a$, und T der Wert von t, wenn $x = 0$ ist,

$$\tau\left(1 + \frac{\tau}{2\lambda}\right) + mga\sin\alpha = T\left(1 + \frac{T}{2\lambda}\right),$$

$$(\tau - T)\left\{1 + \frac{1}{2\lambda}(\tau + T)\right\} + mga\sin\alpha = 0. \tag{1}$$

Bezeichnet s die natürliche Länge von CD und demnach $a - s$ diejenige von AC, so ist offenbar

$$\tau = mgs, \qquad T = mg\left\{s + (a - s)\sin\alpha\right\},$$

mithin durch (1)

$$(a-s)\left\{1+\frac{mg}{2\lambda}[2s+(a-s)\sin\alpha]\right\}=a,$$

$$\frac{mg}{2\lambda}(a-s)\left\{2s+(a-s)\sin\alpha\right\}=s.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt die Grösse s.

Bedeutet noch s' die wirkliche Länge von CD, so kann leicht gezeigt werden, dass

$$s'=s\left(1+\frac{mgs}{2\lambda}\right).$$

und sind mithin s und s' bekannt.

3. Ein homogener, dehnbarer Faden $A\alpha$ (Fig. 35) ist mit dem einen seiner Enden an dem oberen Endpunkte A des vertikalen Halbmessers AO eines Kreisbogens AB befestigt, auf welchem er ruht. Wie gross ist die gedehnte Länge des Fadens, wenn seine natürliche Länge gegeben ist?

Figur 35.

Es sei $AP=s$, $Pp=ds$, $\sphericalangle AOP=\varphi$, $\sphericalangle POp=d\varphi$, $OA=a$, m die Masse pro Längeneinheit des noch nicht gedehnten Fadens, T, $T+dT$ die Spannung in P, p, s', ds' die natürliche Länge von AP, Pp.

Nach dem Prinzipe von Hooke ist die Länge des Fadenelementes Pp

$$ds=\left(1+\frac{T}{\lambda}\right)ds'. \tag{1}$$

Für das Gleichgewicht des Elementes Pp erhalten wir durch Zerlegung der Kräfte parallel und senkrecht zu der Tangente in P

$$(T+dT)\cos d\varphi+mg\,ds'\sin\varphi-T=0, \tag{2}$$

oder, indem wir nur die unendlich kleinen Grössen der ersten Ordnung berücksichtigen,

$$dT+mg\,ds'\sin\varphi=0,\quad \left(1+\frac{T}{\lambda}\right)dT+mg\sin\varphi\,ds=0 \text{ mit (1)},$$

und weil $s=a\varphi$

$$\left(1+\frac{T}{\lambda}\right)dT+mag\sin\varphi\,d\varphi=0.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$T\left(1+\frac{T}{2\lambda}\right)-mag\cos\varphi=C.$$

Nun sei β der von dem Bogen $A\alpha$ bei O umspannte Winkel, dann ist, mit $\varphi=\beta$, $T=0$, folglich $C=-mag\cos\beta$, mithin

$$T\left(1+\frac{T}{2\lambda}\right)=mag(\cos\varphi-\cos\beta). \tag{3}$$

Die Gleichung (1) giebt, $a\varphi = s$ setzend,

$$a\,d\varphi = \left(1 + \frac{T}{\lambda}\right) d s',$$

und, weil der Coëfficient λ eine bedeutende Grösse ist,

$$d s' = a\,d\varphi\left(1 - \frac{T}{\lambda}\right) = a\,d\varphi - \frac{a\,T}{\lambda}\,d\varphi. \tag{4}$$

Nach (3) ist aber annähernd

$$T = m\,a\,g\,(\cos\varphi - \cos\beta),$$

und wenn dieser Wert von T in die (4) substituiert wird, folgt

$$d s' = a\,d\varphi - \frac{m\,a^2 g}{\lambda}(\cos\varphi - \cos\beta)\,d\varphi.$$

Diese Gleichung ist zu integrieren, wodurch sich ergiebt

$$s' = a\varphi - \frac{m\,a^2 g}{\lambda}(\sin\varphi - \varphi\cos\beta),$$

denn die willkürliche Konstante ist gleich Null, weil mit $\varphi = 0$ auch $s' = 0$ ist.

Bezeichnet $a\beta'$ die natürliche Länge von $A\alpha$, dann ist offenbar

$$a\beta' = a\beta - \frac{m\,a^2 g}{\lambda}(\sin\beta - \beta\cos\beta), \quad \beta' = \beta - \frac{m\,a\,g}{\lambda}(\sin\beta - \beta\cos\beta).$$

Weil nun annähernd $\beta = \beta'$, so können wir β' für β in dem Faktor von $\frac{1}{\lambda}$ substituieren, wodurch sich ergiebt

$$\beta = \beta' + \frac{m\,a\,g}{\lambda}(\sin\beta' - \beta'\cos\beta'),$$

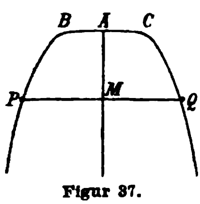
und ist somit die verlangte Länge des Fadens $A\alpha$ bestimmt.

4. Zwei auf zwei glatten, geneigten Ebenen CA, CB (Fig. 36) ruhende Gewichte P, Q sind durch einen gegebenen elastischen Faden PQ verbunden. Welches ist die Gleichgewichtslage?

Figur 36.

Es seien ϑ, α, β die Horizontalneigungen von QP, CA, CB, a bezeichne die natürliche Länge des Fadens PQ, dann ist die Gleichgewichtslage durch die Gleichungen bestimmt

$$tg\,\vartheta = \frac{P\cot g\,\beta - Q\cot g\,\alpha}{P + Q}, \quad PQ = a\left\{1 + \frac{P\sin\alpha}{\lambda\cos(\alpha - \vartheta)}\right\}.$$



Figur 37.

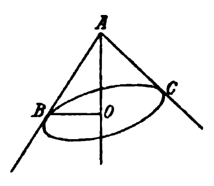
5. Zwei gleiche Gewichte P, Q (Fig. 37) sind durch einen elastischen Faden PQ verbunden, dessen natürliche Länge der horizontalen Geraden BC gleich ist. Man soll die Gleichungen der Curven BP, CQ finden, worauf die Gewichte stets in der Ruhelage sind, wenn der Faden immer horizontal und die Ebene der Curven vertikal ist.

Halbiere BC in A, ziehe AM vertikal, lasse sein

$AB = a = AC$, $AM = x$, $MP = y = MQ$, dann findet man als Gleichung einer jeden dieser Curven

$$\lambda (y - a)^2 = 2 a P x,$$

mithin sind die krummen Linien BP, CQ zwei Halbparabeln mit den Scheiteln in B und C resp.



Figur 38.

6. Ein schwerer, elastischer Ring BC (Fig. 38) ist über einen geraden Kreiskegel mit glatter Oberfläche und vertikaler Axe gelegt. Welches ist die Gleichgewichtslage des Ringes?

Es sei A der Scheitel des Kegels, O der Mittelpunkt des Ringes in der Gleichgewichtslage, $\sphericalangle OAB = \alpha$, $2\pi a$ die natürliche Länge des Ringes, G sein Gewicht, dann ist

$$BO = a\left(1 + \frac{G \cot g\, \alpha}{2 \pi \lambda}\right),$$

wodurch die verlangte Lage bestimmt ist.

Earnshaw, Statics, 1st edition, p. 256.

7. Ein schwerer, gleichförmiger Ring von gewisser Elastizität ruht horizontal auf einem Teile einer Umdrehungsfläche mit vertikaler Axe in jeder Lage. Welches ist die erzeugende Curve?

Die erzeugende Curve ist eine Parabel, von welcher die Rotationsaxe ein Durchmesser ist.

8. Ein feiner, elastischer Faden ist rund um zwei gleiche, glatte Cylinder geknüpft, die Oberflächen derselben sind in Berührung und ihre Axen parallel. Der Faden ist gerade so lang, dass er nicht über seine natürliche Länge hinaus gedehnt wird. Einer der Cylinder wird nun durch zwei rechte Winkel gedreht, so dass die Axen wieder parallel sind. Man soll die Spannung des Fadens unter der Voraussetzung bestimmen, dass ein Gewicht von einem Kilogramm denselben um seine doppelte Länge dehnt.

Die Spannung des Fadens ist gleich $\frac{\pi - 2}{\pi + 2}$, wo ein Kilogramm die Einheit ist.

9. Ein schwerer, gleichförmiger Stab AB ist durch ein Charnier bei A an einen aufrechten Stab AC gefesselt, die Punkte B und C sind mit einander durch einen feinen, elastischen Faden verbunden, welcher in ungedehntem Zustande die Hypothenuse eines rechtwinkeligen, gleichschenkeligen Dreieckes mit dem rechten Winkel bei A bildet. Welches ist die Ruhelage von AB?

Es bezeichne ϑ einen der Winkel bei B oder C, G das Gewicht von AB, λ den Elastizitätsmodulus, dann ist die schiefe Gleichgewichtslage von AB durch die Gleichung bestimmt

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{G}{\lambda}},$$

und kann demnach keine schiefe Ruhelage vorhanden sein, wenn nicht $\lambda > G(1 + \sqrt{2})$ ist.

10. Ein feiner, über einen glatten Stift laufender Faden hält einen gleichförmigen Stab in der Weise, dass die Enden beider an einander befestigt sind. Das Wachstum der Länge des durch eine Kraft gleich dem Gewichte des Stabes in einer geraden Linie

gedehnten Fadens sei gleich der doppelten Länge des Stabes. Welches ist die Gleichgewichtslage unter diesen Umständen?

Wenn $2a =$ der natürlichen Länge des Fadens, $2b =$ der Länge des Stabes, $\vartheta =$ dem von beiden Teilen des Fadens eingeschlossenen Winkel ist, ergiebt sich für den Gleichgewichtszustand

$$\sin\vartheta = \frac{2b}{a^2}\left\{\sqrt{a^2+b^2}-b\right\}.$$

11. Zwei gleiche, starre, gewichtslose Stäbe AC, BC sind miteinander bei C durch ein glattes Charnier verbunden und ruhen in einer vertikalen Ebene; ihre tieferen, durch einen elastischen Faden verbundenen Endpunkte befinden sich auf einer glatten, horizontalen Ebene. Ist α die Horizontalneigung eines jeden der Stäbe, wenn ein Gewicht G in der Mitte von jedem, α' diejenige, wenn ein Gewicht G' ebendaselbst befestigt ist, wie gross ist dann die natürliche Länge des Fadens?

Bezeichnet a die Länge eines der Stäbe, dann ist die natürliche Länge des Fadens gleich

$$2a\,.\,\frac{G\sin\alpha' - G'\sin\alpha}{G\,tg\,\alpha' - G'\,tg\,\alpha}.$$

12. Zwei feine, elastische Fäden sind in den Mittelpunkten der Seiten einer gleichförmigen, rechteckigen Platte so befestigt, dass sie die Platte parallel zu ihren Seiten kreuzen und sich in ihrem Mittelpunkte schneiden. Die Platte wird an dem Schnittpunkte der beiden Fäden aufgehangen. Wie gross ist annähernd der Abstand der Platte von dem Aufhängepunkte?

Bezeichnet G das Gewicht der Platte, $2a$, $2b$ die Längen der in einer Ecke zusammenstossenden Rechtecksseiten, λ den gemeinschaftlichen Elastizitätsmodulus der beiden Fäden, so ist die verlangte Entfernung gleich

$$\sqrt[3]{\frac{\frac{G}{\lambda}}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}}.$$

1—12. Walton, p. 144—151.

13. Sechs gleiche Stäbe sind unter einander durch Charniere mit ihren Enden so verbunden, dass sie ein Sechseck bilden. Einer der Stäbe ist in eine horizontale Lage gebracht, der ihm gegenüber liegende an ihn durch einen feinen, elastischen, die Mittelpunkte beider verbindenden Faden gefesselt. Der Elastizitätsmodulus ist gleich dem Gewichte eines jeden Stabes. Welches ist die natürliche Länge des Fadens, wenn das Sechseck im Gleichgewichtszustande ein gleichwinkeliges ist?

Ist a die Länge eines jeden der Stäbe, l die natürliche Länge des Fadens, dann ergiebt sich

$$l = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a.$$

14. Ein schwerer elastischer Faden ist auf eine glatte, doppelt geneigte Ebene in einer solchen Weise gelegt, dass er in Ruhe bleibt. Um wie viel wird der Faden gedehnt?

Wenn G das Gewicht des Fadens, c seine natürliche Länge, α, α' die Neigungen der Ebenen bezeichnet, dann ist die verlangte Ausdehnung gleich

$$\frac{Gc}{2\lambda} \cdot \frac{\sin\alpha - \sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'}.$$

15. Ein elastischer Faden ist mit seinem oberen Ende an einer geneigten Ebene befestigt und ruht auf dieser rauhen Ebene in der Richtung der grössten Neigung Welches sind die Grenzen der Ausdehnung des Fadens über seine natürliche Länge?

Es sei α die Neigung der Ebene, l die natürliche Länge des Fadens, l' diejenige eines Teiles von ihm, dessen Gewicht gleich dem Elastizitätsmodulus ist, ε der Neutralitätswinkel, dann liegt die Ausdehnung des Fadens zwischen den Grenzen

$$\frac{l^2 \sin(\alpha + \varepsilon)}{2l' \cos\varepsilon}, \quad \frac{l^2 \sin(\alpha - \varepsilon)}{2l' \cos\varepsilon}.$$

Fünfter Teil.

Dynamik.

Erstes Kapitel.

Bewegung eines materiellen Punktes.

Erster Abschnitt.

Freie geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes.

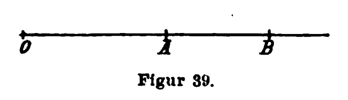
Bezeichnet m die Masse des Punktes, s den von ihm in der Zeit t zurückgelegten Weg, v seine Geschwindigkeit, φ seine Beschleunigung, X die bewegende Kraft, dann sind die Grundgleichungen für die Bewegung desselben

$$m\frac{d^2 s}{d t^2} = X, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 s}{d t^2} = \frac{X}{m} = \varphi, \qquad \frac{d v}{d t} = \frac{X}{m} = \varphi, \qquad \Phi(s, v, \varphi, t) = 0.$$

Mit $m = 1$ resultieren hieraus die Gleichungen für die geradlinige Bewegung eines Punktes von der Masse gleich der Einheit, das sind auch diejenigen für einen geometrischen Punkt, so dass alle die Aufgaben, welche wir für die freie geradlinige Bewegung eines geometrischen Punktes gegeben haben, für einen materiellen Punkt von der Masse Eins gelten, wir haben dann nur zu beachten, dass an die Stelle der Beschleunigung die bewegende Kraft tritt, indem $\varphi = X$ ist. Allgemein ist die bewegende Kraft das Produkt aus der Masse und der Beschleunigung des Punktes, also $X = m\varphi$, und wird mit $m = 1$, $X = \varphi$.

Hier werden mithin wenige Beispiele genügen.

1. Ein materieller Punkt A zieht einen materiellen Punkt B mit einer Kraft an, welche stets zu derjenigen Kraft, mit welcher B A anzieht, in dem Verhältnisse $\mu : \mu'$ steht, und sind die beiden materiellen Punkte beim Beginn der Bewegung in Ruhe. Welches ist die Lage der materiellen Punkte und der Ort ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes am Ende der Zeit t?



Figur 39.

Es sei O ein fester Punkt in der Linie der Bewegung der beiden materiellen Punkte, welche zur Zeit t an den Orten A und B sein mögen (Fig. 39) $OA = s$, $OB = s'$.

Die Bewegungsgleichungen der beiden Punkte sind

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = \mu (s' - s), \quad (1) \qquad \frac{d^2 s'}{d t^2} = - \mu' (s' - s). \quad (2)$$

Indem wir die (1) mit μ', die (2) mit μ multiplizieren und die Resultate addieren, gelangen wir zu

$$\mu' \frac{d^2 s}{d t^2} + \mu \frac{d^2 s'}{d t^2} = 0. \quad (3)$$

Zur Zeit $t = 0$ sind die Geschwindigkeiten $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{ds'}{dt}$ gleich Null, so dass die Integration der Gleichung (3) giebt

$$\mu' \frac{ds}{dt} + \mu \frac{ds'}{dt} = 0,$$

und durch nochmalige Integration erhalten wir

$$\mu' s + \mu s' = \mu' a + \mu a', \quad (4)$$

wo a und a' die Anfangswerte von s und s' bezeichnen.

Subtrahieren wir (1) von (2), so kommt

$$\frac{d^2}{dt^2}(s' - s) + (\mu + \mu')(s' - s) = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$s' - s = A \sin\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\} + B \cos\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\},$$

so dass

$$\frac{ds'}{dt} - \frac{ds}{dt} = \sqrt{\mu + \mu'}\,\{A \cos\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\} - B \sin\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\}.$$

Aber anfangs ist $s = a$, $s' = a'$, $\frac{ds}{dt} = 0$, $\frac{ds'}{dt} = 0$, daher sind die Integrationskonstanten $A = 0$, $B = (a' - a)$, folglich erhalten wir

$$s' - s = (a' - a) \cos\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\}. \quad (5)$$

Nun ergiebt sich leicht mit (4) und (5)

$$s = \frac{\mu' a + \mu a'}{\mu + \mu'} - \frac{\mu (a' - a)}{\mu + \mu'} \cos\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\},$$

$$s' = \frac{\mu' a + \mu a'}{\mu + \mu'} + \frac{\mu' (a' - a)}{\mu + \mu'} \cos\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\}.$$

Bezeichnen m, m' die Massen der materiellen Punkte A, B, ist $\bar{s}$ der Abstand ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes von O zur Zeit t, dann muss die bekannte Beziehung bestehen

$$(m + m')\bar{s} = m s + m' s',$$

folglich muss sein

$$(m + m')\bar{s} = \frac{m + m'}{\mu + \mu'}(\mu' a + \mu a') + \frac{\mu' m' - \mu m}{\mu + \mu'}(a' - a) \cos\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\}.$$

Wenn μ, μ' proportional m, m' resp. sind, dann folgt aus unserem allgemeinen Resultate

$$\bar{s} = \frac{\mu' a + \mu a'}{\mu + \mu'},$$

was zeigt, dass dann der Schwerpunkt während der ganzen Bewegung an derselben Stelle bleibt.

Walton, p. 223.

2. Ein materieller Punkt befindet sich in einem gegebenen Abstande von einer dünnen, kreisförmigen, gleichdichten Platte in einer durch ihren Mittelpunkt gehenden und zu ihrer Ebene senkrechten Linie. Die attraktive Kraft eines jeden Moleküles der Platte ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Mit welcher Geschwindigkeit kommt der Punkt auf der Platte an?

Bezeichnet a den Halbmesser, k die Dicke, ϱ die Dichtigkeit der Platte, b den Abstand des Punktes von der Platte, μ die absolute Attraktionskraft, so ist die Attraktion der Platte auf den Punkt gleich $2\mu\pi\varrho k \times \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)$, folglich ist die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2\mu\pi\varrho k\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) = v\frac{dv}{dx}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$v^2 = 4\mu\pi\varrho k\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)x,$$

wobei die Integrationskonstante weggelassen wurde, weil gleichzeitig $x = 0$, $v = 0$ sind. Mit $x = b$ erhalten wir hieraus für die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt auf der Platte ankommt,

$$v^2 = 4\mu\pi\varrho k\left\{b - \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right\}.$$

3. Ein materieller Punkt befindet sich in einem gegebenen Abstande von einer homogenen, dünnen Platte unendlicher Ausdehnung. Jedes Molekül der Platte zieht mit einer Kraft an, die umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes ist. Welches ist die Zeit, in der der Punkt auf der Oberfläche der Platte ankommt?

Es sei b der Abstand des Punktes von der Platte, ϱ ihre Dichtigkeit, k ihre Dicke, μ die absolute Attraktionskraft. Damit ist die Attraktion der Platte auf den Punkt gleich $2\mu\pi\varrho k$ und folglich die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = 2\mu\pi m\varrho k, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = 2\mu\pi\varrho k.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{dx}{dt} = 2\mu\pi\varrho k t + C, \qquad x = 2\mu\pi\varrho k\frac{t^2}{2} + Ct + D.$$

Mit $x = 0$ ist $\frac{dx}{dt} = 0$, $t = 0$, folglich $C = 0$, $D = 0$, daher

$$\frac{dx}{dt} = 2\mu\pi\varrho k t = v, \qquad x = \mu\pi\varrho k t^2, \qquad t = \sqrt{\frac{x}{\mu\pi\varrho k}}.$$

Mithin ist die ganze Fallzeit des Punktes, da dann $x = a$ ist,

$$T = \sqrt{\frac{a}{\mu\pi\varrho k}}.$$

4. Ein materieller Punkt, auf welchen die Schwerkraft nicht wirkt, fällt in der Axe einer dünnen. cylindrischen Röhre von unendlicher Länge. Die Moleküle der Röhre ziehen mit einer Kraft an, welche umgekehrt proportional der Distanz ist. Wie gross ist die Geschwindigkeit des materiellen Punktes nach dem Durchfallen einer gegebenen Strecke?

Es sei k die Dicke der Röhre, r der Halbmesser ihrer inneren Fläche, x der Abstand des materiellen Punktes P von dem Ende der Röhre nach der Zeit t. Das Volumen eines Teiles der Röhre zwischen den Normalschnitten in den Abständen x und $x + dx$ von P ist gleich $2\pi r k\, dx$, daher die Attraktion dieses Elementarteiles auf den materiellen Punkt entlang der Axe der Röhre, wenn die Einheit der Anziehungskraft gleich der Attraktion einer Masseneinheit in der Einheit der Entfernung gewählt wird, gleich

$$2\pi\varrho r k\, dx \frac{1}{x^2 + r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Mithin erhalten wir für die Bewegung des Punktes P die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\pi\varrho r k \int_{-x}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi\varrho r k}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Multiplizierend mit $2\frac{dx}{dt}$ und integrierend, wird

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = 4\pi\varrho r k\, l\left\{x + \sqrt{x^2 + r^2}\right\} + C.$$

Nun ist $v = 0$, wenn $x = 0$, folglich $C = -4\pi\varrho r k\, l(r)$, und demnach

$$v^2 = 4\pi\varrho r k\, l\frac{x + \sqrt{x^2 + r^2}}{r}.$$

Walton, p. 224.

5. Ein materieller Punkt befindet sich in einem kleinen Abstande von dem Mittelpunkte eines gleichmässig dichten und dicken dünnen Ringes. Jedes Molekül des Ringes stösst mit einer Kraft zurück, welche umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ist. Welches ist die Lage des materiellen Punktes zu einer beliebigen Zeit und die Periode seiner Schwingungen?

Es sei l der Anfangsabstand des materiellen Punktes vom Mittelpunkte des Ringes, a der Halbmesser, k der Inhalt eines Normalschnittes, ϱ die Dichtigkeit des Ringes, x der Abstand des Punktes von der Ringmitte zur Zeit t. Damit werden wir finden, wenn die Repulsion einer Masseneinheit des Ringes in der Einheit der Entfernung als Einheit der Repulsivkraft genommen wird,

$$x = l \cos\left\{\sqrt{\frac{\pi\varrho k}{a^2}}\, t\right\}, \text{ und die Periode einer Schwingung } = a\sqrt{\frac{\pi}{\varrho k}}.$$

Walton, p. 232.

Zweiter Abschnitt.

Freie krummlinige Bewegung eines materiellen Punktes.

Beziehen wir die Bewegung eines materiellen Punktes, welcher sich unter der Einwirkung irgend welcher beschleunigender Kräfte bewegt, auf ein räumliches, rechtwinkeliges Coordinatensystem, sind (x, y, z) seine Coordinaten am Ende der Zeit t, gerechnet von einer bestimmten Epoche an, X, Y, Z die Summen der Componenten der parallel zu den Axen zerlegten beschleunigenden Kräfte, ist m die Masse des materiellen Punktes, dann bestehen die allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m} = \varphi_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m} = \varphi_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m} = \varphi_z,$$

wodurch die Bewegung eines materiellen Punktes auf diejenige eines geometrischen Punktes zurückgeführt ist.

Für die Centralbewegung haben wir, wenn F die Centralkraft bezeichnet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mp F\frac{x}{r}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \mp F\frac{y}{r}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \mp F\frac{z}{r},$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mp\frac{F}{m}\frac{x}{r} = \mp\varphi\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mp\frac{F}{m}\frac{y}{r} = \mp\varphi\frac{y}{r}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \mp\frac{F}{m}\frac{z}{r} = \mp\varphi\frac{z}{r},$$

so dass auch hier die Bewegung auf diejenige eines geometrischen Punktes zurückgeführt ist. Beispiele zu diesem Abschnitte bietet mithin das dritte Kapitel des zweiten Teiles zur Genüge.

Dritter Abschnitt.

Bewegung eines materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn.

Beziehen wir die Bewegung des materiellen Punktes von der Masse m auf rechtwinkelige, räumliche Coordinatenaxen, sind X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden Kraft parallel zu diesen Axen, N_x, N_y, N_z diejenigen des Normalwiderstandes N der Bahn, x, y, z die Coordinaten des Punktes zur Zeit t und ist μ der Reibungscoëfficient, so sind die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung dieses Punktes

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x - \mu N\frac{dx}{ds}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y - \mu N\frac{dy}{ds}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z - \mu N\frac{dz}{ds},$$

$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2, \quad N_x \frac{dx}{ds} + N_y \frac{dy}{ds} + N_z \frac{dz}{ds} = 0 \quad \Phi(x, y, z) = 0, \quad \Psi(x, y, z) = 0.$

Die fünf ersten Gleichungen können durch Division mit m sofort in diejenigen für die Bewegung eines geometrischen Punktes übergeführt werden. Die zwei letzten Gleichungen sind wie dort die Gleichungen der Bahn, auf welcher sich der Punkt bewegen muss.

Beispiele zu diesem Abschnitte bietet offenbar auch das vierte Kapitel des zweiten Teiles, so dass hier nur wenige gegeben werden sollen.

1. Ein materieller Punkt ist durch einen geraden elastischen Faden an das Centrum einer Repulsivkraft gefesselt, deren Intensität proportional dem Abstande ist, und besitzt der Faden anfangs seine natürliche Länge. Welches ist der grösste Abstand des materiellen Punktes vom Kraftcentrum, bis zu welchem er fortschreiten kann und die Zeit zur Rückkehr in seine natürliche Länge?

Es sei m die Masse des materiellen Punktes, μ die absolute beschleunigende Kraft, a die natürliche Länge des Fadens, sein Elastzitätsmodulus $E = m a \lambda$, x der Abstand des freien Fadenendes zur Zeit t von demselben Ende zur Zeit $t = 0$, P die den Faden streckende Kraft.

Die Bewegungsgleichung für den materiellen Punkt ist hier

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = \mu m (a + x) - P. \tag{1}$$

Nach Hooke's Gesetz haben wir für die streckende Kraft die Relation $x = a \frac{P}{\lambda}$, folglich ist $P = \frac{\lambda x}{a} = \frac{m a \lambda x}{a} = m \lambda x$, womit die (1) übergeht in

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \mu a - (\lambda - \mu) x, \quad \text{oder} \quad v \frac{d v}{d x} = \mu a - (\lambda - \mu) x. \tag{2}$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{v^2}{2} = \mu a x - (\lambda - \mu) \frac{x^2}{2} + C.$$

Weil aber für $x = 0$, $v = 0$ ist, so ist $C = 0$, mithin die Bewegung bestimmt durch die Gleichung

$$v^2 = 2 \mu a x - (\lambda - \mu) x^2.$$

Der materielle Punkt besitzt offenbar seine äussersten Grenzlagen, wenn die Geschwindigkeit $v = 0$ ist, weshalb für dieselben die Gleichung bestehen muss

$$0 = \{2 \mu a - (\lambda - \mu) x\} x,$$

woraus folgt

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{2 \mu a}{\lambda - \mu}. \tag{3}$$

Der grösste Abstand des materiellen Punktes von dem Kraftcentrum ist daher

$$a + x = a + \frac{2\mu a}{\lambda - \mu} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} a. \tag{4}$$

Das Integral der Gleichung (2) ist:

$$x = \frac{\mu a}{\lambda - \mu} + A \cos(\sqrt{\lambda - \mu} . t + B),$$

woraus sofort als die Zeit T der Rückkehr nach der Anfangslage folgt

$$T = \frac{2\pi}{\lambda - \mu}.$$

2. Ein feiner, elastischer Faden hängt von einem festen Punkte A vertikal herab, an seinem unteren Ende B zwei Gewichte G_1, G_2 tragend. Die ungespannte Länge des Fadens ist a. Das Gewicht G_2 wird plötzlich weggenommen, so dass infolge der Elastizität des Fadens das Gewicht G_1 nach oben hin sich bewegt. Welches ist die Tiefe des materiellen Punktes G_1 unter dem Aufhängepunkte zur Zeit t der Bewegung?

Bezeichnet α die Dehnung des Fadens durch das Gewicht G_1, β diejenige durch das Gewicht G_2 und ist λ der Elastizitätscoëfficient, dann sind nach Hookes Gesetz die Dehnungen $\alpha = \frac{a}{\lambda} G_1$, $\beta = \frac{a}{\lambda} G_2$, so dass der Faden in dem Momente, bevor das Gewicht G_2 entfernt wird, die Gesamtlänge $a + \alpha + \beta = a\left\{1 + \frac{1}{\lambda}(G_1 + G_2)\right\}$ besitzt.

Den Punkt, welchen das Fadenende durch das streckende Gewicht G_1 erreicht, wollen wir als Nullpunkt der Abscissen wählen und sei von demselben der Abstand des Fadenendes zur Zeit t nach Wegnahme des Gewichtes G_2 gleich x, dann ist an dieser Stelle die bewegende Kraft $\frac{\lambda}{a} x$. Ist nun g die Beschleunigung, mit welcher das Gewicht $G_2 = \frac{\lambda}{a} \beta$ frei fallen würde, so ist offenbar für die Beschleunigung g' im Punkte x, da die Kräfte den Beschleunigungen direkt proportional sind, $g' : g = \frac{\lambda}{a} x : \frac{\lambda}{a} \beta$, folglich $g' = g \frac{x}{\beta}$.

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{\beta} x,$$

welche sagt, dass

$$x = A \sin\sqrt{\frac{g}{\beta}}\, t + B \cos\sqrt{\frac{g}{\beta}}\, t, \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{\beta}} \left\{A \cos\sqrt{\frac{g}{\beta}}\, t - B \sin\sqrt{\frac{g}{\beta}}\, t\right\}.$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $x = \beta, \frac{dx}{dt} = 0$, folglich sind die Werte der Integrationskonstanten $A = 0$, $B = \beta$, wodurch

$$x = \beta \cos \sqrt{\frac{g}{\beta}}\, t, \quad \frac{dx}{dt} = v = -\sqrt{\beta g} \sin \sqrt{\frac{g}{\beta}}\, t.$$

Für den Abstand x' des freien Fadenendes vom Aufhängepunkte zur Zeit t bekommen wir demnach

$$x' = a + \alpha + x = a + \alpha + \beta \cos \sqrt{\frac{g}{\beta}}\, t,$$

oder, wenn wir die Werte von α und β substituieren,

$$x' = a + \frac{a}{\lambda} \left\{ G_1 + G_2 \cos \sqrt{\frac{g \lambda}{a G_2}} \cdot t \right\}.$$

3. Zwei durch einen feinen, elastischen Faden verbundene materielle Punkte gleicher Masse bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit v_0 in einem Abstande $a =$ der natürlichen Länge des Fadens von einander in dem nämlichen Sinne in der Richtung des Fadens. Plötzlich wird der hintere materielle Punkt festgehalten und es soll ermittelt werden, wie weit sich der andere materielle Punkt fortbewegt, ehe er beginnt zurückzukehren.

Es sei m die Masse eines jeden der materiellen Punkte, λ der Elastcitätsmodulus des Fadens, x der Abstand des sich bewegenden Punktes von dem Ende des ungedehnten Fadens, an welches er gefesselt ist zur Zeit t, gerechnet vom Beginne des Festhaltens des anderen Punktes. Die an dem freien Endpunkte des Fadens wirkende Kraft ist $-\lambda \frac{x}{a}$, so dass wir die Bewegungsgleichung erhalten

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m v \frac{dv}{dx} = -\frac{\lambda}{a} x, \quad \text{oder} \quad v\, dv = -\frac{\lambda}{m a} x\, dx.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$v^2 = -\frac{\lambda}{m a} x^2 + C.$$

Mit $x = 0$ ist aber $v = v_0$, folglich $C = v_0^2$ und daher

$$v^2 = v_0^2 - \frac{\lambda}{m a} x^2.$$

Der Punkt erreicht seinen grössten Abstand von dem freien Ende des ungestreckten Fadens mit $v = 0$, so dass die gesuchte Entfernung aus der Gleichung resultiert

$$0 = v_0^2 - \frac{\lambda}{m a} x^2,$$

welche giebt

$$x_{max} = v_0 \sqrt{\frac{m a}{\lambda}}.$$

4. Ein materieller Punkt ist genötigt, sich in einer geraden Linie zu bewegen, er ist gefesselt an das eine Ende eines feinen elastischen Fadens, dessen anderes Ende in einem Abstande von der geraden Linie gleich der ungestreckten Länge des Fadens an einem festen Punkte befestigt ist. Welches ist die Zeit einer kleinen Schwingung?

Es sei a die natürliche Länge des Fadens, m die Masse des materiellen Punktes, s sein Abstand zu einer beliebigen Zeit t von seiner Gleichgewichtslage, T die Spannung des Fadens und l seine Länge zu derselben Zeit, λ der Elastizitätsmodulus des Fadens.

Die Bewegungsgleichung des Punktes und die Länge l des Fadens sind

$$m\frac{d^2 s}{d t^2} = -\frac{T s}{l}, \quad (1) \qquad l = a\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right). \quad (2)$$

Nun ist s eine kleine Grösse, so dass

$$l = \sqrt{a^2 + s^2} = a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{s^2}{a^2}\right) \text{ annähernd,}$$

folglich mit (2)

$$a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{s^2}{a^2}\right) = a\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right), \qquad T = \frac{\lambda s^2}{2 a^2},$$

und daher durch (1)

$$m\frac{d^2 s}{d t^2} = -\frac{\lambda s^3}{2 a^2 l} = -\frac{\lambda s^3}{2 a^3} \text{ annähernd.}$$

Multiplizierend mit $2\frac{ds}{dt}$ und integrierend, bekommen wir

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = C - \frac{\lambda s^4}{4 a^3},$$

Ist c der Wert von s, wenn $\frac{ds}{dt} = 0$, dann ist $C = \frac{\lambda c^4}{4 a^3}$, folglich

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\lambda}{4 a^3}(c^4 - s^4).$$

Daraus ergiebt sich unter der Voraussetzung, dass s abnimmt, wenn t wächst,

$$2 a\sqrt{\frac{a m}{\lambda}}\frac{ds}{\sqrt{c^4 - s^4}} = -dt,$$

oder, wenn wir $s = c \cos\varphi$ setzen,

$$\frac{2 a}{c}\sqrt{\frac{a m}{\lambda}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}} = dt.$$

und daher, $0, \pi$ sind die Werte von φ, welche den Werten c, $-c$ für s entsprechen, ist die Zeit einer kompleten Schwingung gleich

$$\sqrt{2}\frac{a}{c}\sqrt{\frac{a m}{\lambda}}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

eine elliptische Funktion, deren Modulus $\sin\frac{\pi}{4}$ ist.

Walton, p. 302.

5. Ein materieller Punkt bewegt sich auf einer rauhen, mit der Vertikalen einen Winkel α einschliessenden geraden Linie unter der Wirkung der Schwerkraft. Welches ist seine Bewegung?

Diese Aufgabe lässt sich ohne Anwendung der allgemeinen Formeln lösen. Zerlegen wir das Gewicht mg des materiellen Punktes in seine Componenten parallel und senkrecht zur Bahn, so sind dieselben, da mg vertikal abwärts wirkt, $mg\cos\alpha$, $mg\sin\alpha$, die erstere erzeugt die Bewegung herab die Gerade, wenn keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden ist, die letztere den Normaldruck auf die Gerade. Bezeichnet x den Abstand des materiellen Punktes zur Zeit t von seiner Anfangslage, gemessen parallel zu der Bahn, so erhalten wir für die Bewegung die Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg\cos\alpha-\mu N, \qquad N=mg\sin\alpha,$$

folglich ist

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g(\cos\alpha-\mu\sin\alpha).$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{dx}{dt}=v=g(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)t+C, \quad x=g(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)\frac{t^2}{2}+Ct+D.$$

Ist nun v_0 die Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der Bahn und ist dieselbe gleichen Sinnes wie die Kraft $mg\cos\alpha$, so ergiebt sich, da dann zur Zeit $t=0$, $v=v_0$, $x=0$,

$$v=v_0+g(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)t, \qquad x=v_0t+\frac{g}{2}(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)t^2.$$

Die Bewegung ist daher eine gleichförmig beschleunigte, jedoch nur so lange als $\mu<tg\,\alpha$. Mit $\mu=tg\,\alpha$ geht die Bewegung in eine gleichförmige über, oder sie wird unmöglich, wenn $v_0=0$, denn in diesem Falle wird $v=0$, $s=0$.

Bewegt sich der materielle Punkt die geneigte Gerade hinauf, dann wirkt die Beschleunigung $g\cos\alpha$ verzögernd, wie die Reibungsbeschleunigung, und haben wir jetzt die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g(\cos\alpha+\mu\sin\alpha), \qquad N=mg\sin\alpha,$$

woraus folgt, wenn v_0 die Anfangsgeschwindigkeit die geneigte Gerade hinauf bezeichnet.

$$v = v_0 - g\,(cos\,\alpha + \mu\,sin\,\alpha)\,t, \qquad x = v_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,(cos\,\alpha + \mu\,sin\,\alpha)\,t^2.$$

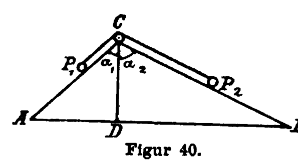
Die Geschwindigkeit wird gleich Null zur Zeit

$$t = \frac{v_0}{g\,(cos\,\alpha + \mu\,sin\,\alpha)},$$

und der bis dahin zurückgelegte Weg ist

$$x = \frac{{v_0}^2}{2\,g\,(cos\,\alpha + \mu\,sin\,\alpha)}.$$

6. Zwei auf verschieden geneigten, Rücken an Rücken liegenden Ebenen befindliche materielle Punkte sind durch einen vollkommen biegsamen, unelastischen, gewichtslosen Faden, welcher über eine vollkommen glatte Leitrolle in dem gemeinsamen Scheitel der zwei Ebenen läuft, und deren Teile parallel zu den entsprechenden Falllinien der geneigten Ebenen sind, verbunden. Welches ist die Bewegung des Systemes, wenn ausser der Schwere keine Kraft wirkt und die Oberflächenbeschaffenheit beider Ebenen verschieden ist?



Figur 40.

Es seien AC, BC (Fig. 40) die in einer vertikalen Ebene liegenden Falllinien der beiden Ebenen, CD sei die Vertikale durch C, $\angle ACD = \alpha_1$, $\angle BCD = \alpha_2$, P_1, P_2 seien die beiden materiellen Punkte, m_1, m_2 ihre Massen, μ_1, μ_2 die Reibungscoëfficienten für die Ebenen AC, BC. Endlich sei $CP_1 = x_1$, $CP_2 = x_2$ zur Zeit t, $x_1 + x_2 = l =$ der Länge des Fadens P_1CP_2.

Nehmen wir an, dass P_1 sinkt während P_2 steigt, dann ist die bewegende Kraft

$$P = m_1\,g\,(cos\,\alpha_1 - \mu_1\,sin\,\alpha_1) - m_2\,g\,(cos\,\alpha_2 + \mu_2\,sin\,\alpha_2),$$

folglich die Beschleunigung

$$\varphi = \frac{m_1\,(cos\,\alpha_1 - \mu_1\,sin\,\alpha_1) - m_2\,(cos\,\alpha_2 + \mu_2\,sin\,\alpha_2)}{m_1 + m_2}\,g. \tag{1}$$

Ist zur Zeit $t = 0$ das System in Ruhe, der Abstand des Masse m_1 von C gleich x_0, so erhalten wir durch Integration

$$v = \frac{m_1\,(cos\,\alpha_1 - \mu_1\,sin\,\alpha_1) - m_2\,(cos\,\alpha_2 + \mu_2\,sin\,\alpha_2)}{m_1 + m_2}\,g\,t, \tag{2}$$

$$x_1 - x_0 = \frac{m_1\,(cos\,\alpha_1 - \mu_1\,sin\,\alpha_1) - m_2\,(cos\,\alpha_2 + \mu_2\,sin\,\alpha_2)}{m_1 + m_2}\,\frac{g\,t^2}{2}, \tag{3}$$

auch ist $$x_2 = l - x_1.$$

Die Spannung des Fadens, welche T sein möge, geht offenbar aus der gegenseitigen Zerstörung der ursprünglichen Kräfte mit den Gegenkräften hervor, so dass

$$T = m_1 g (\cos\alpha_1 - \mu_1 \sin\alpha_1) - m_1\varphi = m_2 g (\cos\alpha_2 + \mu_2 \sin\alpha_2) + m_2\varphi, \tag{4}$$

und erhalten wir daraus mit Rücksicht auf (1)

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g\, (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 - \mu_1 \sin\alpha_1 + \mu_2 \sin\alpha_2). \tag{5}$$

Die Bedingung, damit P_1 sinkt, während P_2 steigt, ist

$$m_1 (\cos\alpha_1 - \mu_1 \sin\alpha_1) > m_2 (\cos\alpha_2 + \mu_2 \sin\alpha_2), \text{ oder } \frac{m_1}{m_2} > \frac{\cos\alpha_2 + \mu_2 \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 - \mu_1 \sin\alpha_1}.$$

Soll hingegen P_1 steigen und P_2 sinken, dann muss sein

$$\frac{m_2}{m_1} > \frac{\cos\alpha_1 + \mu_1 \sin\alpha_1}{\cos\alpha_2 - \mu_2 \sin\alpha_2}, \quad \text{oder} \quad \frac{m_1}{m_2} < \frac{\cos\alpha_2 - \mu_2 \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \mu_2 \sin\alpha_1}.$$

Sind die Coëfficienten der Reibung einander gleich, gleich μ, dann haben wir für das Sinken oder Steigen von P_1 die Bedingung

$$\frac{m_1}{m_2} \gtrless \frac{\cos\alpha_2 \pm \mu \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 \mp \mu \sin\alpha_1},$$

und mit Einführung des Reibungswinkels ϱ, weil $\mu = tg\,\varrho$ ist,

$$\frac{m_1}{m_2} \gtrless \frac{\cos(\alpha_2 \mp \varrho)}{\cos(\alpha_1 \pm \varrho)}.$$

So lange mithin $\frac{m_1}{m_2}$ innerhalb der Grenzen $\frac{\cos(\alpha_2 - \varrho)}{\cos(\alpha_1 + \varrho)}$ und $\frac{\cos(\alpha_2 + \varrho)}{\cos(\alpha_1 - \varrho)}$ liegt, wird der Reibungswiderstand jede Bewegung verhindern.

Mit $\alpha_2 = 0$ wird die Ebene BC vertikal, es tritt dann der besondere Fall ein, dass die Masse m_2 sich frei in einer vertikalen Linie bewegt. Sinkt in diesem Falle P_1, so ist

$$\varphi = \frac{m_1(\cos\alpha_1 - \mu_1 \sin\alpha_1) - m_2}{m_1 + m_2}\, g, \quad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g\, (1 + \cos\alpha_1 - \mu_1 \sin\alpha_1).$$

Steigt dagegen P_1, so haben wir

$$\varphi = -\frac{m_1(\cos\alpha_1 + \mu_1 \sin\alpha_1) - m_2}{m_1 + m_2}, \quad T = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g (1 + \cos\alpha_1 + \mu_1 \sin\alpha_1).$$

Werden beide Ebenen vertikal, dann wird $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, wir haben in diesem Falle das über eine feste Rolle gelegte Seil, welches an seinen Enden die Massen m_1, m_2 trägt, und geben hierfür die obigen Formeln sofort

$$\varphi = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g, \quad v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g\, t, \quad x_1 - x_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, \frac{g t^2}{2}.$$

Je nachdem $m_1 \gtrless m_2$ ist, bewegt sich die Masse m_1 ab- oder aufwärts. Die Spannung des Fadens ist in diesen Fällen

$$T = \pm 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Mit $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$ ist die Ebene AC horizontal, eine Bewegung findet nur dann statt, wenn die Masse m_2 sinken kann, so dass

$$\varphi = \frac{m_2 - \mu_1 m_1}{m_1 + m_2} g, \qquad T = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \mu_1).$$

In allen diesen Fällen ist die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte und die Spannung des Fadens während der ganzen Bewegung eine konstante Grösse.

7. Ein schwerer Punkt gleitet auf einer rauhen Cycloide mit horizontaler Basis, vertikaler Axe und abwärts gelegenem Scheitel unter der Wirkung der Schwere sich vom höchsten Punkte der Curve aus mit einer Anfangsgeschwindigkeit Null bewegend. Wie gross muss der Reibungscoëfficient sein, damit der Punkt mit einer Geschwindigkeit $v = 0$ im Scheitel der Curve ankommen kann?

Als Axe der x nehmen wir die Axe der Curve, als Axe der y die Tangente in ihrem Scheitel. Der Reibungscoëfficient sei μ, v die Geschwindigkeit in einem beliebigen Bahnpunkte, ϱ der Krümmungshalbmesser daselbst, m die Masse des materiellen Punktes, N die Normalreaktion der Curve.

Damit bekommen wir für die Bewegung des Punktes

$$mv \frac{dv}{ds} = -mg \frac{dx}{ds} + \mu N, \qquad N = \frac{mv^2}{\varrho} + mg \frac{dy}{ds},$$

so dass

$$v \frac{dv}{ds} = -g \frac{dx}{ds} + \mu \frac{v^2}{\varrho} + \mu g \frac{dy}{ds}.$$

Nun sind die Gleichungen der Cycloide

$$x = a (1 - \cos \varphi), \qquad y = a (\varphi + \sin \varphi),$$

wodurch

$$s = 4 a \sin \frac{\varphi}{2}, \qquad \varrho = 4 a \cos \frac{\varphi}{2},$$

folglich ist auch

$$2 v\, dv - \mu v^2 d\varphi = -2 a g \sin \varphi \, d\varphi + 2 \mu a g (1 + \cos \varphi) \, d\varphi,$$

$$d(v^2 e^{-\mu\varphi}) = -2 a g e^{-\mu\varphi} \sin \varphi \, d\varphi + 2 \mu a g e^{-\mu\varphi} (1 + \cos \varphi) \, d\varphi.$$

Integrierend von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ und beachtend, dass an beiden Grenzen $v = 0$ ist, erhalten wir

$$0 = \mu \int_0^\pi e^{-\mu\varphi} (1 + \cos \varphi) \, d\varphi - \int_0^\pi e^{-\mu\varphi} \sin \varphi \, d\varphi.$$

Indem wir nun hier teilweise Integration anwenden, werden wir leicht finden, dass

$$\int_0^\pi e^{-\mu\varphi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{1 + e^{-\mu\pi}}{1 + \mu^2}, \qquad \int_0^\pi e^{-\mu\varphi} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{\mu}{1 + \mu^2}(1 + e^{-\mu\pi}),$$

und daher ist
$$1 - e^{-\mu\pi} + \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}(1 + e^{-\mu\pi}) = 0,$$

woraus folgt
$$\mu^2 e^{\mu\pi} = 1.$$

Durch diese Relation ist der Wert von μ bestimmt.

Walton, p. 324.

8. Ein materieller Punkt befindet sich auf einer rauhen, geneigten Ebene mit grösserem Neigungswinkel als dem Indifferenzwinkel; er ist durch einen feinen, elastischen Faden, welcher parallel mit der Falllinie der Ebene läuft, an einen festen Punkt gefesselt. Anfangs ist der materielle Punkt in Ruhe und der Faden von seiner natürlichen Länge. Welches ist die resultierende Bewegung des Punktes unter alleiniger Wirkung der Schwerkraft?

Es sei a die natürliche Länge des Fadens, x seine Dehnung, x_1 seine Länge am Ende einer beliebigen Zeit t, α die Horizontalneigung der Ebene, m die Masse des materiellen Punktes, λ diejenige Spannung, welche den Faden um seine natürliche Länge ausdehnt. Die Elastizität des Fadens wirkt der beschleunigenden Kraft herab die Ebene in deren Richtung entgegen. Rechnen wir die Bewegung von der Ruhelage des Punktes an, so ist, weil seine Beschleunigung durch die Schwerkraft $g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ und die verzögernde Kraft $\lambda\frac{x}{a}$ hervorgebracht wird, die Gleichung der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{\lambda}{ma}x.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$x = \frac{mag(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\lambda} + A\sin\sqrt{\frac{\lambda}{ma}}t + B\cos\sqrt{\frac{\lambda}{ma}}t,$$

und
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\lambda}{ma}}\left(A\cos\sqrt{\frac{\lambda}{ma}}t - B\sin\sqrt{\frac{\lambda}{ma}}t\right).$$

Mit $t = 0$ ist $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, folglich sind die Werte der Integrationskonstanten $A = 0$, $B = -\frac{mag}{\lambda}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, womit sich ergiebt

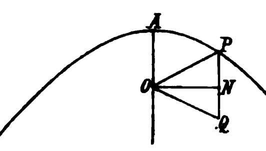
$$x = \frac{m a g}{\lambda} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \left(1 - \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m a}} t\right)$$

$$= \frac{m a g}{\lambda} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \operatorname{vers} \sqrt{\frac{\lambda}{m a}} t,$$

$$x_1 = \frac{a (\lambda + m g)}{\lambda} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \operatorname{vers} \sqrt{\frac{\lambda}{m a}} t,$$

$$v = g \sqrt{\frac{m a}{\lambda}} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m a}} t.$$

8. Ein endloser Faden POQ (Fig. 41) läuft durch einen glatten, unbeweglichen Ring bei O und liegt auf einem horizontalen Tische in der Form eines gleichschenkeligen Dreieckes mit dem Scheitel in O. In P und Q befinden sich zwei kleine Kugeln gleicher Masse, die sich entlang des Fadens bewegen können. Die Kugeln werden mit gleichen Geschwindigkeiten entlang der äusseren Halbierungslinien der Winkel OPQ, OQP resp. geworfen. Welches ist die Spannung des Fadens während der Bewegung?



Figur 41.

Von O fälle das Perpendikel ON auf PQ, nimm $c =$ der halben Länge des Fadens, ziehe OA parallel zu PQ und mache $OA = \frac{c}{2}$. Weil $OP + NP = c$, ist der Weg von P eine Parabel mit dem Brennpunkte in O und dem Scheitel A; die Tangente der Bahn bei P ist wegen der Beschaffenheit der Parabel die äussere Halbierungslinie des Winkels OPQ. Es sei v die Geschwindigkeit von P, T die Spannung des Fadens, welche auf P in den Richtungen PO und PN wirkt. Weil PO und PN gleiche Winkel mit der Tangente in P machen, wird v konstant sein. Es sei R der resultierende Druck auf P, welcher entlang der Normalen wirkt, ϱ der Krümmungshalbmesser der Bahn daselbst, m die Masse einer der Kugeln. Damit ist $R = \frac{mv^2}{\varrho}$, oder, weil $\varrho = \frac{(2r)^{\frac{3}{2}}}{c}$, wo $r = OP$ ist, ist auch

$$R = m v^2 \sqrt{\frac{c}{(2r)^3}}.$$

Ist $\vartheta =$ der Neigung der Normalen zu PN oder PO, dann ist $R = 2 T \cos \vartheta$. Aber aus der Beschaffenheit der Parabel folgt leicht, dass $\cos \vartheta = \sqrt{\frac{c}{2r}}$, folglich ist auch

$$R = T\sqrt{\frac{2c}{r}},$$

und daher
$$T = \frac{m v^2}{4 r}.$$

Daraus erkennen wir, dass während der Bewegung die Spannung des Fadens sich umgekehrt proportional dem Abstande einer der kleinen Kugeln von dem Ringe ändert.

Walton, p. 316.

10. Zwei materielle Punkte P, Q (Fig. 42) sind mit einander durch einen starren, gewichtslosen Stab PQ verbunden. P kann sich in einer glatten, horizontalen Rinne OX bewegen und Q irgendwo auf einer glatten durch die Rinne laufenden horizontalen Ebene. Die Verhältnisse beim Beginne der zu betrachtenden Bewegung sind gegeben. Die Bewegung des Systemes ist zu untersuchen.

Figur 42.

Es sei T die Spannung des Stabes zu einer beliebigen Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung, ϑ seine Neigung zur Linie OX, O ein fester Punkt in OX, $QN \perp OX$, $ON = x'$, $QN = y'$, $OP = x$, $\omega =$ der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit von Q um P, $v_0 =$ der Anfangsgeschwindigkeit von P, $\alpha =$ dem Anfangswerte von ϑ, $m_1 =$ der Masse des materiellen Punktes P, $m_2 =$ derjenigen des materiellen Punktes Q, $a =$ der Länge des Stabes PQ.

Für die Bewegung des Punktes P besteht die Gleichung

$$m_1 \frac{d^2 x}{d t^2} = - T \cos \vartheta, \tag{1}$$

und für diejenige von Q ist

$$m_2 \frac{d^2 x'}{d t^2} = T \cos \vartheta, \quad (2) \qquad m_2 \frac{d^2 y'}{d t^2} = - T \sin \vartheta. \quad (3)$$

Die Addition der Gleichungen (1) und (2) giebt

$$m_1 \frac{d^2 x}{d t^2} + m_2 \frac{d^2 x'}{d t^2} = 0. \tag{4}$$

Die Multiplikation von (1) mit $\sin \vartheta$, von (3) mit $\cos \vartheta$ und die Subtraktion der letzteren resultierenden Gleichung von der ersteren liefert

$$m_1 \sin \vartheta \frac{d^2 x}{d t^2} - m_2 \cos \vartheta \frac{d^2 y'}{d t^2} = 0. \tag{5}$$

Die geometrischen Bedingungen sind

$$x' = x - a \cos \vartheta, \quad (6) \qquad y' = a \sin \vartheta. \quad (7)$$

Durch (4) und (6) erhalten wir

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2 x}{d t^2} - m_2 a \frac{d^2}{d t^2} \cos \vartheta = 0,$$

durch (5) und (7)

$$m_1 \sin \vartheta \frac{d^2 x}{d t^2} - m_2 a \cos \vartheta \frac{d^2}{d t^2} \sin \vartheta = 0.$$

Nun ergiebt sich durch die Elimination von $\frac{d^2 x}{d t^2}$ aus den zwei letzten Gleichungen

$$(m_1 + m_2) \cos \vartheta \frac{d^2}{d t^2} \sin \vartheta - m_1 \sin \vartheta \frac{d^2}{d t^2} \cos \vartheta = 0.$$

Indem wir hier mit $2 \frac{d \vartheta}{d t}$ multiplizieren und integrieren, wird

$$(m_1 + m_2) \left(\frac{d}{d t} \sin \vartheta\right)^2 + m_1 \left(\frac{d}{d t} \cos \vartheta\right)^2 = C,$$

$$(m_1 + m_2 \cos^2 \vartheta) \left(\frac{d \vartheta}{d t}\right)^2 = C.$$

Aber anfangs ist $\vartheta = \alpha$, $\frac{d \vartheta}{d t} = \omega$, folglich $(m_1 + m_2 \cos^2 \alpha)\, \omega^2 = C$, und daher

$$\left(\frac{d \vartheta}{d t}\right)^2 = \omega^2 \frac{m_1 + m_2 \cos^2 \alpha}{m_1 + m_2 \cos^2 \vartheta}. \tag{8}$$

Ferner erhalten wir durch Integration von (4)

$$m_1 \frac{d x}{d t} + m_2 \frac{d x'}{d t} = C,$$

und daher mit (6)

$$(m_1 + m_2) \frac{d x}{d t} + m_2 a \sin \vartheta \frac{d \vartheta}{d t} = C.$$

Weil aber beim Beginn der Bewegung $\frac{d x}{d t} = v_0$, $\frac{d \vartheta}{d t} = \omega$, $\vartheta = \alpha$, so ist

$$(m_1 + m_2) v_0 + m_2 a \omega \sin \alpha = C,$$

mithin

$$\frac{d x}{d t} = v_0 + \frac{m_2 a \omega \sin \alpha}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 a \sin \vartheta}{m_1 + m_2} \frac{d \vartheta}{d t},$$

und ist nun mit (8)

$$\frac{d x}{d t} = v_0 + \frac{m_2 a \omega \sin \alpha}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 a \omega \sin \vartheta}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1 + m_2 \cos^2 \alpha}{m_1 + m_2 \cos^2 \vartheta}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Die Gleichungen (8) und (9) geben uns die Geschwindigkeit von P entlang $O X$ und die Winkelgeschwindigkeit von Q um P für irgend eine bestimmte Neigung des Stabes $P Q$ zur Linie $O X$. Wenn wir aus diesen

zwei Gleichungen dt eliminieren, so erhalten wir eine Differentialgleichung der Bahn des Punktes Q in x und ϑ.

Die Gleichung (8) sagt noch, dass

$$t = \frac{\omega}{\sqrt{m_1 + m_2 \cos^2 \alpha}} \int_\alpha^\vartheta \sqrt{m_1 + m_2 \cos^2 \vartheta}\, d\vartheta$$

ist. Durch dieses elliptische, transcendente Integral ist die Zeit t für einen beliebigen Wert von ϑ bestimmt.

Clairaut, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1736, p. 10.
Walton, p. 356.

11. Zwei materielle Punkte P_1, P_2 (Fig. 43) von den Massen m_1, m_2 sind durch einen geraden, starren, gewichtslosen Stab miteinander verbunden und genötigt, sich in zwei geraden Rinnen $A a_1$, $A a_2$, welche zu dem Horizonte unter gegebenen Winkeln geneigt sind und in einer vertikalen Ebene liegen, zu bewegen, kleine Schwingungen machend. Welches ist die Länge des isochronen Pendels?

Figur 43.

Die Linien $A P_1$, $A P_2$ mögen mit der vertikalen Linie durch A die Winkel α_1, α_2 machen, $\measuredangle P_1 A P_2$ sei gleich i. Lasse sein T die Wirkung des Stabes auf jeden der materiellen Punkte, die Richtung dieser Wirkung wird mit der Mittellinie des Stabes zusammenfallen. Ferner sei $A P_1 = x$, $A P_2 = x'$, $P_1 P_2 = c$, $\measuredangle P_2 P_1 a_1 = \varphi_1$, $\measuredangle P_1 P_2 a_2 = \varphi_2$.

Indem wir die Kräfte parallel $A P_1$, $A P_2$ und normal dazu zerlegen, erhalten wir für die Bewegung der zwei materiellen Punkte

$$m_1 \frac{d^2 x}{d t^2} = m_1 g \cos \alpha_1 - T \cos \varphi_1, \qquad m_2 \frac{d^2 x'}{d t^2} = m_2 g \cos \alpha_2 - T \cos \varphi_2.$$

Durch die Elimination von T aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$m_1 \cos \varphi_2 \frac{d^2 x}{d t^2} - m_2 \cos \varphi_1 \frac{d^2 x'}{d t^2} = m_1 g \cos \alpha_1 \cos \varphi_2 - m_2 g \cos \alpha_2 \cos \varphi_1.$$

Ferner giebt uns die Geometrie die Relationen

$$c \cos \varphi_1 = x' \cos i - x, \qquad c \cos \varphi_2 = x \cos i - x',$$

folglich ist

$$- m_1 (x' - x \cos i) \frac{d^2 x}{d t^2} + m_2 (x - x' \cos i) \frac{d^2 x'}{d t^2}$$
$$= - m_1 g \cos \alpha_1 (x' - x \cos i) + m_2 g \cos \alpha_2 (x - x' \cos i). \qquad (1)$$

Sind nun a_1, a_2 die Werte von x, x', welche einer Gleichgewichtslage entsprechen, dann muss sein, weil für eine solche Lage $\frac{d^2 x}{d t^2}$, $\frac{d^2 x'}{d t^2}$ beide gleich Null sind,

$$0 = -m_1 \cos\alpha_1 (a_2 - a_1 \cos i) + m_2 \cos\alpha_2 (a_1 - a_2 \cos i). \qquad (2)$$

Setzen wir $x = a_1 + v_1$, $x' = a_2 + v_2$, so sind v_1, v_2 durch die Hypothese kleine Grössen, dann erhalten wir aus der Gleichung (1), insofern nur unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung berücksichtigt werden, mit Hilfe von (2)

$$-m_1 (a_2 - a_1 \cos i) \frac{d^2 v_1}{d t^2} + m_2 (a_1 - a_2 \cos i) \frac{d^2 v_2}{d t^2}$$

$$= -m_1 g \cos\alpha_1 (v_2 - v_1 \cos i) + m_2 g \cos\alpha_2 (v_1 - v_2 \cos i). \qquad (3)$$

Aber die Geometrie sagt uns, dass

$$c^2 = x^2 + x'^2 - 2 x x' \cos i,$$

wodurch $\quad 0 = x \delta x + x' \delta x' - (x \delta x' + x' \delta x) \cos i$ ist,

und weil $\delta x = v_1$, $\delta x' = v_2$, $x = a_1 + v_1$, $x' = a_2 + v_2$ ist, so bekommen wir, wenn wir nur unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung berücksichtigen,

$$0 = (a_1 - a_2 \cos i) v_1 + (a_2 - a_1 \cos i) v_2. \qquad (4)$$

Stellt jetzt r die Länge des isochronen Pendels dar, dann ist

$$v_1 = k_1 \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{r}}\, t + \varepsilon\right\}, \qquad v_2 = k_2 \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{r}}\, t + \varepsilon\right\},$$

wo k_1, k_2, ε konstante Grössen sind. Diese Werte von v_1 und v_2 substituieren wir in die Gleichungen (3) und (4), wodurch wir erhalten

$$m_1 (a_2 - a_1 \cos i) \frac{k_1}{r} - m_2 (a_1 - a_2 \cos i) \frac{k_2}{r}$$

$$= k_1 (m_1 \cos\alpha_1 \cos i + m_2 \cos\alpha_2) - k_2 (m_2 \cos\alpha_2 \cos i + m_1 \cos\alpha_1),$$

und $\quad (a_1 - a_2 \cos i) k_1 + (a_2 - a_1 \cos i) k_2 = 0.$

Nun giebt die Elimination von k_1 und k_2 aus diesen zwei Gleichungen

$$\frac{m_1}{r} (a_2 - a_1 \cos i)^2 + \frac{m_2}{r} (a_1 - a_2 \cos i)^2$$

$$= m_1 a_1 \cos\alpha_1 \sin^2 i + m_2 a_2 \cos\alpha_2 \sin^2 i,$$

und mithin ist

$$r = \frac{m_1 (a_2 - a_1 \cos i)^2 + m_2 (a_1 - a_2 \cos i)^2}{(m_1 a_1 \cos\alpha_1 + m_2 a_2 \cos\alpha_2) \sin^2 i}. \qquad (5)$$

Von P_1 ziehe $P_1 O$ rechtwinkelig zu $A P_1$, welche Linie die $P_2 O$, gezogen aus P_2 rechtwinkelig zu $A P_2$, schneidet; dann ist die Projektion von $O P_1$ auf die Linie $A P_2$ gleich $O P_1 \sin i$ und die Projektion von $P_1 P_2$ auf die Linie $A P_1$ ist gleich $a_2 - a_1 \cos i$; diese zwei Projektionen fallen offenbar zusammen, folglich ist

$$\overline{O P_1}^2 \sin^2 i = (a_2 - a_1 \cos i)^2, \qquad \overline{O P_2}^2 \sin^2 i = (a_1 - a_2 \cos i)^2$$

in ähnlicher Weise.

Weiter sei S der Schwerpunkt der Massen m_1 und m_2 in ihrer Gleichgewichtslage und H der Punkt, in welchem eine vertikale Linie durch S die horizontale Linie durch A schneidet, dann muss sein

$$(m_1 + m_2)\, S H = m_1\, a_1 \cos\alpha_1 + m_2\, a_2 \cos\alpha_2.$$

Damit geht die Gleichung (5) über in

$$r = \frac{m_1 . \overline{OP}_1{}^2 + m_2 . \overline{OP}_2{}^2}{(m_1 + m_2) . SH}.$$

Walton, p. 306.

12. Zwei materielle Punkte mit den Massen m_1 und m_2 liegen auf einer glatten, horizontalen Ebene und sind durch einen gewichtslosen Faden verbunden, welcher durch einen festen Ring geht. Wenn der erstere eine Geschwindigkeit u senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem Ringe erhält, welches ist dann die Spannung des Fadens zu einer beliebigen Zeit, und wann erreicht der zweite Punkt den Ring?

Ist a der Anfangsabstand des ersten Punktes von dem Ringe, r die Entfernung zu einer beliebigen Zeit, l die ganze Länge des Fadens, so ist

$$\text{die Spannung} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \frac{u^2 a^2}{r^3}, \qquad \text{die Zeit} = \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{u \sqrt{m_1}} \sqrt{l^2 - a^2}.$$

Zweites Kapitel.

Trägheitsmomente.

Das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Axe ist die Summe aller Produkte, welche hervorgehen aus der Multiplikation eines jeden Massenelementes des Körpers mit dem Quadrate seines Abstandes von dieser Axe. Bezeichnet M die ganze Masse des Körpers, so wird dessen Trägheitsmoment durch den Ausdruck $M k^2$ repräsentiert, wobei k eine Linie ist, welche den Namen „Trägheitshalbmesser" führt. Die Bezeichnung der Momente des zweiten Grades, welche hier in Frage stehen und in der Mechanik eine sehr wichtige Rolle spielen, durch den Namen „Trägheitsmomente" wurde zuerst von Euler gebraucht: „Ratio hujus denominationis ex similitudine motus progressivi est desumpta: quemadmodum enim in motu progressivo, si a vi secundum suam directionem sollicitante acceleretur, est incrementum celeritatis ut vis sollicitans divisa per massam seu inertiam; ita in motu gyratorio, quoniam loco ipsius vis sollicitantis ejus momentum considerari oportet, eam expressionem $\int r^2\, dM$, quae loco inertiae in calculum ingreditur, momentum inertiae apellemus, ut incrementum celeritatis angularis simili modo proportionale fiat momento vis sollicitantis diviso per momentum inertiae." (Euler, Theoria Motus Corporum Solidorum, p. 167.)

Besteht ein System aus einer beliebigen Zahl materieller Punkte, beziehen wir dasselbe auf drei zu einander rechtwinkelige, beliebig im Raume gelegene Coordinaten-

axen OX, OY, OZ, sind x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Systempunktes von der Masse m, A, B, C die Trägheitsmomente des Systemes bezüglich der Coordinatenaxen OX, OY, OZ, bezeichnet T das Trägheitsmoment des Systemes bezüglich einer geraden durch den Coordinatenursprung gehenden Linie, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ einschliesst, dann lehrt die Theorie, dass

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \qquad B = \Sigma m (x^2 + z^2), \qquad C = \Sigma m (x^2 + y^2),$$
$$T = \Sigma m (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + \Sigma m (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + \Sigma m (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma$$
$$- 2 \left\{ \Sigma m x y \cos \alpha \cos \beta + \Sigma m y z \cos \beta \cos \gamma + \Sigma m x z \cos \alpha \cos \gamma \right\}.$$

oder, wenn geschrieben wird $\Sigma m x y = l$, $\Sigma m y z = m$, $\Sigma m x z = n$, welche Grössen komplexe Momente genannt werden,

$$T = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2 \left\{ l \cos \alpha \cos \beta + m \cos \beta \cos \gamma + n \cos \alpha \cos \gamma \right\}.$$

Denken wir uns durch O einen Strahlenbündel gelegt, für jeden seiner Strahlen das Trägheitsmoment berechnet, auf denselben von O aus die Länge ϱ abgetragen, welche umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem entsprechenden Trägheitsmomente ist, also $\varrho = \frac{1}{\sqrt{T}}$ genommen, dann liegen die Endpunkte aller Strecken ϱ auf der Fläche eines Ellipsoides, welches zuerst von Poinsot gefunden und „Centralellipsoid" genannt wurde, vielfach auch den Nameu „Trägheitsellipsoid" führt. Die Gleichung dieses Ellipsoides ist

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2 (l x y + m y z + n x z) - 1 = 0.$$

Ist dieses Ellipsoid für irgend einen Punkt des Raumes bekannt, dann sind auch die Trägheitsmomente für alle durch diesen Punkt gehende Axen bekannt, es ist, wenn k den sogenannten Trägheitshalbmesser bedeutet,

$$T = \frac{1}{\varrho^2}, \qquad k = \sqrt{\frac{T}{M}} = \frac{1}{\varrho \sqrt{M}}.$$

Die Hauptaxen des Trägheitsellipsoides heissen Hauptträgheitsaxen, die Trägheitsmomente in Bezug auf diese Axen die Hauptträgheitsmomente des Punktes, um welchen als Mittelpunkt das Ellipsoid beschrieben ist. Der grössten Hauptaxe entspricht das kleinste, der kleinsten Hauptaxe das grösste und der mittleren ein mittleres Trägheitsmoment. Sind die Hauptträgheitsaxen des Ellipsoides Coordinatenaxen, dann ist seine Gleichung

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 - 1 = 0,$$

und das Trägheitsmoment des Systemes für eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe ist

$$T = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Bezeichnen a, b, c die Trägheitshalbmesser der Quadratmomente A, B, C, so ist der Trägheitsradius für die durch O gehende Axe mit den Neigungen α, β, γ gegen die Coordinatenaxen gegeben durch

$$k^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma.$$

Um die Hauptaxen des Trägheitsellipsoides zu bestimmen, haben wir nur diejenigen Axenrichtungen aufzusuchen, für welche $T = \frac{1}{\varrho^2}$ ein Maximum oder ein Minimum wird. Dafür giebt die Theorie der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (T - A) \cos \alpha + l \cos \beta + n \cos \gamma &= 0 \\ l \cos \alpha + (T - B) \cos \beta + m \cos \gamma &= 0 \\ n \cos \alpha + m \cos \beta + (T - C) \cos \gamma &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und

$$(T - A)(T - B)(T - C) - (T - A) m^2 - (T - B) n^2 - (T - C) l^2 + 2 l m n = 0.$$

Diese kubische Gleichung in T liefert die Maximal- und Minimalwerte von T, sind

dieselben gefunden, dann geben die drei ersteren Gleichungen die Verhältnisse $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ entsprechend jedem Werte von T und damit die Richtungen der Hauptaxen. Alle drei Wurzeln der kubischen Gleichung sind stets reell. Sind zwei ihrer Wurzeln einander gleich, dann ist das Centralellipsoid ein Rotationsellipsoid, sind alle drei Wurzeln einander gleich, so ist dasselbe eine Kugel.

Ist das Trägheitsmoment T eines Systemes in Beziehung auf eine gewisse Axe bekannt, dann ist sein Trägheitsmoment T' in Beziehung auf eine zu dieser Axe parallele Axe, wenn d den wechselseitigen Abstand beider Axen und M die ganze Masse des Systemes bezeichnet, bestimmt durch die Gleichung

$$T' = T + Md^2 - 2d\,\Sigma m x.$$

Geht die Axe, welcher das Trägheitsmoment T entspricht, durch den Schwerpunkt des Systemes, dann ist $\Sigma m x = 0$, mithin

$$T' = T + Md^2,$$

und der entsprechende Trägheitshalbmesser ergiebt sich aus der Relation

$$k'^2 = k^2 + d^2.$$

Folglich ist, wenn wir uns im Raume einen Parallelstrahlenbündel denken und dessen Strahlen als Axen von Trägheitsmomenten eines Systemes ansehen, das Trägheitsmoment für die Schwerpunktsaxe das kleinste.

Sind A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes, α, β, γ die Winkel, welche eine beliebig im Raume gelegene Axe h' oder die zu ihr parallele durch den Schwerpunkt gehende Axe h mit den Schwerpunktshauptaxen einschliesst, und ist d der wechselseitige Abstand der Axen h und h', so ist das Trägheitsmoment für die Axe h'

$$T' = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + Md^2.$$

Daraus erkennen wir, dass sich die Trägheitsmomente für alle Axen des Raumes bestimmen lassen, wenn die Trägheitsmomente für die Hauptaxen des Schwerpunktes des Systemes bekannt sind.

Denken wir uns durch den Schwerpunkt des Systemes alle möglichen Axen gelegt, dann giebt es eine Schar derselben, für welche die Trägheitsmomente gleich sind. Diese Schar liegt auf der Fläche eines Kegels zweiten Grades, seine Gleichung ist

$$(T - A)x^2 + (T - B)y^2 + (T - C)z^2 = 0.$$

Dieser Kegel hat dieselben Hauptaxen wie das Centralellipsoid $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$ und giebt den Ort konstanter Trägheitsmomente T. Der Kegel schneidet das Centralellipsoid in einer sphärischen Ellipse und hat die ihr entsprechende Kugel den Radius $\frac{1}{\sqrt{T}}$.

Nehmen wir an, dass $A < B < C$ und $T = B$ ist, dann geht die Gleichung des Kegels über in

$$(B - A)x^2 + (B - C)z^2 = 0, \quad \text{woraus folgt} \quad z = \pm\sqrt{\frac{A - B}{B - C}}\,x.$$

In diesem Falle zerlegt sich der Kegel in zwei reelle Ebenen, welche auf der Ebene der xz senkrecht stehen, durch die mittlere Axe des Ellipsoides hindurchgehen, dasselbe in zwei koncentrischen Kreisen schneiden und in zwei Scheitelfächer teilen, von denen das eine die grösste, das andere die kleinste Axe des Ellipsoides enthält. Im ersten Fache ist für alle Axen h $T > A$, aber $< B$, im zweiten für alle Axen $T < C$ aber $> B$. Ist demnach $T > A$ und $< B$, so umgiebt der Kegel der Axen h die grösste, ist $T < C$ und $> B$, so umgiebt er die kleinste Axe des Centralellipsoides. Die Gleichungen der Projektionen des Schnittes von Ellipsoid und Kegel sind

$$(A-C)x^2+(B-C)y^2=\frac{T-C}{T},\quad (A-B)x^2+(C-B)z^2=\frac{T-B}{T},$$
$$(B-A)y^2+(C-A)z^2=\frac{T-A}{T},$$

sie stellen Ellipsen dar, wie dem sein muss.

Die Axen konstanter Trägheitsmomente sind um den Schwerpunkt in einer ganz bestimmten Weise verteilt. In der Gleichung

$$T'=T+Md^2$$

können sich die Grössen T und d gleichzeitig so ändern, dass T' stets konstant bleibt. Ist h eine der durch den Schwerpunkt gehenden Axen, welche dem Kegel für das Trägheitsmoment T angehört, dann liegen alle Axen des Raumes, welche dieser parallel sind und das Moment T' besitzen, auf einem Cylinder um h, dessen Halbmesser $d=\sqrt{\frac{T'-T}{M}}$ ist. Ändert h seine Lage auf dem Kegel, dann verschiebt sich auch der Cylinder im Raume, so dass jedem Kegel eine Schar von Cylindern entspricht. Einem anderen Kegel entspricht eine andere Schar von Cylindern. Nun ist der kleinste Wert von T A, der grösste C, es kann sich daher T nur zwischen den Grenzen A und C ändern, und es ist demnach der Wert aller dieser Kegel an bestimmte Grenzen gebunden. Der grösste Wert, welchen der Axenabstand erreichen kann, ist $d=\sqrt{\frac{T'-A}{M}}$ und der kleinste Wert, unter welchen d nicht herabsinken darf, ist $d=\sqrt{\frac{T'-C}{M}}$. Denken wir uns daher mit diesen Halbmessern um den Schwerpunkt des Systemes zwei Kugeln beschrieben, dann geben ihre zu der fraglichen Schwerpunktsaxe parallelen Tangenten die Grenzlagen der Axen an, welche dieselben Trägheitsmomente T' besitzen. Zwischen diesen Grenzlagen können wir d jeden beliebigen Wert δ geben und ergiebt sich dann sofort eine Menge von Cylindern, deren Axen eine Kegelfläche $(T-A)x^2+(T-B)y^2+(T-C)z^2$ in dem Schwerpunkte bilden und deren Erzeugungslinien als Axen das Trägheitsmoment $T=T'-M\delta^2$ entspricht.

Sind die Trägheitsmomente A, B, C eines Systemes für die Hauptaxen seines Schwerpunktes bekannt, dann lassen sich die Hauptaxen für irgend einen Punkt O des Raumes finden.

Wir wählen die Hauptaxen des Schwerpunktes S als Coordinatenaxen, bezeichnen die Coordinaten des Punktes O mit x, y, z, den Abstand des Punktes O von S mit r, die Winkel, welche die durch O gehende Axe h' mit den Coordinatenaxen einschliesst, durch α, β, γ, den Abstand dieser Axe von der zu ihr parallelen Schwerpunktsaxe h mit d, dann ist das Trägheitsmoment für die Axe h'

$$T=A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma+Md^2,$$

oder

$$T=(A+Mr^2)\cos^2\alpha+(B+Mr^2)\cos^2\beta+(C+Mr^2)\cos^2\gamma-M(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2.$$

Mittelst dieser Gleichung und der Relation $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=0$ haben wir den Maximal- oder Minimalwert von T zu bestimmen. Dadurch ergiebt sich für die Maximal- und Minimalwerte von T die kubische Gleichung

$$\frac{x^2}{A+Mr^2-T}+\frac{y^2}{B+Mr^2-T}+\frac{z^2}{C+Mr^2-T}=\frac{1}{M}.$$

und für die Richtung der Hauptaxen:

$$\frac{\frac{\cos\alpha}{Mx}}{A+Mr^2-T}=\frac{\frac{\cos\beta}{My}}{B+Mr^2-T}=\frac{\frac{\cos\gamma}{Mz}}{C+Mr^2-T}.$$

Durch Einführung der Trägheitshalbmesser $a^2 = \frac{A}{M}$, $b^2 = \frac{B}{M}$, $c^2 = \frac{C}{M}$, $k^2 = \frac{T}{M}$, so dass, wenn $A < B < C$, auch $a < b < c$ ist, gehen diese Formeln über in

$$\frac{x^2}{a^2 + r^2 - k^2} + \frac{y^2}{b^2 + r^2 - k^2} + \frac{z^2}{c^2 + r^2 - k^2} = 1,$$

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{x}{a^2 + r^2 - k^2}} = \frac{\cos\beta}{\frac{y}{b^2 + r^2 - k^2}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{z}{c^2 + r^2 - k^2}}.$$

Die kubische Gleichung für T besitzt in allen Fällen drei reelle Wurzeln, dieselben liegen zwischen $-(c^2 + r^2)$ und $-(b^2 + r^2)$, $-(b^2 + r^2)$ und $-(a^2 + r^2)$, $-(a^2 + r^2)$ und $+\infty$. Denken wir uns die Wurzelwerte der Reihe nach in die Gleichung eingesetzt und lassen x, y, z variieren, dann stellt dieselbe drei Flächen zweiten Grades dar, welche die Eigenschaft besitzen, dass sie mit dem Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

konfocal sind und alle drei durch den gegebenen Punkt gehen. Die eine dieser Flächen ist ein Ellipsoid, die andere ein einfaches, die dritte ein doppeltes Hyperboloid. Die Proportion für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zeigt, dass die Richtungen der drei Hauptaxen des Punktes (x, y, z) die Normalen dieser drei Flächen sind.

Das Ellipsoid, dessen Hauptaxen die drei Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes sind, wird mit Clebsch das zweite Centralellipsoid genannt (Crelles Journal, B. 57, S. 73). Dieses Ellipsoid erhalten wir dadurch, dass wir auf jeder Schwerpunktsaxe die Länge des entsprechenden Trägheitshalbmessers und in deren Endpunkt eine Ebene normal zu ihr errichten, alle diese Ebenen berühren das Centralellipsoid. Es lässt sich jedoch auch für jeden Punkt des Raumes ein solches Ellipsoid konstruieren. Culmann betrachtet in seiner graphischen Statik ein ähnliches Centralellipsoid.

Die in einem Punkte (x, y, z) an dieses Centralellipsoid des Schwerpunktes gelegte Tangentialebene hat die Gleichung

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2} - 1 = 0,$$

und die Richtung des Perpendikels p von S auf die Tangentialebene ergiebt sich durch

$$\cos\alpha = \frac{px}{a^2}, \quad \cos\beta = \frac{py}{b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{pz}{c^2},$$

woraus folgt

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma,$$

welches der Ausdruck für den Trägheitshalbmesser k der Axe ist, die mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ einschliesst.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich: Die Hauptaxen für irgend einen Punkt des Raumes werden, wenn die Hauptaxen und Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes bekannt sind, erhalten durch Konstruktion des zweiten Centralellipsoides des Schwerpunktes und der mit ihm konfocalen Flächen zweiter Ordnung, welche durch den gegebenen Punkt gehen, die Normalen dieser drei Flächen in diesem Punkte sind die gesuchten Hauptaxen desselben

Für gewisse Punkte des Raumes geht das Centralellipsoid in ein Rotationsellipsoid über. In diesem Fall kann jeder Diameter des Ellipsoides, welcher in die Ebene der gleichen Hauptträgheitsradien fällt, als Hauptaxe angesehen werden. Für solche Punkte (x, y, z) müssen daher die Gleichungen, welche die Richtungen der Hauptaxen angeben, unabhängig von α, β, γ erfüllt werden. Dieser Bedingung wird

in den drei Fällen genügt: 1) $x = 0$ und $a^2 + r^2 - k^2 = 0$, 2) $y = 0$ und $b^2 + r^2 - k^2 = 0$, 3) $z = 0$ und $c^2 + r^2 - k^2 = 0$. Die Curve, auf welcher der Punkt in diesen Fällen liegt, ist demnach

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0, \quad \text{oder} \quad y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} - 1 = 0,$$

$$\text{oder} \quad z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Von diesen drei Curven ist stets eine imaginär. Ist $a < b < c$, dann ist die dritte eine imaginäre Linie, die erste eine Ellipse, die zweite eine Hyperbel und stimmen diese Curven mit den Brennpunktscurven des Centralellipsoides überein.

Daraus geht hervor, dass, wenn für einen Punkt (x, y, z) alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich werden sollen, er auf der Focalellipse und der Focalhyperbel zugleich liegen muss. Die Ebenen dieser zwei Curven schneiden sich in der grössten Axe des Centralellipsoides. Beide Curven haben dann einen Punkt gemein, wenn die kleinste Axe gleich der mittleren wird. Mit $a = b < c$ ist die Entfernung eines solchen Punktes vom Schwerpunkte $z = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$.

Gehen wir vom Schwerpunkte S des Systemes zu einem anderen Punkte O des Raumes über, so ändern sich im allgemeinen die Richtungen der Hauptaxen, jedoch bleiben sie sich parallel, wenn der Punkt O auf einer Schwerpunktshauptaxe selbst liegt.

Damit Punkte existieren, für welche das Centralellipsoid eine Kugel wird, ist erforderlich, dass zwei Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes einander gleich werden und ihr gemeinsamer Wert kleiner als das dritte Hauptträgheitsmoment sei (das Centralellipsoid des Schwerpunktes ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid), ist diese Bedingung erfüllt, dann giebt es auf der Axe des dritten Hauptträgheitsmomentes zwei derartige Punkte diesseits und jenseits vom Schwerpunkte in gleichem Abstande.

Ist das System, welches wir zu betrachten haben, ein homogenes, kontinuierlich den Raum erfüllendes Massensystem, wie dies gewöhnlich der Fall, von der Dichtigkeit Eins, bezogen auf drei rechtwinkelige Axen, dann gehen die Summenformeln für die Trägheitsmomente in Integrale über. Das Trägheitsmoment bezüglich der Axe der x ist

$$A = \Sigma(y^2 + z^2)\,dm = \Sigma y^2\,dm + \Sigma z^2\,dm.$$

Um $\Sigma y^2\,dm$ zu bestimmen, legen wir senkrecht zur Axe der y zwei Ebenen in den Abständen y und $y + dy$ vom Ursprunge. Alle Massenelemente des Systemes zwischen diesen Ebenen haben dasselbe y und wenn der Querschnitt im Abstande y die Grösse Y hat, so wird $\Sigma y^2\,dm = \int y^2\,Y\,dy$. In ähnlicher Weise können wir für die übrigen Momente verfahren, so dass, wenn Z der Querschnitt des Systemes senkrecht zur Axe der z im Abstande z, X derjenige senkrecht zur Axe der x im Abstande x vom Ursprunge, die Formeln entstehen

$$A = \int y^2\,Y\,dy + \int z^2\,Z\,dz, \quad B = \int z^2\,Z\,dz + \int x^2\,X\,dx, \quad C = \int x^2\,X\,dx + \int y^2\,Y\,dy,$$

wobei die Integrale zwischen den dem Systeme zukommenden Grenzen zu nehmen sind.

Da ferner das Massenelement dm in diesem Falle gleich dem Volumenelement $dx\,dy\,dz$ des homogenen Systemes ist, so gelangen wir auch für dasselbe zu den Formeln:

$$A = \iiint y^2\, dx\, dy\, dz + \iiint z^2\, dx\, dy\, dz,$$

$$B = \iiint z^2\, dx\, dy\, dz + \iiint x^2\, dx\, dy\, dz,$$

$$C = \iiint x^2\, dx\, dy\, dz + \iiint y^2\, dx\, dy\, dz.$$

$$l = \Sigma x y\, dm = \iiint x y\, dx\, dy\, dz, \qquad m = \Sigma y z\, dm = \iiint y z\, dx\, dy\, dz,$$

$$n = \Sigma x z\, dm = \iiint x z\, dx\, dy\, dz,$$

und sind die Grenzen der Integrationen durch die geometrische Gestalt des zu untersuchenden Systemes bedingt.

Ist das zu betrachtende System ein ebenes und wählen wir die Ebene der xy so, dass sie mit der Ebene desselben zusammenfällt, dann ist $z = 0$ und vereinfachen sich die Formeln in diesem Falle wesentlich. Es können dieselben sofort angeschrieben werden, was dem Leser überlassen werden muss.

Das Weitere über die Theorie der Trägheitsmomente mag eingesehen werden in der theoretischen Mechanik von Schell; die hier gegebene Übersicht ist seinem Werke entlehnt.

Der Kürze halber bezeichnen wir in der Folge die Gleichungen der Trägheitsellipsoide von Poinsot und Clebsch mit I und II.

Erster Abschnitt.

Trägheitsmomente von Linien.

1. Eine homogene, gerade Linie dreht sich um eine in ihrer Richtung liegende, zu ihr senkrechte Axe. Welches ist das Trägheitsmoment dieser Linie?

B S P A O

Figur 44.

Es sei $AB = a$ (Fig. 44) die gegebene materielle Gerade von der Masse M, m ihre Masse pro Längeneinheit, O der Drehpunkt, P ein beliebiger Punkt in AB, $OA = a_1$, $OB = a_2$, $OP = x$, dann ist

$$T = m \int_{a_1}^{a_2} x^2\, dx = \frac{1}{3} m a (a_2{}^2 + a_2 a_1 + a_1{}^2)$$

$$= \frac{1}{3} M (a_2{}^2 + a_2 a_1 + a_1{}^2),$$

$$k^2 = \frac{T}{M} = \frac{1}{3} (a_2{}^2 + a_2 a_1 + a_1{}^2).$$

Der mit OB zusammenfallende Radiusvektor des Poinsot'schen Ellipsoides ist

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{T}} = \pm \sqrt{\frac{3}{M(a_2{}^2 + a_2 a_1 + a_1{}^2)}}.$$

Das Trägheitsmoment für die Gerade als Drehaxe ist gleich Null, folglich sind die Centralellipsoide Kreise in der durch O gehenden, zu AB senkrechten Ebene.

Wählen wir den Schwerpunkt S der Geraden als Drehpunkt, dann ist

$$T_s = m\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2\,dx = \frac{1}{12}m\,a^3 = \frac{1}{12}M\,a^2,$$

$$k_s = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = 0{\cdot}2889\,a, \qquad \varrho_s = \frac{2\sqrt{3}}{a\sqrt{M}}.$$

2. Welches ist das Trägheitsmoment einer geraden Linie AB (Fig 45) für eine durch den Punkt O gehende, zur Ebene ABO senkrechte Axe?

Figur 45.

Es sei AC die Verlängerung von AB, $OC \perp AB$, $OC = b$, $CA = a_1$, $CB = a_2$, P ein beliebiger Punkt in AB, $CP = x$, M die Masse der ganzen Geraden, m diejenige ihrer Längeneinheit. Damit erhalten wir

$$T = m\int_{a_1}^{a_2}(b^2 + x^2)\,dx = \frac{1}{3}m(a_2 - a_1)(3b^2 + a_1{}^2 + a_1 a_2 + a_2{}^2)$$

$$= \frac{1}{3}M(3b^2 + a_1{}^2 + a_1 a_2 + a_2{}^2),$$

$$k^2 = b^2 + \frac{1}{3}(a_1{}^2 + a_1 a_2 + a_2{}^2).$$

Reicht die Gerade bis zum Punkte C, dann ist $a_1 = 0$ und es wird mit $a_2 = a$

$$T = \frac{1}{3}M(3b^2 + a^2), \qquad k^2 = b^2 + \frac{1}{3}a^2.$$

Liegt die materielle Gerade auf beiden Seiten von OC, so ergiebt sich

$$T = m\int_{-a_1}^{a_2}(b^2 + x^2)\,dx = \frac{1}{3}m(a_1 + a_2)(3b^2 + a_1{}^2 - a_1 a_2 + a_2{}^2)$$

$$= \frac{1}{3}M(3b^2 + a_1{}^2 - a_1 a_2 + a_2{}^2),$$

mit $a_1 = a_2 = a$ wird in diesem Falle $T = \frac{1}{3}M(3b^2 + a^2)$.

Figur 46.

3. Eine materielle Gerade AB (Fig. 46) von homogener Beschaffenheit bildet mit den Coordinatenaxen, welche durch ihren Schwerpunkt S gehen, die Winkel α, $\frac{\pi}{2}$, β, ihre Länge ist gleich $2l$. Welches sind die Trägheitsmomente und Trägheitsradien bezüglich der Coordinatenaxen?

$$T_x = m\int_{-l}^{+l} y^2\,ds = m\sin^2\alpha\int_{-l}^{+l} s^2\,ds = \frac{2}{3}\,m\,l^3\sin^2\alpha = \frac{1}{3}\,M\,l^2\sin^2\alpha,$$

$$T_z = m\int_{-l}^{+l} x^2\,ds = m\sin^2\beta\int_{-l}^{+l} s^2\,ds = \frac{2}{3}\,m\,l^3\sin^2\beta = \frac{1}{3}\,M\,l^2\sin^2\beta,$$

$$T_y = m\int_{-l}^{+l} (x^2+y^2)\,ds = m\int_{-l}^{+l} s^2\,ds = \frac{2}{3}\,m\,l^3 = \frac{1}{3}\,M\,l^2,$$

$$k_x = \sqrt{\frac{1}{3}}\,.\,l\sin\alpha, \qquad k_z = \sqrt{\frac{1}{3}}\,.\,l\sin\beta, \qquad k_y = \sqrt{\frac{1}{3}}\,.\,l.$$

4. Es soll der Trägheitshalbmesser einer materiellen geraden Linie SB für die Drehaxe SX, welche mit der Geraden den Winkel α einschliesst, bestimmt werden, deren Dichtigkeit direkt proportional einer beliebigen Potenz des Abstandes ihrer Punkte von S ist (Fig. 46, S. 115).

Mit P als beliebigem Punkte der Geraden SB, $PQ \perp SX$, $PQ = z$, $SP = s$, $SB = l$, $\varrho = \mu s^n =$ der Dichtigkeit in P, wobei μ die Dichtigkeit in S bedeutet, $\varkappa =$ dem konstanten Querschnitte der Geraden erhalten wir

$$T = \varkappa\int \varrho\,z^2\,ds = \varkappa\,\mu\sin^2\alpha\int_0^l s^{n+2}\,ds = \frac{\varkappa\,\mu\sin^2\alpha\,.\,l^{n+3}}{n+3}$$

$$M = \varkappa\int \varrho\,ds = \varkappa\,\mu\int_0^l s^n\,ds = \frac{\varkappa\,\mu\,l^{n+1}}{n+1},$$

folglich ist der verlangte Trägheitshalbmesser

$$k = \sqrt{\frac{T}{M}} = l\sin\alpha\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}.$$

Bei unveränderlicher Dichtigkeit ist $n = 0$, also $k = l\sin\alpha\sqrt{\frac{1}{3}}$.

5. Die Dichtigkeit eines geraden Stabes AB ändert sich von Punkt zu Punkt wie die n^{te} Potenz des Abstandes des fraglichen Querschnittes von dem einen Ende A. k und k' seien die Trägheitshalbmesser des Stabes für zu seiner Länge senkrechte, durch die Punkte A und B gehende Axen. Es sollen die Werte von k und k' mit einander verglichen werden, auch sei der Wert von n so zu bestimmen, dass $k = 6\,k'$ sein kann.

Mit Rücksicht auf die Lösung der vorhergehenden Aufgabe ist, da im vorliegenden Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$, für die durch den Punkt A gehende Axe

$$T = \varkappa \mu \frac{l^{n+3}}{n+3}, \qquad k^2 = \frac{n+1}{n+3} l^2.$$

Für die durch den Punkt B gehende Axe erhalten wir

$$T' = T + M l^2 - 2 \varkappa l \int_0^l \varrho s \, d s$$

$$= T + M l^2 - 2 \varkappa \mu l \int_0^l s^{n+1} d s = 2 \varkappa \mu \frac{l^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$k'^2 = \frac{T'}{M} = \frac{2 l^2}{(n+2)(n+3)}.$$

Mithin ergiebt sich

$$\frac{k^2}{k'^2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Setzen wir nun in der letzten Relation $k = 6 k'$, so ergiebt sich

$$n^2 + 3 n = 70, \qquad \text{d. i.} \qquad n = -\frac{3}{2} \pm \frac{17}{2},$$

wodurch $n = 7$, oder $n = -10$ in diesem Falle sein muss.

6. Ein homogener Kreisbogen dreht sich um den nach seinem Scheitel gezogenen Halbmesser. Welches ist das Trägheitsmoment und der Trägheitshalbmesser für diese Axe?

Es sei (Fig. 47) HAK der materielle Kreisbogen mit dem Scheitel A, dem Mittelpunkte C, so dass AC Drehaxe. P sei ein beliebiger Punkt des Bogens HK, $PM \perp AC$, $MP = y$, $CA = a$, Bogen $AP = s$. Die Sehne HK schneidet AC in E, PC, HC, KC sind die zu den Punkten P, H, K gehörigen Radien und es sei $HE = c = KE$, $\measuredangle ACH = \measuredangle ACK = \alpha$, $\measuredangle ACP = \vartheta$. Endlich bezeichne ϱ die konstante Dichtigkeit und $\varkappa$ den konstanten Querschnitt des Bogens.

Figur 47.

Mit diesen Benennungen erhalten wir

$$T = \varkappa \varrho \int y^2 \, d s = \varkappa \varrho \int_{-\alpha}^{+\alpha} a^2 \sin^2 \vartheta \, a \, d \vartheta = \frac{1}{2} \varkappa \varrho a^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} (1 - \cos 2 \vartheta) \, d \vartheta$$

$$= \frac{1}{2} \varkappa \varrho a^3 (2 \alpha - \sin 2 \alpha).$$

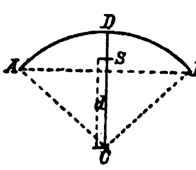
Die Masse des Bogens HAK ist $M = 2 \varkappa \varrho a \alpha$, folglich ergiebt sich für den Trägheitsradius

$$k^2 = \frac{T}{M} = \frac{1}{2} a^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) = \frac{1}{2} a^2 - \frac{c \sqrt{a^2 - c^2}}{2 \, arc \left(\sin = \frac{c}{a}\right)}.$$

Für den halbkreisförmigen Bogen ist $c = a$, für den vollen Kreisbogen $c=0$, daher sind in diesen beiden Fällen die Trägheitshalbmesser $k=a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

7. Welches ist der Trägheitshalbmesser und der Trägheitsradius eines homogenen Kreisbogens für eine durch seinen Schwerpunkt gehende, zu seiner Ebene senkrechte Axe?

Es sei die Bildfläche die Ebene des Bogens AB (Fig. 48), S dessen Schwerpunkt, C der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises vom Radius r, b die Länge des Bogens AB, a seine Sehnenlänge, $CS = d$, k der Trägheitshalbmesser für die durch den Schwerpunkt S laufende Axe, k' derjenige für die durch den Kreismittelpunkt gehende, parallele Axe. Damit ist $k'^2 = k^2 + d^2$, und weil $k' = r$, $d = \frac{a}{b} r$, so folgt



Figur 48.

$$k^2 = r^2 - \left(\frac{ar}{b}\right)^2 = \frac{r^2}{b^2}(b^2 - a^2), \quad T = Mk^2 = \frac{\varkappa \varrho r^2}{b}(b^2 - a^2).$$

8. Welches ist das Trägheitsmoment eines homogenen Kreisbogens für die durch seinen Scheitel gehende, zu seiner Ebene senkrechte Axe?

Bezeichnet k den Trägheitsradius des Bogens AB (Fig. 48) für die durch seinen Scheitel D gehende Axe, k' denjenigen für die durch seinen Schwerpunkt S laufende parallele Axe und ist $SD = d_1$, so haben wir $k^2 = k'^2 + d_1{}^2$, und weil $k'^2 = \frac{r^2}{b^2}(b^2 - a^2)$, $d_1{}^2 = \left(r - \frac{a}{b} r\right)^2$, so ergiebt sich

$$k^2 = 2 r^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right), \quad T = Mk^2 = 2 \varkappa \varrho r^2 (b - a).$$

9. **Die Gestalt einer homogenen, ebenen, materiellen Curve soll so bestimmt werden, dass das Trägheitsmoment eines Teiles derselben für eine zu ihrer Ebene senkrechte Axe dem Unterschiede der Abstände seiner Endpunkte von dieser Axe direkt proportional ist.**

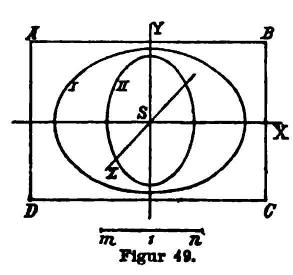
Die Gleichung der Curve ist, wenn a, α konstante Grössen sind und der Punkt, in welchem die Axe die Ebene der Curve schneidet, als Ursprung vom Polarcoordinaten gewählt wird,

$$2(\alpha - \vartheta) = \frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{r^2} + arc\left(sin = \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Walton, p. 379.

Zweiter Abschnitt.

Trägheitsmomente und Centralellipsoide ebener Flächen.



Figur 49.

1. Bestimmung der Centralellipsoide einer homogenen Rechtecksfläche $ABCD$ (Fig. 49) für ihren Schwerpunkt S.

Die durch den Schwerpunkt S des Rechteckes gehenden, zu den gegenüberliegenden Rechtecksseiten parallelen Geraden SX, SY und die zur Ebene der Fläche senkrechte Gerade SZ nehmen wir zu Coordinatenaxen, setzen seine Seiten $AB = h$, $BC = b$ und der Einfachheit halber seine Masse seiner Fläche gleich.

Die Trägheitsmomente bezüglich der Coordinatenaxen sind

$$A = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\,dy\,dx = \frac{1}{12} b^3 h, \quad B = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^2\,dy\,dx = \frac{1}{12} b h^3,$$

$$C = A + B = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2) = \frac{1}{12} b h d^2,$$

mit $(b^2 + h^2) = d^2$.

Für eine beliebige Schwerpunktsaxe, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ einschliesst, ist

$$T = A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma = \frac{1}{12} b h (d^2 - b^2 \cos^2\beta - h^2 \cos^2\alpha).$$

Liegt diese Axe in der Ebene des Recktecks, dann ist $\cos\beta = \sin\alpha$, $\cos\gamma = 0$, folglich

$$T = \frac{1}{12} b h (b^2 \cos^2\alpha + h^2 \sin^2\alpha).$$

Läuft die Axe durch den Eckpunkt B des Rechteckes, dann ist $\cos\alpha = \frac{h}{d}$, $\sin\alpha = \frac{b}{d}$, mithin

$$T = \frac{1}{6}\frac{b^3 h^3}{d^2} = \frac{1}{6}\frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}.$$

Der Wert des Trägheitsmomentes für eine Axe in der Ebene des Rechteckes wird mit $\alpha = 0$ $T = \frac{1}{12} b^3 h = A$, mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $T = \frac{1}{12} b h^3 = B$, welches die ausgezeichneten Werte von T sind und zwar ist mit $b < h$ A das Minimum, B das Maximum.

Die Coordinatenaxen sind Hauptaxen für den Schwerpunkt und die Trägheitsellipsoide. Nun ist

$$k_a = \frac{b}{\sqrt{12}}, \quad k_b = \frac{h}{\sqrt{12}}, \quad k_c = \frac{d}{\sqrt{12}};$$

$$\varrho_a = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{2}{b}\sqrt{\frac{3}{bh}}, \quad \varrho_b = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{bh}}, \quad \varrho_c = \frac{2\sqrt{3}}{d\sqrt{bh}},$$

daher sind die Gleichungen der Centralellipsoide

$$\text{II} \qquad \frac{x^2}{k_a^2} + \frac{y^2}{k_b^2} + \frac{z^2}{k_c^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{h^2} + \frac{z^2}{d^2} - \frac{1}{12} = 0,$$

$$\text{I} \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0, \qquad b^2x^2 + h^2y^2 + d^2z^2 - \frac{12}{bh} = 0.$$

Beide Ellipsoide lassen sich sehr leicht konstruieren. Die Figur 49 zeigt die Centralellipsen der Fläche mit $mn = 1$ für das Poinsot'sche Ellipsoid. Die Konstruktion wird später für das Parallelogramm angegeben.

Mit $b = h = a$ geht das Rechteck in ein Quadrat über. Nach den soeben erhaltenen Resultaten ist in diesem Falle

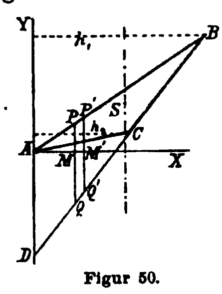
$$A = \frac{1}{12}a^4 = B, \quad C = \frac{1}{6}a^4; \quad k_a^2 = \frac{1}{12}a^2 = k_b^2, \quad k_c^2 = \frac{1}{6}a^2;$$

$$\varrho_a = \frac{2\sqrt{3}}{a^2} = \varrho_b, \quad \varrho_c = \frac{\sqrt{6}}{a^2};$$

$$\text{II} \quad x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{a^2}{12} = 0, \qquad \text{I} \quad x^2 + y^2 + 2z^2 - \frac{12}{a^4} = 0.$$

Beide Centralellipsoide sind Rotationsellipsoide, das erstere ist flach, das letztere abgeplattet.

2. Bestimmung des Trägheitsmomentes einer homogenen Dreiecksfläche für eine in ihrer Ebene liegende, durch einen Eckpunkt des Dreiecks gehende Axe.



Figur 50.

Es sei ABC (Fig. 50) die gegebene Dreiecksfläche, AY die gegebene Momentenaxe, $AX \perp AY$. AX und AY seien die Coordinatenaxen. Die Verlängerung der Seite BC schneidet in D die Ordinatenaxe, so dass das Dreieck ABC der Unterschied der beiden Dreiecke ABD und ACD ist. In Abständen $AM = x$, $AM' = x + dx$ von A seien die Parallelen PQ, $P'Q'$ zu AY gedacht, so dass $PQP'Q'$ ein Element der Fläche ABD darstellt. Bezeichnet l die Strecke AD, h_1 den Abstand des Eckpunktes B von der Ordinatenaxe, $\varkappa$ die konstante Dicke, ϱ die konstante Dichtigkeit der Platte ABD, so ist das Volumenelement $PP'QQ'$ gleich $\frac{h_1 - x}{h_1} l\,dx$, sein Trägheitsmoment für die Axe AY gleich $\varrho \varkappa l \frac{h_1 - x}{h_1} x^2\,dx$, mithin ist das Trägheitsmoment

T_1 der dünnen Platte ABD für die Axe AY

$$T_1 = \varrho \varkappa l \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{x}{h_1}\right) x^2 dx = \frac{1}{12} \varrho \varkappa l h_1^3. \tag{1}$$

Bezeichnet ferner h_2 den Abstand des Eckpunktes C von der Momentenaxe, so ist das Moment T_2 des Dreieckes ACD in Beziehung auf diese Axe

$$T_2 = \varrho \varkappa l \int_0^{h_2} \left(1 - \frac{x}{h_2}\right) x^2 dx = \frac{1}{12} \varrho \varkappa l h_2^3. \tag{2}$$

Folglich ist das Trägheitsmoment T des gegebenen Dreieckes ABC für die gegebene Axe AY mit (1) und (2)

$$T = T_1 - T_2 = \frac{1}{12} \varrho \varkappa l (h_1 - h_2)(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2). \tag{3}$$

Nun ist $\frac{1}{2} \varrho \varkappa l (h_1 - h_2)$ die Masse M des Dreieckes ABC, mithin haben wir auch

$$T = \frac{1}{6} M (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2). \tag{4}$$

In dem besonderen Falle, wo die Momentenaxe zu der Dreiecksseite BC parallel ist, haben wir $h_1 - h_2 = h$, mithin $T = \frac{1}{2} M h^2$, und für die zu dieser Axe parallele Schwerpunktsaxe

$$T_s = T - M d^2 = \frac{1}{2} M h^2 - M \left(\frac{2}{3} h\right)^2 = \frac{1}{18} M h^2.$$

Ist das Moment so zu bestimmen, dass dasselbe gleich der Summe der Produkte der Massenelemente in die n^{te} Potenz ihrer Abstände von der Momentenaxe AY ist, dann haben wir

$$T = \varrho \varkappa l \left\{ \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{x}{h_1}\right) x^n dx - \int_0^{h_2} \left(1 - \frac{x}{h_2}\right) x^n dx \right.$$

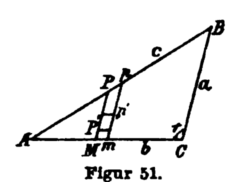
$$= \frac{\varrho \varkappa l}{(n+1)(n+2)} (h_1^{n+1} - h_2^{n+1}),$$

und weil $\frac{1}{2} \varrho \varkappa l (h_1 - h_2) = M =$ der Masse des Dreieckes ist

$$T = \frac{2M}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{h_1^{n+1} - h_2^{n+1}}{h_1 - h_2}.$$

Mit $n = 2$ resultiert hieraus die Formel (4).

Messenger of Mathematics, Vol. IV, p. 115.



Figur 51.

3. Bestimmung des Trägheitsmomentes einer homogenen dreieckigen Fläche ABC (Fig. 51) für eine durch A gehende, zu ihr senkrechte Axe.

Wir ziehen durch die Punkte P, p in der Seite AB, welche unendlich nahe aneinander liegend ge-

dacht sind, die Parallelen PM, pm zu BC, hierauf nehmen wir in PM zwei unendlich nahe Punkte und ziehen durch dieselben zwei Parallele zu der Seite AC, wodurch das unendlich kleine Parallelogramm $P'p'$ entsteht. Mit $AM = x$, $MP = y$, $Am' = x + dx$, $MP' = y'$, $mp' = y' + dy'$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, a, b, c als Seiten des Dreieckes, ϱ als Dichtigkeit, $\varkappa$ als unendlich dünne Dicke der Fläche ist das Moment für die Axe durch A

$$T = Mk^2 = \int_0^b \int_0^y (x^2 + y'^2 - 2xy' \cos\gamma)\,\varkappa\,.\varrho \sin\gamma\, dx\, dy'$$

$$= \varkappa \varrho \sin\gamma \int_0^b \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 - xy^2 \cos\gamma\right) dx$$

$$= \varkappa \varrho \sin\gamma \int_0^b \left(\frac{a}{b} x^3 + \frac{1}{3} \frac{a^3}{b^3} x^3 - \frac{a^2}{b^2} \cos\gamma\, x^3\right) dx$$

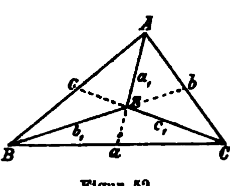
$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \varkappa \varrho a b \sin\gamma (6b^2 + 2a^2 - 6ab\cos\gamma) = \frac{1}{12} M \left\{ 3b^2 + 3c^2 - a^2 \right\}.$$

Der entsprechende Trägheitsradius ist gegeben durch

$$k^2 = \frac{1}{12}(3b^2 + 3c^2 - a^2).$$

Walton, p 381.

4. Welches ist der Trägheitsradius einer dreieckigen Platte für eine durch ihren Schwerpunkt gehende, zu ihrer Ebene senkrechte Axe?



Figur 52.

Es sei ABC (Fig. 52) das gegebene Dreieck, S sein Schwerpunkt, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AS = a_1$, $BS = b_1$, $CS = c_1$, M die Masse des Dreieckes ABC. Die Trägheitsmomente der Dreiecke BSC, CSA, ASB, welche in ihrer Gesamtheit das Dreieck ABC ausmachen, sind für die durch ihren gemeinschaftlichen Eckpunkt S gehende, zur Fläche senkrechte Axe

$$\frac{1}{36} M(3b_1^2 + 3c_1^2 - a^2), \quad \frac{1}{36} M(3c_1^2 + 3a_1^2 - b^2), \quad \frac{1}{36} M(3a_1^2 + 3b_1^2 - c^2).$$

Daher ist das Trägheitsmoment des Dreieckes ABC für dieselbe Axe, welches gleich der Summe dieser Momente ist,

$$T = \frac{1}{36} M \left\{ 6(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a^2 + b^2 + c^2) \right\},$$

oder, vermöge der Eigenschaft des Schwerpunktes eines Dreieckes,

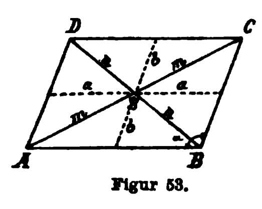
$$T = \frac{1}{36} M \left\{ 2(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) \right\} = \frac{1}{36} M (a^2 + b^2 + c^2).$$

Mithin erhalten wir für das Quadrat des Trägheitshalbmessers

$$k^2 = \frac{1}{36} \left\{ a^2 + b^2 + c^2 \right\}.$$

Euler, Theoria Motus Corporum Solidorum, cap. VI, Prob. 32. Walton, p. 382.

5. Welches ist der Trägheitshalbmesser der Fläche eines Parallelogrammes für eine durch seinen Schwerpunkt gehende, zu seiner Ebene senkrechte Axe?



Figur 53.

Ist $ABCD$ (Fig. 53) das gegebene Parallelogramm mit dem Schwerpunkte S, $AB=2a$, $BC=2b$, $AC=2m$, $BD=2n$, $M_1 =$ der Masse eines der Dreiecke ABS, BCS, CDS, DAS, $M =$ derjenigen des ganzen Parallelogrammes, so haben wir

$$T=2\frac{1}{12}M_1\,(3m^2+3n^2-4a^2)+2\frac{1}{12}M_1(3m^2+3n^2-4b^2)$$
$$=\frac{1}{3}M_1\left\{3(m^2+n^2)-2(a^2+b^2)\right\}.$$

Bezeichnen wir den Winkel ABC mit α, dann ist $m^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$, $n^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$, daher $m^2+n^2=2(a^2+b^2)$, folglich

$$T=\frac{4}{3}M_1\,(a^2+b^2)=\frac{1}{3}M(a^2+b^2),\qquad k^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2).$$

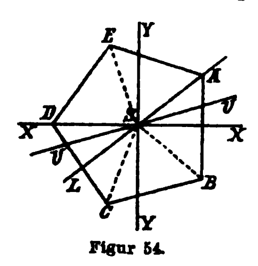
Wir erkennen, dass das Trägheitsmoment von dem Winkel, welchen zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten einschliessen, vollständig unabhängig ist.

Wenn insbesondere das Parallelogramm ein Rhombus oder ein Quadrat mit der Seitenlänge $2a$ ist, so erhalten wir $T=\frac{2}{3}Ma^2$, $k^2=\frac{2}{3}a^2$.

Euler, Theoria Motus Corporum Solidorum, Cap. VI, Prob. 35.

6. Trägheitsmomente einer regulären Polygonalfläche für durch ihren Schwerpunkt gehende Axen.

Wir betrachten ein regelmässiges Vieleck $ABCDE$ (Fig. 54). Durch seinen Schwerpunkt S legen wir in der Ebene der Fläche zwei zu einander senkrechte Coordinatenaxen XX, YY so, dass die Abscissenaxe XSX Symmetrielinie der Fläche ist. Eine solche Fläche besteht aus n kongruenten Mittelpunktsdreiecken wie $\triangle ASB$; wir setzen seine Seite $AB=s$, seine zugehörige Höhe $=h$, den Halbmesser des dem Polygone umgeschriebenen Kreises $SA=r$, die Trägheitsmomente des Dreieckes ASB für die Coordinatenaxen bezeichnen wir mit T' und T'', alsdann ist



Figur 54.

$$T'=2\frac{1}{12}h\left(\frac{s}{2}\right)^3=\frac{1}{48}hs^3,\quad T''=\frac{1}{36}h^3s+\frac{1}{2}hs\left(\frac{2}{3}h\right)^2=\frac{1}{4}h^3s,$$
$$T'+T''=\left(h^2+\frac{s^2}{12}\right)\frac{hs}{4}.$$

Diese Summe gilt für jedes Mittelpunktsdreieck der Fläche, so dass für die n seitige Polygonalfläche

$$n(T' + T'') = \left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)\frac{n h s}{4} = \frac{1}{2} M\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right), \tag{1}$$

wenn die Masse der Fläche ihrem Inhalte gleich genommen wird.

Bezeichnet α den Winkel, welchen die in der Ebene des Polygones gezogene Gerade ASL mit der Linie XX einschliesst, und nehmen wir dieselbe als Axe, dann ist das entsprechende Trägheitsmoment der ganzen Fläche gleich $n(T' \sin^2\alpha + T'' \cos^2\alpha)$, dasselbe ist gleich dem Momente für die Abscissenaxe, wodurch

$$n T' = n T' \sin^2\alpha + n T'' \cos^2\alpha, \quad \text{d. i.} \quad T' = T''. \tag{2}$$

Für eine beliebige, in der Ebene der Fläche gelegene Schwerpunktsaxe UU, welche mit der Axe XX den Winkel φ einschliesst, ist das Trägheitsmoment der gegebenen Fläche

$$T = n T' \sin^2\varphi + n T'' \cos^2\varphi = n T' \text{ mit (2).}$$

Setzen wir nun in (1) $n T' = n T'' = T$, so ergiebt sich für jede beliebige, in der Ebene der Fläche gelegene Schwerpunktsaxe als Trägheitsmoment, wenn wir noch berücksichtigen, dass $h^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$ ist,

$$T = \frac{1}{4} M\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right) = \frac{1}{4} M\left(r^2 - \frac{s^2}{6}\right),$$

so dass die Trägheitsmomente für alle in der Ebene der Fläche gelegenen Schwerpunktsaxen von gleicher Grösse und die Centralellipsen des Schwerpunktes Kreise sind.

Nennen wir 2α den Mittelpunktswinkel eines der regulären Dreiecke des Polygones, dann ist $h = \frac{1}{2} s \cot g\, \alpha$, das Trägheitsmoment T_z für die zur Ebene der Fläche senkrechte Schwerpunktsaxe

$$T_z = \frac{1}{2.12} M(3 s^2 \cot g^2\alpha + s^2) = \frac{1}{12} M s^2 \frac{2 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1}{12} M s^2 \frac{2 + \cos\frac{2\pi}{n}}{1 - \cos\frac{2\pi}{n}},$$

weil $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$ ist.

Die Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes einer regulären Polygonalfläche sind mithin Rotationsellipsoide, ihre Gleichungen lauten

$$\text{I} \qquad \frac{1}{4} M\left(r^2 - \frac{s^2}{6}\right)(x^2 + y^2) + \frac{1}{12} M s^2 \frac{2 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} z^2 - 1 = 0,$$

$$\text{II} \qquad \frac{24}{6 r^2 - s^2}(x^2 + y^2) + \frac{12(1 - \cos 2\alpha)}{(2 + \cos 2\alpha) s^2} z^2 - 1 = 0.$$

7. Trägheitsellipsoide der homogenen Fläche eines beliebigen Dreieckes für seinen Schwerpunkt S.

Für beide Centralellipsoide ist die Ebene der Fläche Hauptebene, die zu ihr senkrechte Schwerpunktsaxe Hauptaxenrichtung, so dass es sich darum handelt, die Hauptaxenrichtungen und Hauptaxen in der Ebene der Fläche zu bestimmen, auch die Centralellipsen der Fläche zu verzeichnen.

Nach 2 ist, wenn die daselbst eingeführten Bezeichnungen beibehalten werden, das Trägheitsmoment für die Axe AY (Fig. 50, S. 120) in der Ebene der Fläche durch den Eckpunkt A des Dreiecks

$$T = \frac{1}{6} M (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2). \tag{1}$$

Nach 4 ist das Trägheitsmoment für die zur Ebene der Fläche senkrechte Schwerpunktsaxe

$$T_s = \frac{1}{36} M (a^2 + b^2 + c^2). \tag{2}$$

Der Abstand des Schwerpunktes S des Dreieckes von der Axe AY ist gleich $\frac{1}{3}(h_1 + h_2)$, daher das Trägheitsmoment T_s für eine durch S gehende, zu AY parallele Axe

$$T_s = \frac{1}{6} M (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) - M \left(\frac{h_1 + h_2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} M (h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2). \tag{3}$$

Damit lässt sich das Trägheitsmoment für jede beliebige Schwerpunktsaxe in der Ebene der Fläche bestimmen, denn h_1 und h_2 können stets konstruiert und sodann gemessen werden. Ist insbesondere die Axe AY zu der Dreiecksseite BC parallel und h die zugehörige Dreieckshöhe, so haben wir $h_1 = h_2 = h$, folglich für die Schwerpunktsaxe

$$T_s' = \frac{1}{18} M h^2. \tag{4}$$

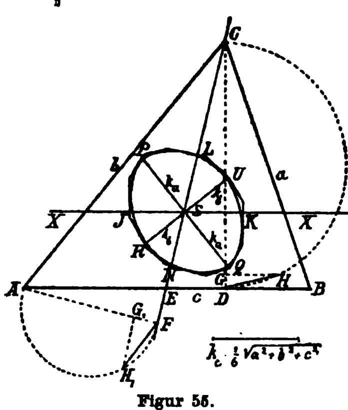
Geht die Axe AY durch den Schwerpunkt S, dann finden wir, wenn h' die zu dieser Flächenhalbierungslinie gehörige Höhe eines der Teildreiecke bezeichnet, für das entsprechende Trägheitsmoment T_s'' der ganzen Fläche

$$T_s'' = \frac{1}{6} M h'^2. \tag{5}$$

Weil nun zu jeder Dreiecksseite eine Parallelaxe und von jeder Ecke des Dreiecks eine Axe durch den Schwerpunkt gezogen werden kann, so geben die Formeln (4) und (5) je drei Trägheitsmomente, wodurch leicht für sechs Axen durch S diese Momente ermittelt werden können. Damit lässt sich die Trägheitsellipse des ersten und zweiten Centralellipsoides darstellen, denn die Radien ϱ und k für diese Axen sind jetzt gegeben.

1) Das Centralellipsoid von Clebsch. Die den Trägheitsmomenten $T_s', T_s'', T_s = T_\zeta$ entsprechenden Trägheitshalbmesser sind

$$k_s' = \sqrt{\frac{1}{18}h^2} = \sqrt{\frac{1}{18}h.h}, \quad k_s'' = \sqrt{\frac{1}{6}h'^2} = \sqrt{\frac{1}{6}h'.h'}, \quad k_c = \frac{1}{6}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$


Figur 55.

Es sei nun ABC (Fig. 55) die gegebene Dreiecksfläche, deren Centralellipsoid für ihren Schwerpunkt S bestimmt werden soll. Zunächst haben wir die Centralellipse der Fläche und ihre Hauptaxen zu ermitteln. Ziehen wir durch S eine Parallele XX zu der Dreiecksseite AB und machen die Linie $CD \perp AB$, dann ist $CD = h$ die zugehörige Höhe. Um den entsprechenden Trägheitsradius $k = \sqrt{\frac{1}{18}h.h}$ zu finden, schlagen wir über CD als Diameter einen Halbkreis, machen $DG = \frac{1}{18} \cdot CD$, $GH \perp CD$ und ziehen DH, welches die verlangte Strecke ist, denn wir haben $\overline{DH}^2 = CD.DG$, d. i. $k_s'^2 = \frac{1}{18}h.h = \frac{1}{18}h^2$. Machen wir nun auf XX $SJ = SK = DH$ und ziehen durch die Punkte J, K Senkrechte zu XX, so sind diese Linien zwei Tangenten an die gesuchte Curve. Ziehen wir ferner die Flächenhalbierungslinie CSE, machen $AF \perp CE$, dann ist $AF = h' =$ der zu der Seite AE gehörigen Höhe des Dreieckes AEC. Nun schlagen wir über AF als Durchmesser einen Halbkreis, machen $FG_1 = \frac{1}{6}AF$, $G_1H_1 \perp AF$ und ziehen FH_1, dann ist $\overline{FH_1}^2 = FG_1.AF$, d. h. $k_s''^2 = \frac{1}{6}h'^2$. Jetzt zeichnen wir auf CE $SL = SN = FH_1$ und ziehen durch die Punkte L, N Senkrechte zu CE, womit zwei weitere Tangenten der Curve gefunden sind. In entsprechender Weise verfahren wir bezüglich der Parallelen durch S zu den Seiten AC, BC und der Halbierungslinien AS, BS des Dreiecks. Damit ergeben sich zwölf Curventangenten. Zur genauen Verzeichnung der Ellipse sind noch weitere Tangenten nötig, die mit Hilfe des Satzes von Brianchon eingeschaltet werden können. Nachdem die Curve $JLKN$ verzeichnet, welches die gesuchte Centralellipse ist, bestimmen wir in bekannter Weise ihre Hauptaxen PSQ und RSU, dieses sind die gesuchten Hauptaxen des Centralellipsoides. Mit $SP = k_a$, $SR = k_b$, $\frac{1}{6}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = k_c$, welch' letztere Grösse sich nach dem Satze von

Pythagoras konstruieren lässt, ist die Gleichung des Centralellipsoides von Clebsch mit den Hauptaxenrichtungen als Coordinatenaxen

$$\frac{x^2}{k_a^2} + \frac{y^2}{k_b^2} + \frac{z^2}{k_c^2} - 1 = 0,$$

welches sich nun auch durch Orthogonalprojektionen darstellen lässt.

Verbinden wir die Endpunkte aller Trägheitsradien in der Ebene der Fläche, so erhalten wir die Fusspunktcurve der Centralellipse und damit für jede Schwerpunktsaxe in der Ebene der Fläche den entsprechenden Trägheitshalbmesser.

2) Das Centralellipsoid von Poinsot. Es handelt sich hier ebenfalls darum, die Hauptaxen in der Ebene der Fläche zu bestimmen, denn die dritte Hauptaxe steht senkrecht auf der Ebene der Fläche. Der Radiusvektor für eine beliebige, in der Ebene der Fläche gelegene Schwerpunktsaxe ist

$$\varrho_s = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{18} M (h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)}} = \frac{1}{k_s \sqrt{M}}.$$

Die Fahrstrahlen für die Schwerpunktsaxen, welche parallel zu den Seiten laufen und durch die Ecken des Dreieckes gehen, sind

$$\varrho_s' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{18} M h^2}} = \frac{1}{k_s' \sqrt{M}}, \qquad \varrho_s'' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6} M h'^2}} = \frac{1}{k_s'' \sqrt{M}}.$$

Weil diese Ausdrücke heterogen sind, so hängen die zu konstruierenden Strecken ϱ_s' und ϱ_s'' von der zugrunde gelegten Massbasis λ ab.

Die zu einer Dreiecksseite parallele Schwerlinie und die Verbindungslinie ihrer Mitte mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreieckes sind konjugierte Durchmesserrichtungen beider Centralellipsen, was in den Lehrbüchern der theoretischen Mechanik bewiesen wird. Dieses können wir aber auch in folgender Weise darthun. Es ist, wenn a, b, c die Seiten des Dreieckes bezeichnen, m die Länge der zur Seite $AB = c$ gehörigen Flächenhalbierungslinie bedeutet,

$$\varrho_s'^2 + \varrho_s''^2 = \frac{1}{M}\left(\frac{18}{h^2} + \frac{6}{h'^2}\right) = \frac{6}{M}\left(\frac{3h'^2 + h^2}{h^2 h'^2}\right);$$

$$h' = \frac{c}{2}\frac{h}{m}, \qquad h^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)}{4c^2},$$

$4m^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, womit sich ergiebt

$$\varrho_s'^2 + \varrho_s''^2 = 3\frac{a^2 + b^2 + c^2}{M^3} = \text{einer konstanten Grösse},$$

mithin sind die Diameter $2\varrho_s'$ und $2\varrho_s''$ konjugiert.

Der Winkel ω, welchen die beiden konjugierten Diameter miteinander einschliessen, folgt aus der einfachen Beziehung $tg^2\,\omega = \frac{h^2}{m^2 - h^2}$. Bezeichnen ϱ_a, ϱ_b die Halbaxenlängen der Ellipse, dann ist

$$(\varrho_a + \varrho_b)^2 = \varrho_s'^2 + \varrho_s''^2 + 2\,\varrho_s'\,\varrho_s''\,sin\,\omega,$$
$$(\varrho_a - \varrho_b)^2 = \varrho_s'^2 + \varrho_s''^2 - 2\,\varrho_s'\,\varrho_s''\,sin\,\omega,$$

womit die Halbaxenlängen berechnet werden können. Bedeutet ferner α den Winkel, welchen die Axe $2\,\varrho_a$ der Ellipse mit dem Durchmesser $2\,\varrho_s'$ einschliesst, dann ist

$$tg^2\,\alpha = \frac{\varrho_b^2(\varrho_a^2 - \varrho_s'^2)}{\varrho_a^2(\varrho_s'^2 - \varrho_b^2)},$$

wodurch auch die Richtung der Hauptaxen der Centralellipse gegeben ist.

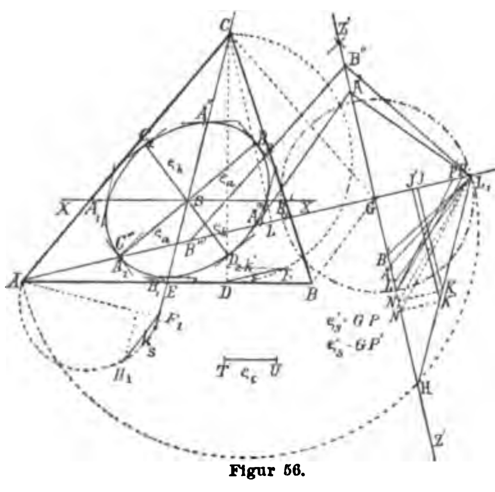
Für die auf der Ebene der Fläche senkrecht stehende Schwerpunktsaxe haben wir

$$\varrho_c = \frac{6}{\sqrt{M(a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{1}{k_c\sqrt{M}}.$$

Damit sind die Hauptaxenlängen und Hauptaxenrichtungen des Centralellipsoides vollständig gegeben.

Mit $\varrho_a^2 = \frac{1}{A}$, $\varrho_b^2 = \frac{1}{B}$, $\varrho_c^2 = \frac{1}{C}$ wird jetzt die Gleichung des ersten Centralellipsoides des Schwerpunktes mit den Hauptaxen als Coordinatenaxen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0.$$



Figur 56.

Wir haben nun noch die Halbaxen ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c des Ellipsoides und die Centralellipse der Fläche durch Konstruktion zu bestimmen. Die gegebene Fläche sei das Dreieck ABC (Fig. 56). Die zu der Dreiecksseite AB parallele Schwerpunktsaxe XSX und die Flächenhalbierungslinie CSE sind die Richtungen konjugierter Diameter. Mit $CD \perp AB$ und $CD = h$, sowie mit $AF_1 \perp CE$ und $AF_1 = h'$, haben wir

$$\varrho_s' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{18}Mh^2}} = \frac{1}{k_s'\sqrt{M}}, \qquad \varrho_s'' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}Mh'^2}} = \frac{1}{k_s''\sqrt{M}}.$$

$k_s' = DF_1$ und $k_s'' = F_1 H_1$ lassen sich wie vorhin geometrisch darstellen, diese Grössen sind von der Maasseinheit unabhängig, so dass nur zu erörtern bleibt, wie ϱ_s' zu finden ist. Schlagen wir von C aus mit $CL = 2\lambda =$ der doppelten Maasseinheit einen Kreis, ziehen an denselben die Tangente ALY', $BG \parallel AC$, dann repräsentiert die Strecke AG den Flächeninhalt des Dreieckes, resp. seine Masse M, wenn wir dieselbe der Einfachheit halber gleich dem Flächeninhalte des Dreieckes nehmen. Jetzt machen wir auf AY' die Strecke $GL_1 = \lambda$, verzeichnen über AL_1 als Durchmesser einen Halbkreis, ziehen $GHZ' \perp AY'$, wodurch $GH = \sqrt{M}$ wird. Weiter zeichnen wir den Strahl $L_1 H$, machen auf AY' die Strecke $L_1 J = DF = k_s'$, $JK \perp AY'$, wodurch $JK = \sqrt{M}\sqrt{\frac{1}{18}h^2}$ wird. Endlich machen wir $GN = JK$, $GL' = \lambda$ auf GZ', $L'P \parallel NL_1$, womit auf GY' die Strecke $GP = \varrho_s' = \dfrac{1}{\sqrt{M \cdot \frac{1}{18}h^2}}$ gefunden ist. Zeichnen wir jetzt auf XSX die Strecken $SA_1' = SB_1' = GP = \varrho_s'$, so ist die Strecke $A_1'B_1'$ ein Durchmesser der Centralellipse. In gleicher Weise finden wir den konjugierten Durchmesser $2\varrho_s'' = A_1''B_1''$. Damit lassen sich nach bekannten Sätzen die Centralellipse und ihre Hauptaxen $A_2 S B_2$, $C_2 S D_2$ verzeichnen. Nun ist noch die dritte Hauptaxe des Ellipsoides graphisch zu bestimmen. Wir haben

$$\varrho_c = \frac{6}{\sqrt{M}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{6}{k_c\sqrt{M}}, \qquad \text{mit } \sqrt{a^2+b^2+c^2} = k_c,$$

und finden, die Formel deutet die Konstruktion an, $\varrho_c = TU$.

Da nun die drei Hauptaxen $2\varrho_a$, $2\varrho_b$, $2\varrho_c$ des Centralellipsoides bekannt sind, so lässt sich dasselbe durch Orthogonalprojektionen darstellen, wodurch der Radiusvektor für jede beliebige Schwerpunktsaxe geometrisch bestimmt werden kann.

Es sind jetzt noch die Hauptträgheitsmomente A, B, C graphisch zu berechnen. Wir haben $A = \frac{1}{\varrho_a^2}$. Um die entsprechende Strecke zu bekommen, machen wir $GA' = A_2 S = \varrho_a$, $L_1 A'' \perp L_1 A'$, $A''A''' \perp L_1 A''$, dann ist offenbar $GA''' = A$. In gleicher Weise finden wir $GB''' = B$, $GC''' = C$. Drücken wir jetzt die Strecken GA''', GB''', GC''' mittelst der Maassbasis λ durch Zahlen aus, so kann die gewöhnliche Gleichung des ersten Centralellipsoides angeschrieben werden.

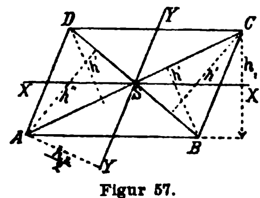
Ist die Dreiecksfläche gleichschenkelig, dann ist die zur Basis gehörige Höhenlinie eine Hauptaxenrichtung für beide Ellipsoide, wodurch sich deren

Bestimmung wesentlich vereinfacht. Für die gleichseitige Dreiecksfläche ergiebt sich, wenn a die Länge einer seiner Seiten bezeichnet, $T_s = \frac{1}{24} Ma^2 = A = B$, $C = \frac{1}{12} Ma^2$. Beide Ellipsoide des Schwerpunktes sind in diesem Falle Rotationsellipsoide mit den Gleichungen

$$\text{I} \qquad Ma^2(x^2 + y^2) + 2\,Ma^2 z^2 - 24 = 0,$$

$$\text{II} \qquad 24\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{12\,z^2}{a^2} - 1 = 0.$$

8. Centralellipsoide der homogenen Fläche eines Parallelogrammes für ihren Schwerpunkt.



Figur 57.

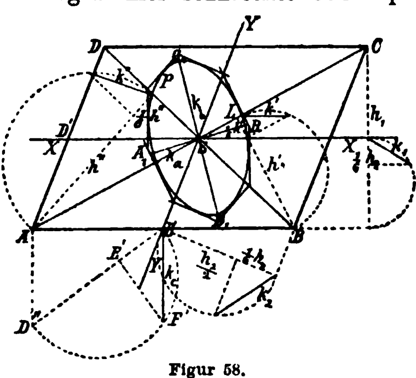
Das Trägheitsmoment der Fläche des Parallelogrammes $ABCD$ (Fig. 57) für die durch seinen Schwerpunkt S gehende, zu der Seite AB parallele Axe XSX ist, wenn wir uns das Parallelogramm durch Parallelen zu AB in unendlich schmale Flächenstreifen von der Höhe dy zerlegt denken, AB mit $2a$, die zugehörige Höhe des Parallelogrammes mit h_1 bezeichnen,

$$T = Mk^2 = \int_{-\frac{h_1}{2}}^{+\frac{h_1}{2}} 2\,ay^2\,dy = \frac{1}{6}\,a\,h_1{}^3 = \frac{1}{12} M h_1{}^2. \tag{1}$$

Das Trägheitsmoment T' für die Diagonale AC als Axe ist, wenn h' die zu AC gehörige Höhe des Dreiecks ABC bezeichnet,

$$T' = Mk'^2 = \frac{1}{6} Mh'^2. \tag{2}$$

Nach 5 ist endlich das Trägheitsmoment für die auf der Ebene des Parallelogrammes senkrechte Schwerpunktsaxe



Figur 58.

$$T_c = Mk_c{}^2 = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2). \tag{3}$$

Diese Relationen genügen zur Darstellung der Hauptaxen beider Centralellipsoide des Schwerpunktes.

1) Das zweite Centralellipsoid des Schwerpunktes. Es sei $ABCD$ (Fig. 58) das gegebene Parallelogramm, h_1 die zur Seite $AB = 2a$, h_2 die zur Seite $AD = 2b$ gehörige Höhe desselben, S sein Flächenmittelpunkt,

$BL = h'$ die zu AC gehörige Höhe des Dreiecks ABC, $AP = h''$ die zu BD gehörige Höhe des Dreiecks ADB. Die Trägheitsradien des Parallelogrammes für die Axen XSX AB, YSY AD, AC, BD sind damit

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{12} h_1^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{6} h_1 \cdot \frac{1}{2} h_1}, \qquad k_2 = \sqrt{\frac{1}{12} h_2^{\,2}},$$

$$k' = \sqrt{\frac{1}{6} h'^2} = \sqrt{\frac{1}{6} h' . h'}, \qquad k'' = \sqrt{\frac{1}{6} h''^2}.$$

Diese Formeln geben uns die Konstruktion der Trägheitshalbmesser direkt an die Hand, sie ist in der Figur durchgeführt. Tragen wir auf den betreffenden Axen die Strecken k_1, k_2, k', k'' von S aus nach beiden Seiten hin ab und ziehen durch ihre Endpunkte Normale zu denselben, so erhalten wir acht Tangenten der Centralellipse, womit dieselbe überbestimmt ist. Wir finden als Hauptaxen der Centralellipse die Strecken $A_1 S B_1$, $C_1 S D_1$, wodurch die unbekannten Hauptaxen des Ellipsoides gegeben sind. Die Länge der dritten Halbaxe k_c des Ellipsoides lässt sich ebenfalls leicht darstellen, denn es ist

$$k_c^2 = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Machen wir $AD'' \perp AB$ und $AD'' = AD'$, ziehen $D''B'$, schlagen über $D''B'$ als Durchmesser einen Halbkreis, zeichnen $B'E' = \frac{1}{3} \cdot B'D''$, $E'F' \perp B'D''$ und $B'F'$, so ist $B'F' = k_c$, denn wir haben $\overline{B'F'}^2 = B'D''. B'E' = \frac{1}{3} B'D''. B'D'' = \frac{1}{3}(\overline{AB'}^2 + \overline{AD'}^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2) = k_c^2$.

Setzen wir nun noch $SA_1 = k_a$, $SC_1 = k_b$, so ist die Gleichung des Centralellipsoides von Clebsch für den Schwerpunkt mit den Hauptaxenrichtungen als Coordinatenaxen

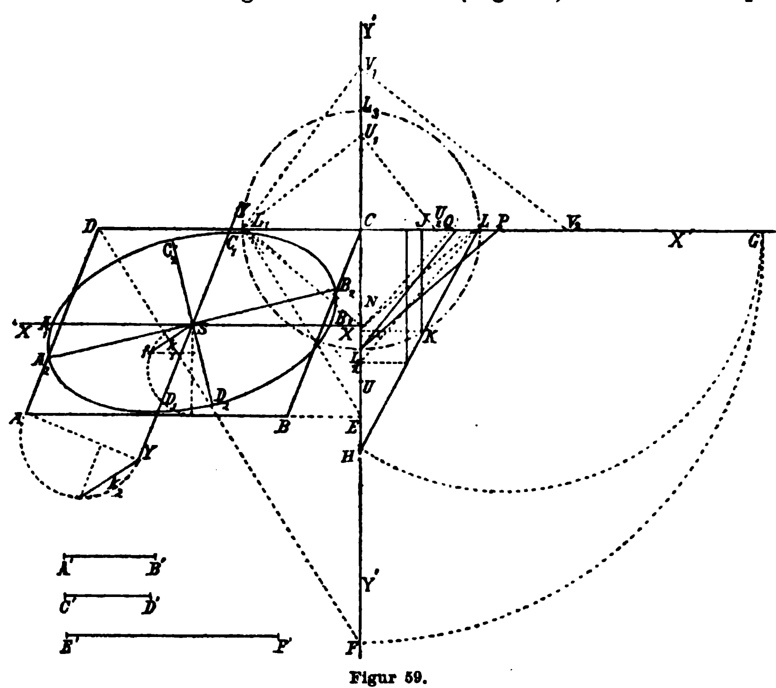
$$\frac{x^2}{k_a^{\,2}} + \frac{y^2}{k_b^{\,2}} + \frac{z^2}{k_c^{\,2}} - 1 = 0.$$

2) Das erste Centralellipsoid des Schwerpunktes. Hier sind, wie auch beim zweiten Ellipsoide, die zu den Seiten des Parallelogrammes parallel laufenden Halbierungslinien der Fläche die Richtungen konjugierter Diameter der Centralellipse der Fläche, so dass mit

$$\varrho_1 = \frac{1}{k_1 \sqrt{M}}, \qquad \varrho_2 = \frac{1}{k_2 \sqrt{M}}, \qquad \varrho_c = \frac{1}{k_c \sqrt{M}}$$

und dem Winkel, unter welchem diese Halbierungslinien sich schneiden, das Trägheitsellipsoid vollständig bestimmt ist. Die Berechnung der Halbaxenlängen ϱ_a, ϱ_b und der Richtung der Hauptaxen $2\varrho_a$, $2\varrho_b$ hat genau so wie bei der Dreiecksfläche zu geschehen.

Für das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 59) sind die Hauptaxen



Figur 59.

des Trägheitsellipsoides des Schwerpunktes konstruktiv bestimmt worden. Wir haben zunächst für die gegebene Maassbasis λ den Inhalt M des Parallelogrammes, sodann $\sqrt{M}$ zu berechnen. Wir verlängern zu dem Ende die Seite CD in der Richtung DCX', ziehen $CY' \perp DX'$, verlängern AB bis E auf CY', machen $CL = CL_1 = \lambda =$ der gegebenen Längeneinheit, ziehen $DF \parallel L_1E$, so ist $CF = CD \,.\, CE = 2ah_1 = M$. Jetzt machen wir $CG = CF$ und verzeichnen über L_1G als Durchmesser einen Halbkreis, dadurch wird $\overline{CH}^2 = CL_1 \,.\, CG = \lambda \,.\, M$, $CH = \sqrt{M}$. Um nun für die zur Seite AB parallele Schwerpunktsaxe XSX den Fahrstrahl $\varrho_1 = \dfrac{1}{k_1\sqrt{M}}$ zu erhalten, ziehen wir den Strahl LH, machen $LJ = Sf = k_1$, $JK \perp CX'$, dann ist $JK = k_1\sqrt{M}$, hierauf $CN = JK$, $L_2P \parallel NL$, so ist $CP = \dfrac{1}{k_1\sqrt{M}} = \varrho_1$. Machen wir noch $NQ \perp L_1N$, dann wird $CQ = Mk_1{}^2 =$ dem Trägheitsmomente der Fläche für die Axe XSX. Mit $SA_1 = SB_1 = CP$ ergiebt sich in der Strecke A_1B_1 ein Durchmesser der Ellipse. Der konjugierte Durchmesser C_1D_1 wird in derselben Weise gefunden. Durch A_1B_1 und C_1D_1 ist Centralellipse vollständig bestimmt, welche verzeichnet wurde. Als Haupt-

axen der Curve ergaben sich die Strecken $A_2 B_2$, $C_2 D_2$, womit die gewünschten Axen bekannt sind. Mit $CU = SA_2$, $L_1 U_1 \perp L_1 U$, $U_1 U_2 \perp L_1 U_1$ finden wir $CU_2 = \frac{1}{\varrho_a^2} = A =$ dem Trägheitsmomente für die Hauptaxe $A_2 B_2$. Ebenso ergiebt sich $CV_2 = \frac{1}{\varrho_b^2} = B =$ dem Trägheitsmomente für die Hauptaxe $C_2 D_2$. Das Trägheitsmoment für die dritte Schwerpunktshauptaxe ist

$$T_c = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2) = M k_c^2, \qquad \text{so dass} \qquad \varrho_c = \frac{1}{k_c \sqrt{M}}.$$

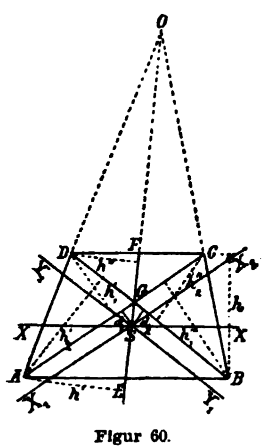
Wir finden in bekannter Weise $k_c = A'B'$, $\varrho_c = C'D'$, $T_c = E'F' = C$.

Mit diesen Resultaten erhalten wir, von den Strecken durch die Maassbasis λ zu den Zahlen übergehend, für das Centralellipsoid des Schwerpunktes von Poinsot, wenn die Hauptaxenrichtungen als Coordinatenaxen genommen werden, die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0.$$

Da die Hauptaxen des Ellipsoides jetzt bekannt sind, so lässt sich dasselbe nun auch durch Orthogonalprojektionen darstellen, wodurch für jede beliebige Schwerpunktsaxe der Radiusvektor und sodann das Trägheitsmoment graphisch bestimmt werden kann.

Ist insbesondere das Parallelogramm ein Rechteck, dann sind die Schwerpunktsaxen XSX und YSY Hauptaxenrichtungen für beide Ellipsoide, weshalb in diesem Falle ihre analytische und graphische Darstellung sich wesentlich vereinfacht. Wenn das Parallelogramm ein Quadrat ist, dann sind die Centralellipsoide des Schwerpunktes Rotationsellipsoide.



Figur 60.

9. Trägheitsmomente einer homogenen Trapezfläche für ihren Schwerpunkt.

Es sei (Fig. 60) $ABCD$ das gegebene Trapez mit den Parallelseiten AB, CD, S sein Schwerpunkt, EF die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Parallelseiten, $AB = 2a$, $CD = 2b$, die Höhe des Trapezes $= h$. Die Diagonalen AC, BD schneiden sich im Punkte G auf EF, die Verlängerungen der nicht parallelen Seiten und der Linie EF im Punkte O.

Zunächst haben wir die Trägheitsmomente für einige Schwerpunktsaxen zu berechnen.

1) Trägheitsmoment für die zu AB parallele

Axe XSX. Der Abstand des Schwerpunktes S der ganzen Fläche von AB ist gleich $\frac{a+2b}{a+b}\frac{h}{3}$, von CD gleich $\frac{2a+b}{a+b}\frac{h}{3}$. Die Entfernung des Schwerpunktes des Dreieckes ABD von XX ist gleich $\frac{a+2b}{a+b}\frac{h}{3} - \frac{h}{3} = \frac{b}{a+b}\frac{h}{3}$, diejenige des Schwerpunktes des Dreieckes BCD von XX ist gleich $\frac{2a+b}{a+b}\frac{h}{3} - \frac{h}{3} = \frac{a}{a+b}\frac{h}{3}$. Demnach ist das Trägheitsmoment T_1 der ganzen Fläche in Beziehung auf die Axe XX

$$T_1 = \left\{\frac{1}{18}ah^3 + ah\left(\frac{b}{a+b}\frac{h}{3}\right)^2\right\} + \left\{\frac{1}{18}bh^3 + bh\left(\frac{a}{a+b}\frac{h}{3}\right)^2\right\},$$

$$T_1 = \frac{1}{18}(a+b)h^3\left\{1 + \frac{2ab}{(a+b)^2}\right\} = \frac{1}{18}Mh^2\left\{1 + \frac{2ab}{(a+b)^2}\right\}, \tag{1}$$

wenn die Masse M des Trapezes seinem Flächeninhalte gleich genommen wird. Für den entsprechenden Trägheitshalbmesser ergiebt sich dadurch die Relation

$$9k_1{}^2 = \frac{1}{2}h^2\left\{1 + \frac{2ab}{(a+b)^2}\right\}, \quad \text{oder} \quad 3k_1 = \sqrt{\frac{1}{2}h^2\left\{1 + \frac{2ab}{(a+b)^2}\right\}}. \tag{1'}$$

2) Trägheitsmoment für die Flächenhalbierungslinie ESF. Fällen wir von den Punkten A, D die Senkrechten h', h'' auf EO, setzen $EF = m$, $FO = n$, so ist offenbar das Trägheitsmoment T_2 des ganzen Trapezes für die Axe EF

$$T_2 = \frac{1}{6}\left\{(m+n)h'^3 - nh''^3\right\}.$$

Aber wir haben $\frac{h'}{a} = \frac{h''}{b} = \frac{h}{m}$, $\frac{n}{b} = \frac{m+n}{a}$, mit welchen Werten sich ergiebt

$$T_2 = \frac{1}{6}\frac{h^3}{m^2}(a+b)(a^2+b^2) = \frac{1}{6}M\frac{h^2}{m^2}(a^2+b^2), \tag{2}$$

$$k_2 = \frac{h}{m}\sqrt{\frac{1}{6}(a^2+b^2)}. \tag{2'}$$

3) Trägheitsmoment für die zur Diagonale AC parallele Schwerpunktsaxe. Wir setzen $AC = l_1$, die zugehörigen Höhen der Dreiecke ACD, ABC gleich h_1', h_1'', den Abstand des Punktes S von AC gleich d_1, dann ist das Trägheitsmoment T_3 für die genannte Axe

$$T_3 = \frac{1}{12}l_1(h_1'^3 + h_1''^3) - (a+b)hd_1{}^2$$

$$= \frac{1}{6}M(h_1'^2 - h_1'h_1'' + h_1''^2) - Md_1{}^2, \tag{3}$$

$$k_3{}^2 = \frac{1}{6}(h_1'^2 - h_1'h_1'' + h_1''^2) - d_1{}^2. \tag{3'}$$

4) Trägheitsmoment für die zur Diagonale BD parallele Schwerpunktsaxe. Wir setzen $BD = l_2$, die zugehörigen Höhen der Dreiecke ABD, BCD gleich h'_2, h''_2, den Abstand des Punktes S von BD gleich d_2, dann ist

$$T_4 = \frac{1}{6} M (h_2'^2 - h_2' h_2'' + h_2''^2) - M d_2^2, \tag{4}$$

$$k_4^2 = \frac{1}{6} (h_2'^2 - h_2' h_2'' + h_2''^2) - d_2^2. \tag{4'}$$

5) Trägheitsmoment für die zur Ebene des Trapezes senkrechte Schwerpunktsaxe, welche eine Hauptaxe beider Ellipsoide ist. Wir setzen noch $BC = 2e$, $AD = 2f$, $BD = 2g$, den Abstand des Schwerpunktes S von der Ecke $B = d$, den Inhalt des Dreieckes $ABD = M_1$, denjenigen des Dreieckes $BCD = M_2$, dann ist das Trägheitsmoment T_c für die genannte Axe

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{1}{12} M_1 (3.4a^2 + 3.4g^2 - 4f^2) \\ &\quad + \frac{1}{12} M_2 (3.4e^2 + 3.4g^2 - 4b^2) - Md^2 \\ &= \frac{1}{3} M_1 (3a^2 - f^2) + \frac{1}{3} M_2 (3e^2 - b^2) + M(g^2 - d^2). \end{aligned} \tag{5}$$

Setzen wir $M_1 = g h_2'$, $M_2 = g h_2''$, $M = g(h_2' + h_2'')$, dann wird

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{1}{3} g h_2' (3a^2 - f^2) + \frac{1}{3} g h_2'' (3e^2 - b^2) \\ &\quad + g(h_2' + h_2'')(g^2 - d^2), \end{aligned}$$

$$k_c^2 = \frac{h_2''(3a^2 - f^2) + h_2''(3e^2 - b^2)}{3(h_2' + h_2'')} + g^2 - d^2. \tag{5'}$$

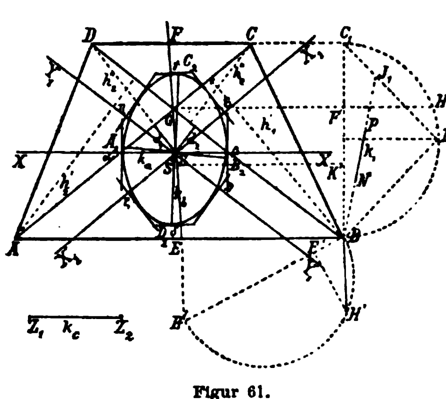
Diese Momente zweiten Grades genügen zur Darstellung der Centralellipsoide des Schwerpunktes.

a. Das Centralellipsoid von Clebsch. Die beiden fehlenden Hauptaxen erhalten wir wieder mit Hilfe der Centralellipse, für welche zunächst die Trägheitsradien k_1, k_2, k_3, k_4 zu konstruieren sind.

Für die Axe XSX ist k_1 mittelst der Formel zu bestimmen

$$3k_1 = \sqrt{\frac{1}{2} h^2 + \frac{ab}{(a+b)^2} h^2}.$$

Das gegebene Trapez sei die Fläche $ABCD$ (Fig. 61, S. 136). Ihre beiden Diagonalen schneiden sich im Punkte G auf der Linie EF; be-



Figur 61.

zeichnen wir seine Abstände von den Parallelseiten AB, CD mit a', a'', so ist $a':a = a'':b$, $a' + a'' = h$, folglich $a' = \frac{a}{a+b}h$, $a'' = \frac{b}{a+b}h$. Verzeichnen wir über $BC_1 \perp AC$ und $= h$ als Durchmesser einen Halbkreis, in ihm das gleichschenkelige Dreieck BC_1D_1, ziehen $GFH \perp BC_1$, dann ist $FH = \sqrt{\frac{ah}{a+b}\,\frac{bh}{a+b}}$; machen wir jetzt $D_1J_1 = FH$ und ziehen die Gerade BJ_1, so ist $BJ_1 = \sqrt{\frac{1}{2}h^2 + \frac{ab}{(a+b)^2}h^2} = 3k_1$, der dritte Teil NP dieser Strecke giebt den verlangten Trägheitshalbmesser. Zeichnen wir nun auf XSX $S\alpha = S\beta = NP$ und ziehen durch die Punkte α, β Senkrechte zu XX, so sind zwei Tangenten der Centralellipse gefunden.

Für die Axe ESF haben wir

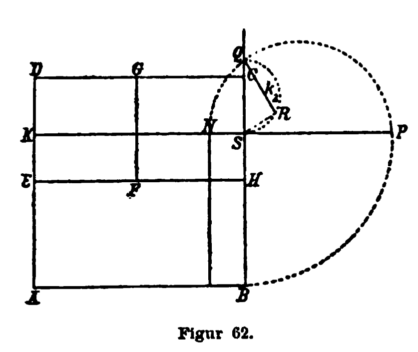
$$k_2 = \frac{h}{m}\sqrt{\frac{1}{6}(a^2+b^2)}.$$

Wir machen $EE' \perp AB$ und $= CF$, ziehen BE', schlagen über BE' als Diameter einen Halbkreis, zeichnen $BF' = \frac{1}{6}\cdot BE'$, $F'H' \perp BE'$ und ziehen BH', alsdann ist $BH' = \sqrt{\frac{1}{6}(a^2+b^2)}$. Nun tragen wir auf EF die Strecke $ES' = BH'$ ab und ziehen $S'K' \parallel AB$, so ist BK' auf der Höhenlinie BC_1 gleich k_2. Mit $S\gamma = S\delta = BK'$ auf EF und den Senkrechten zu EF durch die Punkte γ, δ erhalten wir zwei weitere Curventangenten.

Für die zu der Diagonale AC parallele Schwerpunktsaxe X_1SX_1 ist

$$k_3{}^2 = \frac{1}{6}(h_1'^2 - h_1'h_1'' + h_1''^2) - d_1{}^2 = t^2 - d_1{}^2.$$

Hiernach lässt sich k_3 mittelst der Methode der Flächenverwandlung berechnen, denn die in der Klammer enthaltenen Grössen und $d_1{}^2$ stellen Rechtecke dar. Um zunächst t, die Strecke für das erste Glied des Ausdruckes für k_3, zu erlangen, zeichnen wir mit h_1' als Seite das Quadrat $ABCD$ (Fig. 62, S. 137), in dasselbe mit h_1'' als Seite das Quadrat $DEFG$, dann wird durch Verlängerung von EF die Fläche $ABHFGD$



Figur 62.

gleich $(h_1'^2 - h_1' h_1'' + h_1''^2)$. Diese Fläche verwandeln wir in das Rechteck $ABSK$, machen $SN = \frac{1}{6} \cdot SK$, auf der Verlängerung von KS die Strecke $SP = SB$, zeichnen über NP als Durchmesser einen Halbkreis, wodurch sich ergiebt $\overline{SQ}^2 = \frac{1}{6}(h_1'^2 - h_1' h_1'' + h_1''^2) = t^2$.

Nun erhalten wir k_3 dadurch, dass wir mit t und d_1 das rechtwinkelige Dreieck SQR konstruieren, seine Kathete QR ist der gesuchte Schwingungshalbmesser. Mit dieser Strecke ergeben sich die Tangentenpunkte ε, ζ auf der Axe $X_1 S X_1$.

In gleicher Weise finden wir vermöge der Formel

$$k_4{}^2 = \frac{1}{6}(h_2'^2 - h_2' h_2'' + h_2''^2) - d_2{}^2$$

auf der zur Diagonale BD parallelen Schwerpunktsaxe $Y_1 S Y_1$ die Tangentenpunkte η, ϑ der Curve. Damit sind acht Tangenten der Centralellipse bekannt, so dass sich dieselbe verzeichnen lässt. Als Hauptaxen derselben ergeben sich die Strecken $A_2 B_2 = 2 k_a$, $C_2 D_2 = 2 k_b$, welches die gesuchten Hauptaxen des Centralellipsoides sind.

Die halbe Länge der dritten Hauptaxe finden wir ebenfalls mit Hilfe der Methode der Flächenverwandlung. Es ist

$$k_c{}^2 = \frac{h_2'(3a^2 - f^2) + h_2''(3e^2 - b^2)}{3(h_2' + h_2'')} + g^2 - d^2.$$

Die graphische Bestimmung von k_c lehrt das folgende Schema

$$k_c{}^2 = \frac{h_2'}{3(h_2' + h_2'')}(3a^2 - f^2) + \frac{h_2''}{3(h_2' + h_2'')}(3e^2 - b^2) + g^2 - d^2$$

$$= \frac{h_2'}{h}(\alpha^2 - f^2) + \frac{h_2''}{h}(\beta^2 - b^2) + g^2 - d^2$$

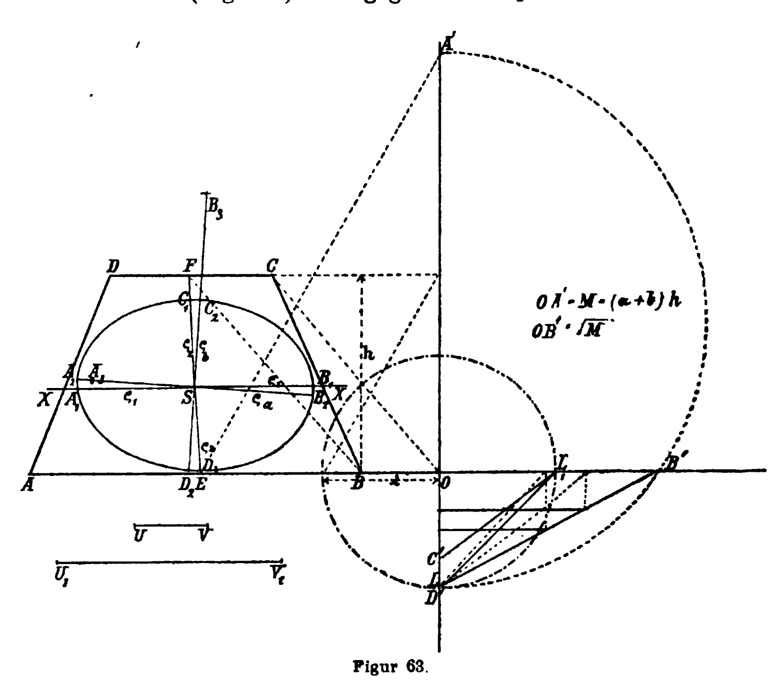
$$= \frac{h_2'}{h}\gamma^2 + \frac{h_2''}{h}\delta^2 + g^2 - d^2 = \varepsilon^2 + \zeta^2 + g^2 - d^2,$$

$$k_c = \sqrt{\varepsilon^2 + \zeta^2 + g^2 - d^2}.$$

Es wurde gefunden $k_c = Z_1 Z_2$, so dass die Länge der dritten Hauptaxe $2k_c = 2 . Z_1 Z_2$ ist. Damit sind die Hauptaxen des Centralellipsoides von Clebsch gegeben. Setzen wir die Streckengrössen k_a, k_b, k_c mittelst der Maasseinheit in Zahlengrössen um, dann lässt sich die Gleichung seiner Fläche sofort anschreiben.

b. Das Centralellipsoid von Poinsot. Hier sind die Schwerpunktsaxen XSX und ESF die Richtungen konjugierter Durchmesser der Centralellipse des Schwerpunktes. Die Hauptaxenlängen und die Hauptaxenrichtungen lassen sich ebenso berechnen, wie bei der Dreiecksfläche.

Ist $ABCD$ (Fig. 63) das gegebene Trapez und sollen die Haupt-



Figur 63.

axen durch Konstruktion gefunden werden, so haben wir zunächst graphisch zu berechnen

$$\varrho_1 = \frac{1}{k_1\sqrt{M}}, \qquad \varrho_2 = \frac{1}{k_2\sqrt{M}}, \qquad \varrho_c = \frac{1}{k_c\sqrt{M}}.$$

Die graphische Bestimmung der Trägheitshalbmesser ist bereits bekannt. Die Bestimmung von $M = (a + b)h = OA'$, $\sqrt{M} = \sqrt{(a+b)h} = OB'$ als Strecken geht aus der Figur hervor. Die Konstruktion von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_c$ ist bereits bekannt. Mit der Massbasis λ fanden wir $SA_1 = SB_1 = \varrho_1 = OD'$, $SC_1 = SD_1 = \varrho_2 = OC'$, $UV = \varrho_c$. Mit den konjugierten Durchmessern A_1B_1, C_1D_1 wurde die Centralellipse der Fläche verzeichnet, als die fehlenden Hauptaxen ergaben sich die Strecken $A_2B_2 = 2\varrho_a$, $C_2D_2 = 2\varrho_b$. Wie früher wurden bestimmt

$$\frac{1}{\varrho_a^2} = SA_3 = A, \quad \frac{1}{\varrho_b^2} = SB_3 = B, \quad \frac{1}{\varrho_c^2} = U_1V_1 = C,$$

womit die Gleichung dieses Centralellipsoides angeschrieben werden kann,

wenn die Längen der Strecken SA_3, SB_3, U_1V_1 mittelst λ durch Zahlengrössen ausgedrückt worden sind.

Sind die nicht parallelen Seiten des Trapezes einander gleich, dann sind die sämtlichen Hauptaxenrichtungen beider Ellipsoide gegeben, es sind dieses die Schwerpunktsaxen XSX, ESF und die auf der Ebene der Fläche senkrechte Schwerlinie. In diesem Falle ist $k_a = k_1$, $k_b = k_2$, $\varrho_a = \varrho_1$, $\varrho_b = \varrho_2$.

Nach dem Vorstehenden dürfte es keine Schwierigkeiten machen, die Centralellipsoide des Schwerpunktes einer beliebigen Vierecks-, Fünfecksfläche u. s. f. graphisch zu bestimmen.

11. Trägheitsmomente einer elliptischen Platte von gleichförmiger Dicke und Dichtigkeit für durch ihren Schwerpunkt gehende Axen und die Gleichungen der Centralellipsoide des Schwerpunktes.

Es sei ε die konstante Dichtigkeit, τ die unendlich kleine Dicke der Platte, a die grosse, b die kleine Halbaxe der begrenzenden Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Für die grosse Axe der Ellipse haben wir

$$T_a = M k_a{}^2 = 4\varepsilon\tau\int_0^b y^2 x\, dy = 4\varepsilon\tau\frac{a}{b}\int_0^b y^2\sqrt{b^2 - y^2}\, dy,$$

$$T_a = \varepsilon\tau\frac{ab^3\pi}{4}, \qquad k_a{}^2 = \frac{b^2}{4}.$$

Für die kleine Axe der Ellipse finden wir in gleicher Weise

$$T_b = \varepsilon\tau\frac{a^3b\pi}{4}, \qquad k_b{}^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Für die zur Ebene der Fläche senkrechte Schwerpunktsaxe haben wir

$$T_c = T_a + T_b = \varepsilon\tau\frac{ab\pi}{4}(a^2 + b^2), \qquad k_c{}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche eine beliebige Schwerpunktsaxe mit den Hauptaxen des Schwerpunktes einschliesst, die zugleich Hauptaxenrichtungen beider Ellipsoide sind, so erhalten wir für dieselbe

$$T = T_a\cos^2\alpha + T_b\cos^2\beta + T_c\cos^2\gamma = \varepsilon\tau\frac{ab\pi}{4}(a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta),$$

$$k^2 = \frac{1}{4}(a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta).$$

Damit sind die Gleichungen der Centralellipsoide des Schwerpunktes

$$\text{I} \qquad b^2x^2 + a^2y^2 + (a^2 + b^2)z^2 - \frac{4}{\varepsilon\tau ab\pi} = 0.$$

$$\text{II} \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 + b^2} - \frac{1}{4} = 0.$$

Mit $a = b$ geht die Ellipse in einen Kreis über, so dass für die kreisförmige Platte

$$\text{I} \quad a^2(x^2+y^2) + 2a^2z^2 - \frac{4}{\varepsilon\tau a^2\pi} = 0, \qquad \text{II} \quad \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{2a^2} - \frac{1}{4} = 0.$$

11. Trägheitsmomente und Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes einer homogenen, durch eine Doppelordinate begrenzte Parabelfläche, wenn die Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ ist.

Die Parabelaxe, die zur Doppelordinate parallele Schwerpunktsaxe und die zur Fläche senkrechte Schwerpunktsaxe sind Hauptaxenrichtungen beider Ellipsoide.

Das Trägheitsmoment und der Trägheitshalbmesser bezüglich der Parabelaxe sind

$$A = Mk_a^2 = \frac{2\varepsilon\tau}{3}\int_0^y y^3 dx = \frac{2\varepsilon\tau}{3p}\int_0^y y^4 dy = \frac{2}{15}\frac{\varepsilon\tau}{p}y^5 = \frac{4}{15}\varepsilon\tau x y^3 = \frac{1}{5}My^2,$$

$$k_a^2 = \frac{1}{5}y^2 = (0{\cdot}44721\, y)^2.$$

Für die zur Ordinatenaxe parallele Schwerpunktsaxe erhalten wir, wenn beachtet wird, dass der Abstand des Schwerpunktes vom Coordinatenursprunge gleich $\frac{3}{5}x$ ist,

$$B = 2\varepsilon\tau\int_0^x x^2 y\, dx - 2\varepsilon\tau\frac{2}{3}xy\left(\frac{3}{5}x\right)^2.$$

Nun ist

$$\int_0^x x^2 y\, dx = \frac{1}{4p^3}\int_0^y y^6\, dy = \frac{1}{28}\frac{y^7}{p^3} = \frac{2}{7}x^3 y,$$

folglich wird

$$B = 2\varepsilon\tau\left(\frac{2}{7}x^3 y - \frac{6}{25}x^3 y\right) = \frac{16}{175}\varepsilon\tau x^3 y = \frac{12}{175}Mx^2,$$

$$k_b^2 = \frac{12}{175}x^2 = (0{\cdot}26186\, x)^2.$$

Für die zur Ebene der Fläche senkrechte Schwerpunktsaxe erhalten wir

$$C = A + B = \frac{1}{5}M\left(y^2 + \frac{12}{35}x^2\right), \quad k_c^2 = \frac{1}{5}\left(y^2 + \frac{12}{35}x^2\right).$$

Mit diesen Resultaten ergiebt sich für die Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes, wenn die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Flächen mit ξ, η, ζ bezeichnet werden und die Hauptaxenrichtungen, wie immer in der Folge, Coordinatenaxen sind,

$$\text{I} \quad \frac{1}{5}My^2\xi^2 + \frac{12}{175}Mx^2\eta^2 + \frac{1}{5}M\left(y^2 + \frac{12}{35}x^2\right)\zeta^2 - 1 = 0.$$

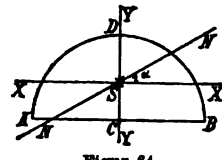
$$\text{II} \quad \frac{\xi^2}{\frac{1}{5}y^2} + \frac{\eta^2}{\frac{12}{175}x^2} + \frac{\zeta^2}{\frac{1}{5}\left(y^2 + \frac{12}{35}x^2\right)} - 1 = 0.$$

12. Welches ist der Trägheitsradius einer von einer Doppelordinate begrenzten Parabelfläche für die durch den Parabelscheitel gehende und zur Ebene der Fläche senkrechte Axe, wenn die Gleichung der Curve $y^2 = 2px$ ist?

Die Trägheitsmomente für die Coordinatenaxen sind $T_x = \frac{1}{5} M y^2$, $T_y = \frac{3}{7} M x^2$, folglich ist das Moment für die vorgeschriebene Axe

$$T_z = T_x + T_y = \frac{1}{35} M (7y^2 + 15x^2), \quad \text{so dass} \quad k_z^2 = \frac{1}{35}(7y^2 + 15x^2).$$

13. Welches sind die Gleichungen der Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes S einer homogenen Halbkreisfläche?



Figur 64.

Die Hauptaxenrichtungen der Ellipsoide sind die Symmetrielinie CD der Fläche ABD (Fig. 64), die zum Durchmesser AB parallele Schwerpunktsaxe XSX und die auf der Ebene der Fläche senkrechte Schwerpunktsaxe.

Bezeichnet a den Radius der Fläche, so ist das Moment der ganzen Kreisfläche für irgend einen Durchmesser gleich $\varepsilon\tau\pi\frac{a^4}{4} = M\frac{a^2}{4}$, folglich das Trägheitsmoment der Halbkreisfläche für den Durchmesser AB gleich $M\frac{a^2}{8}$. Nun ist $CS = \frac{4a}{3\pi}$, mithin das Moment für die zu AB parallele Schwerpunktsaxe XSX und der entsprechende Trägheitsradius

$$T_x = M\frac{a^2}{8} - \frac{M}{2}\left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 = Ma^2\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = \pi a^4\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = 0\cdot1098\, a^4,$$

$$k_x^2 = 2a^2\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = 0\cdot0698\, a^2, \quad \text{mit } M = a^2\pi.$$

Für die Symmetrielinie $YCDY$ der Fläche haben wir

$$T_y = M\frac{a^2}{8} = 0\cdot3927\, a^4, \qquad k_y^2 = \frac{a^2}{4} = 0\cdot25\, a^2.$$

Für eine beliebige Schwerpunktsaxe NSN in der Ebene der Fläche, welche mit der Axe XSX den Winkel α einschliesst, bekommen wir

$$T = T_x \cos^2\alpha + T_y \sin^2\alpha = Ma^2\left\{\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{8}\sin^2\alpha\right\},$$

$$T = Ma^2(0\cdot698\cos^2\alpha + 0\cdot125\sin^2\alpha), \quad k^2 = (0\cdot1396\cos^2\alpha + 0\cdot25\sin^2\alpha)a^2.$$

Für die auf der Ebene der Fläche senkrechte Schwerpunktsaxe ergiebt sich

$$T_z = T_x + T_y = Ma^2\left(\frac{1}{4} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = 0\cdot1599\, Ma^2 = 0\cdot49208\, a^4, \text{ mit } M = a^2\pi,$$

$$k_z^2 = 0\cdot3198\, a^2.$$

Damit sind die Gleichungen der Centralellipsoide des Schwerpunktes

I $$0{\cdot}1098\, a^4 x^2 + 0{\cdot}3927\, a^4 y^2 + 0{\cdot}49208\, a^4 z^2 - 1 = 0.$$

II $$\frac{x^2}{0{\cdot}0698\, a^2} + \frac{y^2}{0{\cdot}25\, a^2} + \frac{z^2}{0{\cdot}3198\, a^2} - 1 = 0.$$

14. Welches sind die Gleichungen der Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes einer Kreisringfläche, wenn die Masse des Ringes gleich seiner Fläche, die Radien der Begrenzungskreise a_1 und a_2 sind, wobei $a_1 > a_2$ ist?

Beide Ellipsoide sind offenbar Rotationsellipsoide. Für eine durch den Schwerpunkt gehende, in der Ebene des Ringes gelegene Axe haben wir offenbar

$$T_s = \frac{\pi}{4} a_1{}^4 - \frac{\pi}{4} a_2{}^4 = \frac{\pi}{4}(a_1{}^4 - a_2{}^4) = \frac{\pi}{4}(a_1{}^2 - a_2{}^2)(a_1{}^2 + a_2{}^2) = \frac{1}{4} M (a_1{}^2 + a_2{}^2),$$

$$k_s{}^2 = \frac{1}{4}(a_1{}^2 + a_2{}^2).$$

Für die auf der Ebene des Ringes senkrecht stehende Schwerpunktsaxe ist

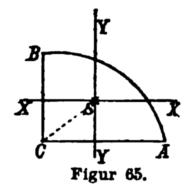
$$T_c = 2 T_s = \frac{\pi}{2}(a_1{}^4 - a_2{}^4) = \frac{1}{2} M (a_1{}^2 + a_2{}^2), \quad k_c{}^2 = \frac{1}{2}(a_1{}^2 + a_2{}^2).$$

Hier sind zwei beliebige, in der Ebene des Ringes gelegene, aufeinander senkrecht stehende Axen Hauptaxenrichtungen, daher sind die Gleichungen der Centralellipsoide des Schwerpunktes

I $$\frac{1}{4} M (a_1{}^2 + a_2{}^2)(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} M (a_1{}^2 + a_2{}^2) z^2 - 1 = 0.$$

II $$4\, \frac{x^2 + y^2}{a_1{}^2 + a_2{}^2} + 2\, \frac{z^2}{a_1{}^2 + a_2{}^2} - 1 = 0.$$

15. Welches sind die Trägheitsmomente und Trägheitsradien der homogenen Fläche eines elliptischen Quadranten für die zu den Begrenzungsgeraden parallelen Schwerpunktsaxen?



Figur 65.

Ist ABC (Fig. 65) der elliptische Quadrant, S sein Schwerpunkt, welcher von den Halbaxen $AC = a$, $BC = b$ um die Strecken $\frac{4b}{3\pi}$, $\frac{4a}{3\pi}$ entfernt liegt, so sind zunächst die Trägheitsmomente der gegebenen Fläche für ihre Halbaxen AC, BC, wenn die Masse gleich der Fläche genommen wird, $T_a = \frac{1}{16} a b^3 \pi$, $T_b = \frac{1}{16} a^3 b \pi$. Dadurch erhalten wir für die zu AC parallele Schwerpunktsaxe XSX

$$T_x = \frac{1}{16} a b^3 \pi - \frac{a b \pi}{4}\left(\frac{4b}{3\pi}\right)^2 = a b^3 \pi \left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2}\right) = 0{\cdot}01743\, a b^3 \pi = 0{\cdot}0547\, a b^3,$$

$$k_x{}^2 = 4 . 0{\cdot}01743\, b^2 = 0{\cdot}0698\, b^2, \quad k_x = 0{\cdot}264\, b.$$

In gleicher Weise finden wir für die zu BC parallele Schwerpunktsaxe YSY

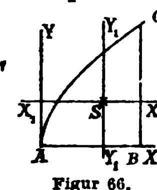
$$T_y = 0{\cdot}0547\, a^3 b, \quad k_y^2 = 0{\cdot}0698\, a^2, \quad k_y = 0{\cdot}264\, a.$$

Noch ist für die zur Ebene der Fläche senkrechte Schwerpunktsaxe, weil $CS = \frac{4}{3\pi}\sqrt{a^2+b^2}$, das Trägheitsmoment für die durch C laufende parallele Axe $= \frac{ab\pi}{16}(a^2+b^2)$ ist,

$$T_z = \frac{1}{16}ab\pi(a^2+b^2) - \frac{1}{4}ab\pi\frac{4^2}{9\pi^2}(a^2+b^2) = ab\pi(a^2+b^2)\left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2}\right),$$

$$k_z^2 = (a^2+b^2)\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right).$$

16. Eine ebene Fläche wird begrenzt von einem parabolischen Bogen, der Axe dieses Bogens und einer zu dieser Linie senkrechten Geraden. Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = 2px$, die Masse der Fläche gleich ihrem Inhalte. Welches sind die Ausdrücke für die Trägheitsmomente und Trägheitsradien bezüglich der zu den Begrenzungsgeraden parallelen Schwerpunktsaxen?



Figur 66.

Es sei ABC (Fig. 66) die gegebene Fläche mit dem Schwerpunkte S, A der Scheitel des Parabelbogens AC, dann ist ABX Abscissenaxe, die zu ihr senkrechte Gerade AY Ordinatenaxe. Die Coordinaten des Schwerpunktes S sind, mit $AB = x$, $BC = y$, $\bar{x} = \frac{3}{5}x$, $\bar{y} = \frac{3}{8}y$.

Die Trägheitsmomente der Fläche ABC für die Coordinatenaxen AX, AY sind $T_x = \frac{1}{3}\int y^3\,dx$, $T_y = \int x^2 y\,dx$, mithin diejenigen für die zu den Coordinatenaxen parallelen Schwerpunktsaxen X_1X_1, Y_1Y_1

$$T_{x_1} = \frac{1}{3}\int y^3\,dx - \frac{2}{3}xy\left(\frac{3}{8}y\right)^2, \qquad T_{y_1} = \int x^2 y\,dx - \frac{2}{3}xy\left(\frac{3}{5}x\right)^2.$$

Aber wir haben $x = \frac{y^2}{2p}$, $dx = \frac{y}{p}dy$, daher

$$T_{x_1} = \frac{1}{3p}\int_0^y y^4\,dy - \frac{3}{32}xy^3 = \frac{1}{15p}y^5 - \frac{3}{32}xy^3 = \left(\frac{2}{15} - \frac{3}{32}\right)xy^3 = \frac{19}{480}xy^3$$

$$= \frac{19}{320}My^2, \qquad k_{x_1}^2 = \frac{19}{320}y^2.$$

$$T_{y_1} = \frac{1}{4p^3}\int_0^y y^6\,dy - \frac{6}{25}x^3y = \frac{1}{4p^3}\frac{y^7}{7} - \frac{6}{25}x^3y = \left(\frac{2}{7} - \frac{6}{25}\right)x^3y = \frac{8}{175}x^3y$$

$$= \frac{12}{175}Mx^2, \qquad k_{y_1}^2 = \frac{12}{175}x^2.$$

Noch ist für die zur Ebene der Fläche senkrechte Schwerpunktsaxe, da nach 12 für die durch A laufende parallele Axe $T_z = M\left(\frac{1}{5}y^2 + \frac{3}{7}x^2\right)$,

$$T_{z_1} = M\left(\frac{1}{5}y^2 + \frac{3}{7}x^2\right) - M\left(\frac{9}{64}y^2 + \frac{9}{25}x^2\right) = M\left(\frac{19}{320}y^2 + \frac{12}{175}x^2\right),$$

$$k_{z_1}{}^2 = \frac{19}{320}y^2 + \frac{12}{175}x^2.$$

17. Die Gestalt einer homogenen, ebenen Platte und die Lage einer zu ihr senkrechten Axe sollen so bestimmt werden, dass das Trägheitsmoment der Platte für diese Axe ein Minimum ist, wenn die Masse, Dichtigkeit und Dicke der Platte bekannt sind.

Es sei M die Masse, ε die Dichtigkeit, τ die Dicke der Platte, x, y seien die Polarcoordinaten, dann ist

$$T = Mk^2 = \varepsilon\tau\int_0^y\int_0^{2\pi} y\,dx\,dy \,.\, y^2 = \frac{1}{4}\varepsilon\tau\int_0^{2\pi} y^4\,dx,$$

$$M = \varepsilon\tau\int_0^y\int_0^{2\pi} y\,dx\,dy = \frac{1}{2}\varepsilon\tau\int_0^{2\pi} y^2\,dx.$$

Mit $u = \int y^4\,dx$, $v = \int y^2\,dx$ erhalten wir, wenn a eine konstante Grösse bedeutet,

$$u - av = \int (y^4 - ay^2)\,dx, \qquad v = y^4 - ay^2,$$

daher durch die Formel des Kalküls der Variationsrechnung

$$N - \frac{d(P)}{dx} + \frac{d^2(Q)}{dx^2} - \dots = 0,$$

weil $P, Q, R, \dots$ sämtlich gleich Null sind,

$$4y^3 - 2ay = 0, \qquad y^2 = \frac{1}{2}a.$$

Dieses zeigt, dass die Scheibe kreisförmig sein und ihr Mittelpunkt mit der verlangten Axe zusammenfallen muss.

Nun haben wir

$$M = \frac{1}{2}\varepsilon\tau\int_0^{2\pi} y^2\,dx = \frac{1}{4}\varepsilon\tau a\int_0^{2\pi} dx = \frac{1}{2}\pi\varepsilon\tau a,$$

folglich

$$a = \frac{2M}{\pi\varepsilon\tau},$$

mithin ist der Halbmesser der Scheibe

$$y = \sqrt{\frac{M}{\pi\varepsilon\tau}}.$$

Walton, p. 383.

18. Es sind gegeben die Trägheitsmomente einer beliebigen ebenen Fläche für die durch einen Punkt gehenden drei Hauptaxen. Welches ist

das Trägheitsmoment für eine durch denselben Ursprung laufende, zu den drei Hauptaxen gleich geneigte Axe?

Sind A, B, C die Momente zweiten Grades für die Hauptaxen, von denen die eine senkrecht zu der gegebenen ebenen Fläche ist, welcher das Moment C entsprechen möge, und ist T das verlangte Moment, so haben wir

$$T = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma = (A+B+C)\cos^2\alpha = 2\,C\cos^2\alpha = \frac{2}{3}C,$$

denn wegen $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist $3\cos^2\alpha = 1$.

Walton, p. 385.

19. Eine ebene, homogene Fläche besitzt die Gestalt eines halben Auges der Lemniscate. Welches sind die Richtungen der Hauptaxen für den Knoten?

Bezeichnen x, y die Coordinaten irgend eines Infinitesimalelementes m der Platte, bezogen auf Axen in der Ebene der Fläche, welche durch den fraglichen Punkt gehen, ist ϑ die Neigung einer der zwei in der Ebene der Fläche gelegenen Hauptaxen des betreffenden Punktes gegen die Axe der x, die dritte Hauptaxe steht senkrecht auf der Ebene der Fläche, dann haben wir

$$tg\,2\,\vartheta = \frac{2\,\Sigma\,(m\,x\,y)}{\Sigma\,m\,(x^2 - y^2)}.$$

Im vorliegenden Falle ist nun

$$tg\,2\,\vartheta = 2\,\frac{\int\int r^3\,dr\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,d\vartheta}{\int\int r^3\,dr\,\cos 2\,\vartheta\,d\,\vartheta} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\,\vartheta\,\sin 2\,\vartheta\,d\,\vartheta}{\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 - \sin^2 2\,\vartheta)\cos 2\,\vartheta\,d\,\vartheta} = \frac{1}{2}.$$

Mithin sind die zwei in der Ebene der Fläche gelegenen Hauptaxen gegen die Axe der Lemniscate unter den Winkeln geneigt

$$\frac{1}{2}\,arc\left(tg = \frac{1}{2}\right), \qquad \frac{1}{2}\left\{\pi + arc\left(tg = \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Walton, p. 391.

20. Werden in den Mittelpunkten der drei Seiten der Fläche eines Dreieckes ABC drei materielle Punkte von der Masse $\frac{1}{3}M$ plaziert, wenn M die Masse der Fläche des Dreieckes bezeichnet, dann sind die Dreiecksfläche und das System der drei materiellen Punkte äquimomental.

Bezeichnen h_1, h_2 die Abstände der Eckpunkte B, C des Dreieckes ABC von einer beliebigen, durch den Eckpunkt A gehenden, in der Ebene des Dreieckes gelegenen Axe AX, dann ist das Trägheitsmoment der

Dreiecksfläche für diese Axe gleich $\frac{1}{6} M(h_1{}^2 + h_1 h_2 + h_2{}^2)$, dasjenige des materiellen Punktesystemes für dieselbe Axe gleich $\frac{M}{3}\left\{\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{2}\right)^2\right\} = \frac{1}{6} M(h_1{}^2 + h_1 h_2 + h_2{}^2)$, mithin sind beide Momente gleich. Die drei als System behandelten materiellen Punkte und die Dreiecksfläche besitzen denselben Schwerpunkt O. Ziehen wir durch O eine parallele Linie OX' zu AX, so ist klar, dass die Trägheitsmomente der zwei Systeme für OX' auch gleich sind. Weil diese Gleichheit für alle Axen durch O in der Ebene des Dreieckes besteht, so ist sie auch vorhanden für zwei in der Ebene des Dreieckes auf einander senkrecht stehende Linien OX', OY', daher auch für eine zur Ebene des Dreieckes senkrechte gerade Linie OZ'. Eine der Hauptaxen durch den Punkt O für beide Systeme ist normal zur Ebene der drei materiellen Punkte, sie ist dieselbe für beide Systeme. Die Hauptaxen für O in der Ebene beider Systeme sind jene zwei geraden Linien, für welche die Trägheitsmomente am grössten und kleinsten sind, mithin sind diese Axen dieselben für beide Systeme. Wenn für einen beliebigen Punkt zwei Systeme dieselben Hauptaxen und Hauptträgheitsmomente besitzen, dann besitzen sie auch dieselben Trägheitsmomente für jede beliebige, durch diesen Punkt gehende Axe und dieselben komplexen Momente für irgend zwei, in diesem Punkte sich schneidende gerade Linien. Ist dieser Punkt Schwerpunkt, dann ist dieselbe Sache für einen beliebigen anderen Punkt richtig. Wenn daher ein materieller Punkt, dessen Masse gleich dem dritten Teile von derjenigen der Dreiecksfläche ist, in dem Mittelpunkte einer jeden Dreieckseite angebracht wird, so ist das Trägheitsmoment der Dreiecksfläche für eine beliebige gerade Linie gleich demjenigen des Systemes der materiellen Punkte für dieselbe Linie, und das komplexe Moment für irgend zwei sich schneidende gerade Linien ist gleich demjenigen des Punktesystemes für dieselben Linien. Die zwei Systeme sind daher äquimomental.

Ein Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt einer beliebigen Dreiecksfläche kann auch in folgender Weise gefunden werden.

Denken wir uns dem Dreiecke ABC eine Ellipse eingeschrieben, welche zwei Dreiecksseiten AB, BC in ihren Mittelpunkten F, D berührt, dann berührt dieser Kegelschnitt auch die dritte Seite CA in ihrem Mittelpunkte E nach Carnot's Theorem. Weil DE parallel zu der Tangente CA in E ist, so geht die den Punkt E mit dem Mittelpunkte N von DF verbindende Gerade durch das Centrum, daher ist das Centrum des Kegelschnittes der Schwerpunkt des Dreieckes. Dieser Kegelschnitt ist eine Momentalellipse des Dreieckes. Um dasselbe zu beweisen, bestimmen

wir das Trägheitsmoment des Dreieckes für OE. Es sei $OE = r$, der halbe konjugierte Diameter gleich r', ω der Winkel zwischen r und r'. Damit ist $ON = \frac{1}{2}r$, folglich vermöge der Gleichung der Ellipse $\overline{EN}^2 = \frac{3}{4}r'^2$, daher das Trägheitsmoment für OE

$$= \frac{2}{3}M \cdot \frac{3}{4}r'^2 \sin^2\omega = \frac{M}{2} \cdot \frac{\Delta^2}{\pi^2 r^2},$$

wo Δ die Fläche der Ellipse bedeutet, so dass die Trägheitsmomente für OE, OF, OD umgekehrt proportional $\overline{OE}^2$, $\overline{OF}^2$, $\overline{OD}^2$ sind. Wenn wir eine Momentalellipse von den richtigen Dimensionen nehmen, dann wird sie den eingeschriebenen Kegelschnitt in E, F, D, somit auch in den entgegengesetzten Endpunkten dieser Diameter schneiden. Aber zwei Kegelschnitte können sich einander nicht in sechs Punkten schneiden, es sei denn, dass sie identisch sind. Folglich ist dieser Kegelschnitt eine Momentalellipse der Dreiecksfläche für den Punkt O. Eine Normale durch O zu der Ebene des Dreieckes ist eine Hauptaxe desselben. Folglich besitzt ein Momentalellipsoid der Dreiecksfläche den eingeschriebenen Kegelschnitt als Hauptschnitt. Sind a und b die Längen der Axen dieses Kegelschnittes, ist c die Länge der zur Ebene des Dreieckes senkrechten Axe des Ellipsoides, so haben wir

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Für eine gleichseitige Dreiecksfläche ist das Momentalellipsoid ein Sphäroid, jede Axe dieses Ellipsoides in der Ebene des Dreieckes ist eine Hauptaxe.

Weil irgend eine ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse auch eine Momentalellipse ist, so können wir auch die dem Dreiecke umgeschriebene Ellipse, deren Centrum mit dem Schwerpunkte zusammenfällt, als Momentalellipse ansehen.

21. Drei Punkte D, E, F können stets so bestimmt werden, dass die Trägheitsmomente und komplexen Momente eines Systemes dreier gleicher, in D, E, F plazierter materieller Punkte gleich den entsprechenden Trägheitsmomenten und komplexen Momenten einer beliebigen homogenen ebenen Fläche sind.

Es sei O der Schwerpunkt der Fläche, M ihre Masse, m diejenige eines der materiellen Punkte. Ferner seien OX, OY die Hauptaxen in der Ebene der Fläche für den Schwerpunkt, $M\alpha^2$, $M\beta^2$ die Trägheitsmomente für diese Axen, (x, y), (x', y'), (x'', y'') die Coordinaten der Punkte D, E, F. Mit diesen Bezeichnungen ergeben sich die Bedingungen

$$m(x^2+x'^2+x''^2) = M\beta^2, \quad m(y^2+y'^2+y''^2) = M\alpha, \quad xy+x'y'+x''y''=0,$$

ferner, weil beide Systeme denselben Schwerpunkt besitzen müssen,

$$x + x' + x'' = 0, \qquad y + y' + y'' = 0.$$

Die Elimination von x', y' und x'', y'' zwischen diesen Gleichungen giebt

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \frac{2}{3}\frac{M}{m}\alpha^2\beta^2, \qquad \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = 2\alpha^2\beta^2,$$

weil $3m = M$ sein muss. Damit ist die Gleichung einer Momentalellipse gefunden. Es folgt leicht, dass der Punkt D ganz beliebig auf dieser Ellipse angenommen werden kann, dass die Punkte E und F in den entgegengesetzten Endpunkten derjenigen Sehne liegen müssen, welche durch den Radius DO im Punkte N, mit $ON = \frac{1}{2} \cdot OD$, halbiert wird.

20 u. 21. Routh, Dynamics, Cap. I.

22. Beweise, dass das Trägheitsmoment einer homogenen Dreiecksfläche ABC für eine durch eine Ecke A gehende, zu seiner Ebene senkrechte Axe durch die Relation gegeben ist

$$T = \frac{M}{6}(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2 + h'_1{}^2 + h'_1 h''_2 + h''_2{}^2),$$

wenn M die Masse der Fläche bezeichnet, h_1, h_2 die Abstände der beiden anderen Ecken B, C von einer durch A gehenden, in der Ebene des Dreieckes beliebig gelegenen geraden Linie, h'_1, h'_2 die Entfernungen derselben Punkte von einer in der Ebene der Fläche gelegenen, durch A gehenden, zu der ersteren Geraden senkrechten geraden Linie sind.

23. Sind k_1, k_2 die Trägheitsradien einer homogenen, elliptischen Platte für zwei konjugierte Diameter, a, b die Halbaxen der Ellipse, dann ist

$$\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} = 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

24. Die Summe der Trägheitsmomente einer homogenen, elliptischen Fläche für zwei beliebige, zu einander senkrechte Tangenten ist immer dieselbe.

25. Welches ist das Quadrat des Trägheitshalbmessers der Fläche einer Lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ für die Axe der Curve?

$$k^2 = \frac{1}{48} a^2 (3\pi - 8).$$

26. Welches ist der Trägheitsradius der Fläche einer Lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ für eine Tangente in ihrem Knoten?

$$k = \frac{1}{4} a \sqrt{\pi}.$$

27. Welches sind die Hauptaxenrichtungen eines homogenen Halbkreisbogens für den einen seiner Endpunkte?

Die eine der Hauptaxen ist senkrecht zur Ebene des Bogens, die Neigungen der beiden anderen gegen die Sehne des Bogens ist durch die Gleichung gegeben

$$tg\, 2\vartheta = \frac{4}{\pi}.$$

28. Bestimme die Hauptaxenrichtungen der homogenen Fläche eines rechtwinkeligen Dreieckes für den Scheitel des rechten Winkels.

Die eine dieser Richtungen ist senkrecht zur Ebene des Dreieckes, die beiden anderen, in seiner Ebene gelegenen sind zu seinen Katheten unter den Winkeln $\frac{1}{2}\, arc \left(tg = \frac{tg\, 2\alpha}{4} \right)$ geneigt, wo α einen der spitzen Winkel des Dreieckes bezeichnet.

Griffin, Solutions of the Examples on the motion of a Rigid Body, p. 8

29. Eine parabolische Fläche wird begrenzt durch die Curve, ihre Axe und ihren Halbparameter. Welches ist die Lage der Hauptaxen für den Parabelscheitel, wenn ϑ die Neigung einer der Hauptaxen in der Ebene der Fläche zu der Parabelaxe bezeichnet?

$$tg\, 2\vartheta = \frac{35}{13}.$$

30. Welches sind die Hauptaxenrichtungen einer elliptischen Fläche für einen Punkt auf der Ellipse?

Die eine der Axen steht senkrecht auf der Fläche, die Neigung einer der beiden anderen, welche in der Ebene der Fläche liegen, gegen die grosse Axe der Ellipse ist gegeben durch

$$tg\, \vartheta = \frac{8\, x\, y}{a^2 - b^2 + (x^2 - y^2)},$$

wo x, y die Coordinaten des fraglichen Punktes, bezogen auf die Axen der Ellipse als Coordinatenaxen, sind.

Griffin, Ib., p. 8. 27—30. Walton, p. 392.

31. Bringt man in den Mittelpunkten der Seiten eines Parallelogrammes je einen materiellen Punkt von der Masse gleich $\frac{1}{6}$ der Masse seiner Fläche und in dem Schwerpunkte dieser Fläche einen fünften materiellen Punkt von der Masse gleich $\frac{1}{3}$ derjenigen der Fläche an, dann sind diese fünf Punkte und das Parallelogramm äquimomentale Systeme.

32. Es ist gegeben eine homogene, elliptische Fläche. Bringt man drei materielle Punkte, von denen jeder gleich $\frac{1}{6}$ der Masse dieser Fläche, den einen in dem einen Endpunkte der grossen Axe, die beiden anderen in den Endpunkten der die grosse Halbaxe halbierenden Ordinate, einen vierten materiellen Punkt von der Masse gleich $\frac{1}{2}$ derjenigen dieser Fläche in ihrem Schwerpunkte an, dann sind die Trägheitsmomente und komplexen Momente der elliptischen Fläche und des materiellen Punktesystemes dieselben für alle Axen.

31 und 32, Routh, Dynamics, Cap. I.

Dritter Abschnitt.

Trägheitsmomente und Centralellipsoide beliebiger, homogener Körper.

1. Das homogene, rechtwinkelige Parallelopiped mit den Kantenlängen a, b, h und der Dichtigkeit $\varepsilon = 1$.

Die zu den Kanten parallelen Schwerpunktsaxen sind Hauptaxenrichtungen der Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes. Nehmen wir diese Schwerpunktsaxen zu Coordinatenaxen, dann sind die zu den Coordinatenebenen parallelen Schnitte des Körpers $X = b\,h$, $Y = a\,h$, $Z = a\,b$, daher

$$\int x^2 X\,dx = b\,h \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2\,dx = \frac{1}{12}\,b\,h\,a^3 = \frac{1}{12}\,M a^2,$$

$$\int y^2\,Y\,dy = a\,h \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2\,dy = \frac{1}{12}\,a\,h\,b^3 = \frac{1}{12}\,M b^2,$$

$$\int z^2\,Z\,dz = a\,b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\,dz = \frac{1}{12}\,a\,b\,h^3 = \frac{1}{12}\,M h^2,$$

folglich

$$A = \int y^2\,Y\,dy + \int z^2\,Z\,dz = \frac{1}{12}\,a\,b\,h\,(b^2 + h^2) = \frac{1}{12}\,M(b^2 + h^2),$$

$$B = \int x^2\,X\,dx + \int z^2\,Z\,dz = \frac{1}{12}\,a\,b\,h\,(a^2 + h^2) = \frac{1}{12}\,M(a^2 + h^2),$$

$$C = \int y^2\,Y\,dy + \int x^2\,X\,dx = \frac{1}{12}\,a\,b\,h\,(a^2 + b^2) = \frac{1}{12}\,M(a^2 + b^2).$$

Die entsprechenden Trägheitshalbmesser sind nun durch die Relationen gegeben

$$k_a{}^2 = \frac{1}{12}(b^2 + h^2), \qquad k_b{}^2 = \frac{1}{12}(a^2 + h^2), \qquad k_c{}^2 = \frac{1}{12}(a^2 + b^2).$$

Für eine beliebige durch den Schwerpunkt gehende Axe ergiebt sich damit

$$T = \frac{1}{12}\,M\,(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta + h^2 \sin^2\gamma),$$

$$k^2 = \frac{1}{12}(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta + h^2 \sin^2\gamma).$$

Zufolge dieser Resultate sind die Gleichungen der Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes

I $$\left\{(b^2+h^2)x^2+(a^2+h^2)y^2+(a^2+b^2)z^2\right\}\frac{M}{12}=1,$$

II $$\frac{x^2}{b^2+h^2}+\frac{y^2}{a^2+h^2}+\frac{z^2}{a^2+b^2}=\frac{1}{12}.$$

Mit $a=b$ wird $A=B=\frac{1}{12}M(a^2+h^2)$, $C=\frac{1}{6}Ma^2$, beide Ellipsoide sind in diesem Falle Rotationsellipsoide.

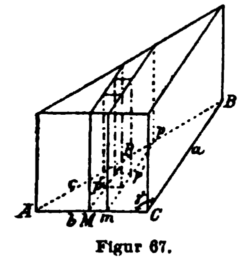
Mit $a=b=h$ nimmt das Parallelopiped die Gestalt eines Würfels an, für denselben ist $A=B=C=T=\frac{1}{6}a^5=\frac{1}{6}Ma^2$, $k_a{}^2=k_b{}^2=k_c{}^2=\frac{1}{6}a^2$. Die Centralellipsoide des Schwerpunktes sind in diesem Falle Kugelflächen mit den Radien $\sqrt{\frac{6}{a^5}}$, $\sqrt{\frac{a^2}{6}}$.

Ist die Höhe, resp. Länge des Parallelopipedons unendlich klein, so erscheint dasselbe als rechteckige Fläche; indem wir in obigen Formeln h gegen a und b vernachlässigen, erhalten wir für dieselbe

$$A=\frac{1}{12}Mb^2,\qquad B=\frac{1}{12}Ma^2,\qquad C=\frac{1}{12}M(a^2+b^2),$$
$$T=\frac{1}{12}M(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha).$$

I $$\left\{b^2x^2+a^2y^2+(a^2+b^2)z^2\right\}\frac{M}{12}=1,$$

II $$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2+b^2}=\frac{1}{12}.$$



Figur 67.

2. Gerades dreiseitiges Prisma mit beliebiger Grundfläche und $\varepsilon=1$.

a) Trägheitsmoment für eine Kante. Ist ABC (Fig. 67) die Grundfläche des Körpers, A die Projektion der Axe, h die Höhe des Prismas, so haben wir mit Rücksicht auf die Figur und das Problem 3, Abschnitt II

$$T_A=Mk_A{}^2=\int_0^h\int_0^b\int_0^y(x^2+y'^2-2xy'\cos\gamma)\,\varepsilon\sin\gamma\,dz\,dx\,dy$$
$$=h\sin\gamma\int_0^b\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3-xy^2\cos\gamma\right)dx$$
$$=h\sin\gamma\int_0^b\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{3}\frac{a^3}{b^3}-\frac{a^2}{b^2}\right)x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} h\, a\, b \sin\gamma (6\, b^2 + 2\, a^2 - 6\, a\, b \cos\gamma)$$

$$= \frac{1}{12} M \left\{6\, b^2 + 2\, a^2 - 3\,(a^2 + b^2 - c^2)\right\},$$

$$T_A = \frac{1}{12} M (3\, b^2 + 3\, c^2 - a^2), \quad k_A{}^2 = \frac{1}{12}(3\, b^2 + 3\, c^2 - a^2).$$

Sind die Seiten b und c der Grundfläche einander gleich und bezeichnet e die zur Basis gehörige Höhe des Grunddreieckes, so ergiebt sich

$$T_A = \frac{1}{12} M (6\, b^2 - a^2) = \frac{1}{3} M \left(\frac{b^2}{2} + e^2\right),$$

$$k_A{}^2 = \frac{1}{12}(6\, b^2 - a^2) = \frac{1}{3}\left(\frac{b^2}{2} - e^2\right).$$

b) Trägheitsmoment für die zu den Kanten parallele Schwerpunktsaxe. Bezeichnet e die zu der Seite $B\,C$ gehörige Höhe der Grundfläche, dann ist

$$T_Z = T_A - M\left(\frac{2}{3} e\right)^2 = \frac{1}{36} M \left\{9\,(b^2 + c^2) - 3\, a^2 - 16\, e^2\right\}.$$

Mit Rücksicht auf Problem 4, Abschnitt II ergiebt sich

$$T_Z = \frac{1}{36} M (a^2 + b^2 + c^2), \quad k_Z{}^2 = \frac{1}{36}(a^2 + b^2 + c^2).$$

c) Trägheitsmoment für eine beliebige, durch den Schwerpunkt gehende, zu der Grundfläche parallele Axe. Bezeichnet F den Inhalt des Normalschnittes durch den Schwerpunkt, legen wir durch einen seiner Eckpunkte eine Parallele zu der Axe, nennen die Abstände der beiden anderen Eckpunkte von dieser Parallelen h_1, h_2, dann ist das Trägheitsmoment einer unendlich dünnen zum Normalschnitte parallelen Scheibe von der Dicke $d\,z$ im Abstande z von dem Normalschnitte für diese Axe $\frac{1}{18} F (h_1{}^2 - h_1\, h_2 + h_2{}^2)\, d\,z + F z^2\, d\,z$, daher das Trägheitsmoment des ganzen Körpers für die gegebene Axe

$$T_s = F \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \left\{\frac{1}{18}(h_1{}^2 - h_1\, h_2 + h_2{}^2) + z^2\right\} d\,z$$

$$= \frac{1}{36} F h \left\{2\,(h_1{}^2 - h_1\, h_2 + h_2{}^2) + 3\, h^2\right\},$$

$$T_s = \frac{1}{36} M \left\{2\,(h_1{}^2 - h_1\, h_2 + h_2{}^2) + 3\, h^2\right\},$$

und

$$k_s{}^2 = \frac{1}{36}\left\{2\,(h_1{}^2 - h_1\, h_2 + h_2{}^2) + 3\, h^2\right\}.$$

Damit ist das Trägheitsmoment für jede zur Grundfläche parallele Schwerpunktsaxe bestimmt.

Die zu den Kanten des Prismas parallele Schwerpunktsaxe ist eine Hauptaxenrichtung der Centralellipsoide des Schwerpunktes, die beiden anderen Hauptaxen liegen in dem Normalschnitte durch den Schwerpunkt, derselbe ist ein Hauptschnitt für beide Ellipsoide. Die in der Ebene dieses Hauptschnittes gelegenen Hauptaxen der Ellipsoide lassen sich in derselben Weise wie für die Dreiecksfläche bestimmen, so dass die Centralellipsoide des Schwerpunktes dieses Körpers ohne Schwierigkeit ermittelt werden können.

3. Das gerade, regelmässige, $n$seitige Prisma mit der Dichtigkeit $\varepsilon = 1$.

1) Trägheitsmoment für die geometrische Axe. Bezeichnet s die Länge einer der Seiten der regulären Grundfläche, e die Basishöhe eines ihrer regelmässigen Dreiecke, r den Halbmesser des der Grundfläche umschriebenen Kreises, h die Höhe des Körpers, so ist mit Rücksicht auf das vorhergehende Problem und Problem 6, Abschnitt II

$$T_Z = \frac{1}{3}\frac{n s e}{2} h\left(\frac{1}{2} r^2 + e^2\right) = \frac{1}{6} M (r^2 + 2 e^2)$$

$$= \frac{1}{12} M\left(e^2 + \frac{s^2}{12}\right) = \frac{1}{12} M s^2 \frac{2 + \cos\frac{2\pi}{n}}{1 - \cos\frac{2\pi}{n}}.$$

2) Trägheitsmoment für eine beliebige zu der Grundfläche parallele Schwerpunktsaxe. Nach Problem 6, Abschnitt II ist das Trägheitsmoment einer regulären Polygonfläche für irgend eine in ihrer Ebene gelegene Schwerpunktsaxe, wenn F die Masse der Fläche bezeichnet, gleich $\frac{F}{4}\left(r^2 - \frac{s^2}{6}\right)$, daher erhalten wir für das Prisma als Moment zweiten Grades bezüglich der gegebenen Axe

$$T_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left\{\frac{F}{4}\left(r^2 - \frac{s^2}{6}\right) d z + F z^2 d z\right\}$$

$$= \frac{F h}{4}\left\{r^2 - \frac{s^2}{6} + 3 h^2\right\} = \frac{1}{4} M\left\{r^2 - \frac{s^2}{6} + 3 h^2\right\}.$$

Die geometrische Axe ist hier eine Hauptaxe des Schwerpunktes, die Normalebene durch den Schwerpunkt Hauptebene, für alle Axen in dieser Ebene sind die Trägheitsmomente einander gleich, daher die Centralellipsoide des Schwerpunktes Rotationsellipsoide, für welche sich ergiebt

$$\text{I} \qquad \frac{1}{4} M\left(r^2 - \frac{s^2}{6} + 3 h^2\right)(x^2 + y^2) + \frac{1}{6} M (r^2 + 2 e^2) z^2 = 1,$$

$$\text{II} \qquad \frac{x^2 + y^2}{\frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{s^2}{6} + 3 h^2\right)} + \frac{z^2}{\frac{1}{6}(r^2 + 2 e^2)} = 1.$$

4. Die gerade homogene Pyramide mit rechteckiger Grundfläche und der Dichtigkeit $\varepsilon = 1$.

Hier sind die Höhenlinie der Pyramide und die zu den Seiten der Grundfläche parallelen Schwerlinien Hauptaxenrichtungen der Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes. Lasse sein a, b die in einer Ecke zusammenstossenden Seiten der Grundfigur, h die Höhe der Pyramide.

1) Trägheitsmoment für die Höhenlinie der Pyramide. Legen wir in den Abständen z und $z + dz$ von der Spitze zwei zur Grundfläche parallele Ebenen, so schliessen dieselben die Masse $F \frac{z^2}{h^2} dz$ ein, wenn F den Inhalt der Grundfläche bedeutet; das Trägheitsmoment dieser Scheibe für die Höhenlinie ist gleich $\frac{1}{3} F \frac{a^2 + b^2}{h^4} z^4 dz$, daher dasjenige der ganzen Pyramide für die fragliche Gerade

$$C = \frac{1}{3} F \frac{a^2 + b^2}{h^4} \int_0^h z^4 dz = \frac{1}{3} F h \frac{a^2 + b^2}{5} = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2).$$

2) Trägheitsmoment für die zu den Seiten a parallele Schwerlinie. Das Trägheitsmoment der genannten Scheibe für die durch die Spitze der Pyramide laufende, zu der Schwerlinie parallele Gerade ist

$$d T_x = \frac{1}{12} \frac{F}{h^4} (b^2 + 12 h^2) z^4 dz,$$

daher dasjenige der ganzen Pyramide für dieselbe Gerade

$$T_x = \frac{1}{12} \frac{F}{h^4} (b^2 + 12 h^2) z^4 dz = \frac{1}{60} F h (b^2 + 12 h^2) = \frac{1}{20} M (b^2 + 12 h^2),$$

mithin ist das Moment zweiten Grades für die gegebene Schwerlinie

$$A = \frac{1}{20} M (b^2 + 12 h^2) - M\left(\frac{3}{4} h\right)^2 = \frac{1}{80} M (4 b^2 + 3 h^2).$$

3) Trägheitsmoment für die zu den Seiten b parallele Schwerlinie. Wir erhalten in derselben Weise wie vorhin

$$T_{"} = \frac{1}{20} M (a^2 + 12 h^2), \qquad B = \frac{1}{80} M (4 a^2 + 3 h^2).$$

Mit diesen Resultaten sind die Gleichungen der Centralellipsoide

I ... $_3{}^2 + h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3\}$.

II ... Tetraeders materielle Punkte, von denen ...d wird ein materieller Punkt von der Masse

Dann ... ramide angebracht, dann ist das Trägheits- ...nktesystemes bezüglich der XY-Ebene gleich

$$\ldots + h_3\Big)^2 + \frac{M}{20}(h_1{}^2 + h_2{}^2 + h_3{}^2),$$

...ige des Tetraeders ist. Der Schwerpunkt dieser ...ällt mit demjenigen des Tetraeders zusammen ...esamtheit die Masse des Tetraeders aus. Folglich ...te der zwei Systeme bezüglich irgend einer durch ...den Ebene dieselben, welche Gleichheit für alle ...r sind auch die Trägheitsmomente für eine belie- ...lben. Die zwei Systeme sind mithin äquimomental. ... durch die gegebene Axe eine zu der XY-Ebene ...ichnen die Abstände der Eckpunkte der Basis ABC ...t h_1', h_2', h_3', so ist offenbar das Trägheitsmoment des ...h dieser Ebene gleich

$$\ldots h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2 + h_1'h_2' + h_1'h_3' + h_2'h_3'\}.$$

...rägheitsmoment T des Körpers für die gegebene Axe

$$\ldots \frac{1}{10} M\{h_1{}^2 + h_2{}^2 + h_3{}^2 + h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3$$
$$+ h_1'h_2' + h_1'h_3' + h_2'h_3' + h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2\}.$$

...smomente eines regulären Tetraeders bezüglich aller durch ...erpunkt S gehenden Ebenen sind einander gleich. Bezeichnet r ...s der eingeschriebenen Kugel, so ist das Moment bezüglich einer ... Seitenfläche parallelen Ebene gleich $\frac{3}{5} Mr^2$. Beschreiben wir eine ...mit dem Halbmesser $\varrho = r\sqrt{3}$ um den Schwerpunkt S des Tetraeders ...ittelpunkt ... re Masse gleich derjenigen des Tetraeders, ... sind beide ... omental. Weil der Schwerpunkt irgend ...erpunkte der Projektion dieser Fläche pro- ...as Ellipsoid, zu welchem irgend eine drei- ...al ist, ähnlich und ähnlich gelegen ist zu ...ebenen, jede Fläche in ihrem Schwerpunkte be- ...onen in dem Verhältnisse $1:\sqrt{3}$ grösser habend. ...eigt werden, dass die Kugel mit dem Radius

$$= \frac{51}{32} \frac{F}{a^2} \int_0^h z^4 \, dz = \frac{17}{24.5} F h a^2 = \frac{17}{40} M a^2.$$

Mithin ist das Trägheitsmoment für die gegebene Schwerlinie

$$T_s = \frac{17}{40} M a^2 - \frac{9}{16} M h^2 = \frac{1}{20} M a^2.$$

Daraus geht hervor, dass die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsaxen denselben Wert besitzen. Die Centralellipsoide des Schwerpunktes sind hier Kugelflächen, ihre Gleichungen lauten

$$\text{I} \qquad \frac{1}{20} M a^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 1, \qquad \text{II} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{20} a^2,$$

so dass die Quadrate der Halbmesser dieser Kugelflächen $\frac{20}{Ma^2}$ und $\frac{1}{20} a^2$ sind.

6. Es sei $ABCD$ ein Tetraeder und durch seinen Eckpunkt D gehe eine beliebig gelegene Axe, für welche das Moment zweiten Grades bestimmt werden soll.

Zu dem Ende legen wir durch diese Axe eine beliebige Ebene und nehmen sie als Ebene der x, y. Die Fläche der Basis ABC sei gleich F, die Länge des Perpendikels von D auf die Basis $= p$, h_1, h_2, h_3 seien die Abstände der Eckpunkte der Basis ABC von der Ebene der xy. Ferner seien PQR, $P'Q'R'$ zwei zu der Basis ABC parallele Schnitte durch die Pyramide in den Abständen u, $u + du$ von der Spitze D, M bezeichne die Masse des Körpers von der Dichtigkeit $\varepsilon = 1$.

Das Trägheitsmoment des zwischen den Ebenen PQR und $P'Q'R'$ eingeschlossenen Prismas von der unendlich kleinen Höhe du in Bezug auf die XY-Ebene ist dasselbe, wie dasjenige dreier gleicher materieller Punkte, welche je $\frac{1}{3}$ seiner Masse als Masse besitzen und in den Mittelpunkten der Seiten des Dreieckes PQR angebracht sind. Das Volumen des Prismas PR' ist $= \frac{u^2}{p^2} F du$. Die Ordinaten der Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CA sind resp. $\frac{h_1 + h_2}{2}$, $\frac{h_2 + h_3}{2}$, $\frac{h_3 + h_1}{2}$, folglich sind, durch ähnliche Dreiecke, die Ordinaten der Mittelpunkte der Seiten PQ, QR, RP resp. $\frac{h_2 + h_3}{2} \frac{u}{p}$, $\frac{h_3 + h_1}{2} \frac{u}{p}$, $\frac{h_1 + h_2}{2} \frac{u}{p}$. Das Trägheitsmoment der Scheibe PR' bezüglich der Ebene der xy ist daher gleich

$$\frac{1}{3} \frac{u^2}{p^2} F du \left\{ \left(\frac{h_2 + h_3}{2} \frac{u}{p} \right)^2 + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \frac{u}{p} \right)^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \frac{u}{p} \right)^2 \right\}.$$

Integrieren wir von $u = 0$ bis $u = p$, so erhalten wir das Trägheitsmoment des Tetraeders für die XY-Ebene, welches gleich ist

$$\frac{1}{10} M \{ h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3 \}.$$

Werden in den Eckpunkten des Tetraeders materielle Punkte, von denen jeder die Masse $\frac{1}{20} M$ besitzt, und wird ein materieller Punkt von der Masse $\frac{4}{5} M$ im Schwerpunkte der Pyramide angebracht, dann ist das Trägheitsmoment dieses materiellen Punktesystemes bezüglich der XY-Ebene gleich

$$\frac{4}{5} M \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{4} \right)^2 + \frac{M}{20} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2),$$

welches dasselbe wie dasjenige des Tetraeders ist. Der Schwerpunkt dieser fünf materiellen Punkte fällt mit demjenigen des Tetraeders zusammen und sie machen in ihrer Gesamtheit die Masse des Tetraeders aus. Folglich sind die Trägheitsmomente der zwei Systeme bezüglich irgend einer durch den Schwerpunkt gehenden Ebene dieselben, welche Gleichheit für alle Ebenen besteht. Daher sind auch die Trägheitsmomente für eine beliebige gerade Linie dieselben. Die zwei Systeme sind mithin äquimomental.

Legen wir jetzt durch die gegebene Axe eine zu der XY-Ebene senkrechte Ebene, bezeichnen die Abstände der Eckpunkte der Basis ABC von dieser Ebene mit h_1', h_2', h_3', so ist offenbar das Trägheitsmoment des Tetraeders bezüglich dieser Ebene gleich

$$\frac{1}{10} M \{ h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2 + h_1' h_2' + h_1' h_3' + h_2' h_3' \}.$$

Mithin ist das Trägheitsmoment T des Körpers für die gegebene Axe

$$T = \frac{1}{10} M \{ h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3 \\ + h_1' h_2' + h_1' h_3' + h_2' h_3' + h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2 \}.$$

Die Trägheitsmomente eines regulären Tetraeders bezüglich aller durch seinen Schwerpunkt S gehenden Ebenen sind einander gleich. Bezeichnet r den Radius der eingeschriebenen Kugel, so ist das Moment bezüglich einer zu einer Seitenfläche parallelen Ebene gleich $\frac{3}{5} M r^2$. Beschreiben wir eine Kugel mit dem Halbmesser $\varrho = r\sqrt{3}$ um den Schwerpunkt S des Tetraeders als Mittelpunkt und nehmen ihre Masse gleich derjenigen des Tetraeders, dann sind beide Körper äquimomental. Weil der Schwerpunkt irgend einer Fläche sich in dem Schwerpunkte der Projektion dieser Fläche projiziert, so folgern wir, dass das Ellipsoid, zu welchem irgend eine dreiseitige Pyramide äquimomental ist, ähnlich und ähnlich gelegen ist zu dem der Pyramide eingeschriebenen, jede Fläche in ihrem Schwerpunkte berührend, aber seine Dimensionen in dem Verhältnisse $1 : \sqrt{3}$ grösser habend. Es kann auch leicht gezeigt werden, dass die Kugel mit dem Radius

$\varrho = r\sqrt{3}$ jede Kante des Tetraeders in ihrem Mittelpunkte berührt. Mithin schliessen wir, dass das Äquimomentalellipsoid irgend einer dreiseitigen Pyramide jede Kante in ihrem Mittelpunkte berührt und ihr Centrum im Schwerpunkte des Volumens der Pyramide hat.

Routh, Dynamics, &c., Cap. I.

7. Der gerade, homogene, elliptische Cylinder.

Wir bezeichnen mit a und b die Halbaxen der Ellipse der Cylinderbasis, mit h die Höhe, mit ε die Dichtigkeit des Cylinders.

Die Cylinderaxe und die Axen des elliptischen Normalschnittes durch den Schwerpunkt des Körpers sind Hauptaxenrichtungen der Centralellipsoide des Schwerpunktes.

Wir wählen deshalb den Schwerpunkt des Körpers zum Ursprunge rechtwinkeliger Coordinaten, lassen die Axe der z mit der geometrischen Axe des Körpers, die Axe der x mit der grossen, die Axe der y mit der kleinen Axe des Normalschnittes durch den Schwerpunkt, $a > b$ nehmend, zusammenfallen.

Die zu den Coordinatenaxen parallelen Cylinderschnitte sind $X = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,h,\ Y = 2\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}\,h,\ Z = a\,b\,\pi,$ daher wird

$$\int x^2 X\,dx = 2\frac{b}{a}h\int_{-a}^{+a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}a^3 b\,\pi\,h,$$

$$\int y^2\,Y\,dy = 2\frac{a}{b}h\int_{-b}^{+b} y^2\sqrt{a^2 - y^2}\,dy = \frac{1}{4}a\,b^3\pi\,h,$$

$$\int z^2\,Z\,dz = a\,b\,\pi\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\,dz = \frac{1}{12}\,a\,b\,\pi\,h^3.$$

Mithin sind die Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes

$$A = \frac{1}{12}\varepsilon\,a\,b\,\pi\,h\,(3\,b^2 + h^2) = \frac{1}{12}M(3\,b^2 + h^2),$$

$$B = \frac{1}{12}\varepsilon\,a\,b\,\pi\,h\,(3\,a^2 + h^2) = \frac{1}{12}M(3\,a^2 + h^2),$$

$$C = \frac{1}{4}a\,b\,\pi\,h\,(a^2 + b^2) = \frac{1}{4}M(a^2 + b^2),$$

ihnen entsprechen die Quadrate der Trägheitsradien

$$k_a^2 = \frac{1}{12}(3\,b^2 + h^2),\quad k_b^2 = \frac{1}{12}(3\,a^2 + h^2),\quad k_c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Damit ergeben sich als Gleichungen der Centralellipsoide des Schwerpunktes

$$\text{I}\qquad (3\,b^2 + h^2)\,x^2 + (3\,a^2 + h^2)\,y^2 + 3\,(a^2 + b^2)\,z^2 = \frac{12}{M}.$$

$$\text{II}\qquad \frac{12\,x^2}{3\,b^2 + h^2} + \frac{12\,y^2}{3\,a^2 + h^2} + \frac{4\,z^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Mit $a = b$ geht der elliptische Cylinder in einen Kreiscylinder über, für welchen sich sonach ergiebt

$$A = B = \frac{1}{12} M (3a^2 + b^2), \qquad C = \frac{1}{2} M a^2.$$

Die Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes sind in diesem Falle Rotationsellipsoide.

8. Das homogene, dreiaxige Ellipsoid mit den Halbaxen a, b, c und der Gleichung seiner Oberfläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Die Coordinatenaxen sind in diesem Falle Hauptaxenrichtungen der Centralellipsoide des Schwerpunktes.

a) Das Trägheitsmoment für die Abscissenaxe bestimmt sich nach Poisson wie folgt. Der Inhalt eines Volumenelementes ist $= dx\, dy\, dz$, sein Abstand von der Abscissenaxe $= \sqrt{y^2 + z^2}$, daher sein Trägheitsmoment $= \varepsilon\, dx\, dy\, dz\, (y^2 + z^2)$, mithin ist das Trägheitsmoment des ganzen Ellipsoides

$$A = \varepsilon \int dx \int dy \int dz\, (y^2 + z^2).$$

Die Grenzen von z ergeben sich aus der Gleichung der Oberfläche des Körpers, sie sind $z' = -c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $z'' = c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Die Grenzen von x haben der Bedingung zu genügen $z = 0$ oder $\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$, dieselben sind $x' = -a\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $x'' = a\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Für die Grenzen von y haben wir die Bedingung $x = 0$ und $z = 0$ oder $1 - \frac{y^2}{b^2} = 0$, sie sind $y' = -b$, $y'' = b$. Mithin ist

$$A = \varepsilon \int_{x'}^{x''} dx \int_{y'}^{y''} dy \left\{ \int_{z'}^{z''} y^2\, dz + \int_{z'}^{z''} z^2\, dz \right\}.$$

Die Ausführung der Integration giebt

$$\int_{z'}^{z''} y^2\, dz = \Big[y^2 z + C \Big]_{z'}^{z''} = 2cy^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}},$$

$$\int_{x'}^{x''} dx \int_{z'}^{z''} y^2\, dz = 2c \int_{x'}^{x''} y^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = \frac{2cy^2}{a} \int_{x'}^{x''} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{c}{a} y^2 \left[x \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 - x^2} + \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2\right) arc \left(sin = \frac{x}{\sqrt{a - \frac{a^2}{b^2} y^2}} \right) \right]_{x'}^{x''}$$

$$= \frac{c}{a} y^2 \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2\right) \pi,$$

$$\int_{y'}^{y''} dy \int_{x'}^{x''} dx \int_{z'}^{z''} y^2 dz = \frac{ac}{b^2}\pi \int_{y'}^{y''} (b^2 y^2 - y^4) dy = \frac{ac}{b^2}\pi \left[\frac{b^2 y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_{-b}^{+b},$$

$$\int_{x'}^{x''} dx \int_{y'}^{y''} dy \int_{z'}^{z''} y^2 dz = \frac{4}{15}\pi a b^3 c.$$

In gleicher Weise finden wir

$$\int_{x'}^{x''} dx \int_{y'}^{y''} dy \int_{z'}^{z''} z^2 dz = \frac{4}{15}\pi a b c^3.$$

Mithin ist das Trägheitsmoment des Ellipsoides für die Axe der x

$$A = \frac{4}{15}\varepsilon\pi a b c (b^2 + c^2) = \frac{1}{5} M (b^2 + c^2),$$

weil $M = \frac{4}{3}\varepsilon\pi a b c$ ist.

Auf genau demselben Wege erhalten wir die Trägheitsmomente B und C für die Axe der y und diejenige der z, nämlich

$$B = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2), \qquad C = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2).$$

Poisson, Traîté de Mécanique, Tom. 2, p. 47. Walton, p. 386.

b) Eine andere Bestimmung der Hauptträgheitsmomente ist die folgende. Alle Ebenen, welche zu den Coordinatenebenen parallel sind, schneiden die Oberfläche des Körpers in Ellipsen. Die Gleichungen dieser Schnitte sind

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1, \text{ für den Schnitt senkrecht zur Axe der } x,$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = 1, \text{ für den Schnitt senkrecht zur Axe der } y,$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1, \text{ für den Schnitt senkrecht zur Axe der } z.$$

Daher erhalten wir für die Inhalte der Schnittflächen

$$X = \pi b c\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad Y = \pi a c\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad Z = \pi a b\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

so dass

$$\int x^2 X dx = \pi b c \int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x^2 dx = \pi b c \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{5}\frac{x^5}{a^2}\right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{15}\pi a^3 b c,$$

$$\int y^2 Y dy = \pi a c \int_{-b}^{+b} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) y^2 dy = \frac{4}{15}\pi a b^3 c,$$

$$\int z^2 Z dz = \pi a b \int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z^2 dz = \frac{4}{15}\pi a b c^3.$$

Zufolge dieser Werte ergiebt sich für die Hauptträgheitsmomente

$$A = \varepsilon \int y^2\, Y\, d y + \varepsilon \int z^2\, Z\, d z = \frac{4}{15} \varepsilon \pi\, a\, b\, c\, (b^2 + c^2) = \frac{1}{5} M (b^2 + c^2),$$

$$B = \frac{4}{15} \varepsilon \pi\, a\, b\, c\, (a^2 + c^2) = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2),$$

$$C = \frac{4}{15} \varepsilon \pi\, a\, b\, c\, (a^2 + b^2) = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2).$$

Die Quadrate der entsprechenden Trägheitsradien sind

$$k_a{}^2 = \frac{1}{5}(b^2 + c^2), \quad k_b{}^2 = \frac{1}{5}(a^2 + c^2), \quad k_c{}^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2).$$

Das Trägheitsmoment für eine beliebige Schwerpunktsaxe ist

$$T = \frac{1}{5} M \{(b^2 + c^2) \cos^2 \alpha + (a^2 + c^2) \cos^2 \beta + (a^2 + b^2) \cos^2 \gamma\}$$

$$= \frac{1}{5} M \{ a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \sin^2 \beta + c^2 \sin^2 \gamma \}.$$

Mit diesen Resultaten erhalten wir als Gleichungen der Centralellipsoide des Schwerpunktes

$$\text{I} \qquad \frac{1}{5} M \{(b^2 + c^2) x^2 + (a^2 + c^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2\} = 1,$$

$$\text{II} \qquad \frac{x^2}{b^2 + c^2} + \frac{y^2}{a^2 + c^2} + \frac{z^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{5}.$$

Mit $a = b$ geht das dreiaxige Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid über, so dass für diesen Körper

$$A = B = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2), \; C = \frac{2}{5} M a^2, \; T = \frac{1}{5} M \{ a^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) + c^2 \sin^2 \gamma \}.$$

Mit $a = b = c$ wird das Ellipsoid zu einer Kugel vom Halbmesser a, für dieselbe ist

$$A = B = C = T = \frac{2}{5} M a^2, \qquad k_a{}^2 = k_b{}^2 = k_c{}^2 = k^2 = \frac{2}{5} a^2.$$

$$\text{I} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{2 M a^2}, \qquad \text{II} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{5} a^2.$$

9. Welches ist das Trägheitsmoment eines homogenen, dreiaxigen Ellipsoides für eine Diagonale des eingeschriebenen rechtwinkeligen Parallelopipedons von grösstem Volumen?

Lassen wir die Coordinatenaxen mit den Hauptaxen des Körpers zusammenfallen, bezeichnen α, β, γ die von der Diagonale des Parallelopipedons und den Axen der x, y, z eingeschlossenen Winkel, ist r die Länge der halben Diagonale, M die Masse des Ellipsoides, dann haben wir

$$\cos^2 \alpha = \frac{x^2}{r^2}, \; \cos^2 \beta = \frac{y^2}{r^2}, \; \cos^2 \gamma = \frac{z^2}{r^2}, \; r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Daher ist mit Rücksicht auf 8 das verlangte Trägheitsmoment

$$T = \frac{1}{5} M \left\{ (b^2 + c^2) \frac{x^2}{r^2} + (a^2 + c^2) \frac{y^2}{r^2} + (a^2 + b^2) \frac{z^2}{r^2} \right\}.$$

Für das dem Ellipsoide eingeschriebene Parallelopipedon von grösstem Volumen ist aber $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$, mithin wird

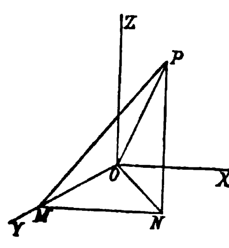
$$T = \frac{1}{5} \frac{M}{a^2 + b^2 + c^2} \left\{ (b^2 + c^2) a^2 + (a^2 + c^2) b^2 + (a^2 + b^2) c^2 \right\}$$

$$= \frac{2}{5} M \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Walton, p. 388.

10. Der Scheitel eines Kegels befindet sich in dem Mittelpunkte einer Kugel, seine Basis ist ein von einem Kreise begrenzter Teil der Oberfläche dieser Kugel. Welches ist das Trägheitsmoment dieses Kegels für eine durch seinen Scheitel gehende, zu seiner Axe senkrechte gerade Linie?

Wir wählen die räumlichen, rechtwinkeligen Coordinatenaxen so, dass der Kegelscheitel O (Fig. 68) ihr Ursprung ist, die Axe OZ mit der Kegelaxe zusammenfällt. Von einem beliebigen Punkte P des Kegels fällen wir eine Senkrechte PN auf die Ebene der x und der y, verbinden O mit N durch eine gerade Linie, ziehen die Gerade NM senkrecht zu der Axe OY, sowie die Geraden PO und PM. Es sei m ein Massenelement des Kegels bei P, Mk^2 das verlangte Trägheitsmoment für die Axe OY, a der Halbmesser der Kugel, $OP = r$, $2\beta =$ dem Scheitelwinkel des Kegels, $\sphericalangle POZ = \vartheta$, $\sphericalangle NOX = \varphi$. Damit ist



Figur 68.

$$T = Mk^2 = \Sigma (m\, \overline{PM}^2).$$

Aber wir haben, mit $\varepsilon = 1$, $m = r\, d\vartheta\, dr\, r \sin\vartheta\, d\varphi = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr\, d\varphi$, und $\overline{PM}^2 = r^2 \cos^2\vartheta + r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi$,

folglich
$$T = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\beta r^4 (\sin\vartheta \cos^2\vartheta + \sin^3\vartheta \cos^2\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

$$= \frac{1}{5} a^5 \int_0^{2\pi} \int_0^\beta (\sin\vartheta \cos^2\vartheta + \sin^3\vartheta \cos^2\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{5} \pi a^5 \int_0^\beta (2 \sin\vartheta \cos^2\vartheta + \sin^3\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{5} \pi a^5 \left[-\frac{1}{3} \cos^3\vartheta - \cos\vartheta \right]_0^\beta,$$

$$\therefore T = \frac{1}{15} \pi a^5 (4 - 3 \cos\beta - \cos^3\beta).$$

Mit $\beta = \pi$ geht der Kegel in eine Kugel über, für dieselbe lesen wir aus dem vorstehenden Resultate heraus

$$T = M k^2 = \frac{8}{15} \pi a^5 = \frac{2}{5} M a^2, \qquad k^2 = \frac{2}{5} a^2.$$

Walton, p. 389.

11. Es ist gegeben ein homogenes System von der Masse M. Ein homogenes Ellipsoid von derselben Masse soll so bestimmt werden, dass dasselbe in Bezug auf alle sich in einem Punkte schneidenden Axen dieselben Trägheitsmomente besitzt, wie das gegebene System.

Sind A, B, C die Hauptträgheitsmomente des gegebenen Systemes für den gegebenen Punkt, dann folgen die Halbaxen a, b, c des gesuchten Ellipsoides, weil die Centralellipsoide in beiden Fällen dieselben sein müssen, aus den Relationen

$$A = \frac{1}{5} M(b^2 + c^2), \quad B = \frac{1}{5} M(a^2 + c^2), \quad C = \frac{1}{5} M(a^2 + b^2),$$

welche auch so geschrieben werden können

$$b^2 + c^2 = 5 \frac{A}{M}, \quad a^2 + c^2 = 5 \frac{B}{M}, \quad a^2 + b^2 = 5 \frac{C}{M}.$$

Die Addition der drei letzten Gleichungen giebt

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{2M}(A + B + C).$$

Nun ist

$$A = \Sigma (y^2 + z^2)\, dm, \quad B = \Sigma (x^2 + z^2)\, dm, \quad C = \Sigma (x^2 + y^2)\, dm,$$

also auch

$$A + B + C = 2 \Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\, dm.$$

daher $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{2M}(A + B + C) = \frac{5}{M} \Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\, dm.$

Folglich erhalten wir

$$a^2 = \frac{5}{2M}(A + B + C) - \frac{5A}{M} = \frac{5}{2M}(B + C - A).$$

$$a^2 = \frac{5}{M} \Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\, dm - \frac{5}{M} \Sigma (y^2 + z^2)\, dm = \frac{5}{M} \Sigma x^2\, dm.$$

In gleicher Weise finden wir

$$b^2 = \frac{5}{M} \Sigma y^2\, dm, \qquad c^2 = \frac{5}{M} \Sigma z^2\, dm,$$

womit die Halbaxen des verlangten Ellipsoides bestimmt sind.

Die Grössen $\Sigma x^2\, dm$, $\Sigma y^2\, dm$, $\Sigma z^2\, dm$ werden die Trägheitsmomente der Masse M in Beziehung auf die Coordinatenebenen YZ, XZ, XY genannt.

Beispielsweise erhalten wir für ein rechtwinkeliges Parallelopipedon, dessen Kantenlängen a_1, b_1, c_1 sind, wenn sein Schwerpunkt der fragliche Punkt ist,

$$a^2 = \frac{5}{M} \Sigma x^2 \, dm = \frac{5}{M} b_1 c_1 \int_{-\frac{a_1}{2}}^{+\frac{a_1}{2}} x^2 \, dx = \frac{5}{a_1 b_1 c_1} b_1 c_1 \frac{a^2}{12} = \frac{5}{12} a_1{}^2,$$

$$b^2 = \frac{5}{12} b_1{}^2, \qquad c^2 = \frac{5}{12} c_1{}^2.$$

Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

12. Der geometrische Ort aller sich in einem Punkte eines gegebenen Systemes schneidender Axen, in Bezug auf welche das System konstantes Trägheitsmoment T hat, ist ein Kegel zweiten Grades. Welche Lage haben die Kreisschnitte und Axen aller solcher Kegel, die den verschiedenen Werten von T entsprechen?

Tragen wir auf jeder durch den angenommenen Punkt O des Raumes gehenden Axe t die Länge $\varrho = \pm \frac{1}{\sqrt{T}}$ auf, wo T das der jedesmaligen Axe entsprechende Trägheitsmoment bezeichnet, dann liegen die Endpunkte aller dieser Fahrstrahlen auf der Fläche des Centralellipsoides von Poinsot. Die Gleichung dieses Centralellipsoides mit seinen Hauptaxen als Coordinatenaxen ist, wenn A, B, C die Hauptträgheitsmomente sind,

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = 1. \tag{1}$$

Mit $A < B < C$ ist A das kleinste. C das grösste sämtlicher Trägheitsmomente. Für eine beliebige Axe durch O, mit den Neigungen α, β, γ gegen die Coordinatenaxen, ist das Trägheitsmoment

$$T = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma. \tag{2}$$

Alle Axen t, für welche das Trägheitsmoment T konstanten Wert hat, bilden einen Kegel des zweiten Grades mit der Gleichung

$$(T - A) x^2 + (T - B) y^2 + (T - C) z^2 = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung wird dadurch gefunden, dass wir in (2) $T(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$ für T setzen, und berücksichtigen, dass für irgend einen Punkt einer Axe t die Beziehung besteht $\frac{\cos \alpha}{x} = \frac{\cos \beta}{y} = \frac{\cos \gamma}{z}$.

Nun werden diejenigen Flächen zweiten Grades, in deren Gleichungen sich die Coëfficienten von x^2, y^2, z^2 nur durch eine Konstante unterscheiden, bekanntlich von demselben Ebenenpaare in Kreisen geschnitten. Diese Eigenschaft besitzen die Gleichungen (1) und (3), und da T ein beliebiger zwischen A und C liegender Wert des Trägheitsmomentes ist, so lässt sich folgender Satz aussprechen:

„Das einem gewissen Systempunkte O entsprechende Trägheitsellipsoid und ein Kegel mit dem Scheitel in O, für dessen Erzeugende als Axen das System konstantes, im übrigen aber beliebiges Trägheitsmoment besitzt, werden von denselben Ebenen in Kreisen geschnitten."

Die centralen Kreisschnittebenen des Centralellipsoides gehen durch seine mittlere Axe, ihre Gleichungen sind, $A < B < C$ vorausgesetzt,

$$z = \pm \sqrt{\frac{B-A}{C-B}}\,x, \quad \text{oder} \quad \pm \sqrt{B-A}\cdot x - \sqrt{C-B}\cdot z = 0. \quad (4)$$

Diese Ebenen schneiden auch irgend einen der Kegel (3) in Kreisen, die aber unendlich klein sind, weil sie durch den Scheitel des Kegels gehen. Wirkliche Kreisschnitte der Kegel werden durch Ebenen erzeugt, die den centralen Kreisschnittebenen parallel sind, und demnach folgende Gleichung besitzen:

$$\pm \sqrt{B-A}\cdot x - \sqrt{C-B}\cdot z + p = 0. \quad (4')$$

Es ist nun weiter die Frage zu erledigen, welche Lagen die Axen der Kegel besitzen.

Die Axe eines solchen Kegels zweiten Grades ist der geometrische Ort der Mittelpunkte seiner Kreisschnitte. Schneiden wir eine Fläche zweiten Grades durch ein System paralleler Ebenen, dann ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller dieser Schnittlinien der zu der angenommenen Ebenenrichtung konjugierte Diameter. Deshalb kann die Axe eines Kegels des zweiten Grades aufgefasst werden als der zu den Ebenen der Kreisschnitte desselben konjugierte Diameter. Sind α, β, γ die Winkel, welche ein beliebiger Diameter mit den Coordinatenaxen einschliesst, und ist U das den Kegel repräsentierende Gleichungspolynom (2), so ist die Gleichung der demselben konjugierten Diametralebene des Kegels

$$\frac{dU}{dx}\cos\alpha + \frac{dU}{dy}\cos\beta + \frac{dU}{dz}\cos\gamma = 0,$$

oder, nach Ausführung der Differentiation,

$$(T-A)\,x\cos\alpha + (T-B)\,y\cos\beta + (T-C)\,z\cos\gamma = 0. \quad (5)$$

Soll der Diameter von der Richtung (α, β, γ) die Axe des Kegels sein, so muss diese Gleichung (5) mit der Gleichung (4) identisch werden, d. i. mit der Gleichung jener Diametralebene, welche den Kegel in einem Kreise schneidet. Es muss also zunächst

$$(T-B)\cos\beta = 0$$

sein, woraus folgt

$$\cos\beta = 0, \qquad \beta = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{oder} \qquad \beta = \frac{3\pi}{2},$$

weil im allgemeinen $(T-B)$ nicht gleich Null sein wird.

Die Axe des Kegels bildet also mit der Y-Axe des Coordinatensystemes den Winkel $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$, d. h. sie liegt in der XZ-Ebene. Liegt aber der gesuchte Diameter, oder die Axe des Kegels in der XZ-Ebene, so folgt unmittelbar, dass

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{und} \qquad \cos\gamma = \sin\alpha$$

ist. Aus der Identität der Gleichungen (4) und (5) folgt nun ferner

$$(T - A)\cos\alpha = (T - C) = \pm\sqrt{B - A}, \qquad \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{B - A}}{T - A},$$

und ebenso

$$(T - C)\cos\gamma = (T - C)\sin\alpha = -\sqrt{C - B}, \qquad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{C - B}}{T - C}.$$

Die Gleichungen der Axe eines Kegels (3) sind demnach

$$\left\{z = \mp\frac{T - A}{T - C}\sqrt{\frac{C - B}{B - A}}\,x, \qquad y = 0\right\}, \tag{6}$$

indem $tg\,\alpha = \mp\frac{T - A}{T - C}\sqrt{\frac{C - B}{B - A}}$ ist.

Das obere Zeichen (—) gilt für $T > A$ aber $< B$, das untere Zeichen (+) für $T < C$ aber $> B$, im ersten Falle umgiebt der Kegel der Axen t die grösste, im zweiten die kleinste Axe des Centralellipsoides.

Für $T = A$ geht der Kegel in die X-Axe über, die dann zugleich dessen Axe ist, was durch (6) mit $tg\,\alpha = 0$ bestätigt wird. Ist $T = B$ geworden, so geht der Kegel der Axen t in die Ebene des centralen Kreisschnittes $\pm\sqrt{B - A}\,.\,x - \sqrt{C - B}\,.\,z = 0$ über, und die Axe desselben hat die Gleichungen $z = \pm\sqrt{\frac{B - A}{C - B}}\cdot x$, $y = 0$. Für $T = C$ endlich fällt die Axe des Kegels, der selbst zur Geraden geworden ist, mit der Z-Axe zusammen, es geht dieses unmittelbar daraus hervor, dass in diesem Falle $tg\,\alpha = \pm\infty$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, oder $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ ist.

A. Jordan, Jahrbuch des Polytechnischen Vereins in Carlsruhe, 1869, p. 23—26.

13. Welches sind die Trägheitshalbmesser einer doppelten Convexlinse für ihre Axe und für einen Durchmesser des Kreises, in welchem sich die beiden sphärischen Flächen schneiden, wenn diese Flächen gleiche Halbmesser besitzen?

Bezeichnet a die Halbaxe der Linse, b den Radius des Kreisschnittes der beiden sphärischen Flächen, k_1 den Trägheitshalbmesser der Linse für ihre Axe, k_2 denjenigen für einen Durchmesser des Kreises, dann wird gefunden werden

$$k_1^2 = \frac{1}{10} \frac{a^4 + 5 a^2 b^2 + 10 b^4}{a^2 + 3 b^2}, \qquad k_2^2 = \frac{1}{20} \frac{7 a^4 + 15 a^2 b^2 + 10 b^4}{a^2 + 3 b^2}.$$

Euler, Theoria Motus Corporum Solidorum, p. 201, Walton, p. 390.

14. **Welches ist das Trägheitsmoment einer Kugel für einen ihrer Durchmesser, wenn ihre Dichtigkeit direkt proportional der n^{ten} Potenz des Abstandes ihrer einzelnen Punkte vom Kugelmittelpunkte ist?**

Ist ε gleich der Dichtigkeit in der Einheit der Entfernung von dem Mittelpunkte der Kugel, a der Kugelradius, T das verlangte Moment zweiten Grades, dann wird gefunden werden

$$T = \frac{8 \varepsilon \pi}{3 (n + 5)} a^{n+5}.$$

15. **Ein gerader Kreiskegel ist so beschaffen, dass die Dichtigkeit in einem beliebigen seiner Punkte direkt proportional dem kürzesten Abstande dieses Punktes von der Kegelfläche ist. Wie gross ist der Trägheitsradius für die Kegelaxe?**

Bezeichnet a den Halbmesser der Basis des Kegels und k den verlangten Schwingungsradius, dann ist

$$k^2 = \frac{1}{5} a^2.$$

Walton, p. 387.

16. **Eine Kugel vom Halbmesser a und der Masse M ist äquimomental einem Systeme von fünf materiellen Punkten, wenn vier dieser Punkte, von denen jeder die Masse $\frac{3}{20} M \left(\frac{a}{r}\right)^2$ besitzt, so angeordnet werden, dass ihre Abstände r vom Kugelmittelpunkte gleiche Winkel miteinander einschliessen, und der fünfte materielle Punkt, dessen Masse gleich dem Reste der Kugelmasse ist, in dem Mittelpunkte der Kugel angebracht wird.**

Routh, Dynamics & c., Cap. I.

Vierter Abschnitt.

Trägheitsmomente und Centralellipsoide von homogenen Rotationsflächen und Rotationskörpern.

I. Eine beliebige, homogene Rotationsfläche ist gegeben. Welches sind die Trägheitsmomente derselben für die Rotationsaxe und für eine durch einen Punkt O dieser Axe gehende, zu ihr senkrechte Gerade? Welches ist das Moment zweiten Grades für eine beliebige, durch den Punkt O laufende Axe?

Hier sind die Rotationsaxe und alle Axen durch O senkrecht zu ihr Hauptaxen des Punktes O, so dass die Centralellipsoide dieses Punktes Rotationsellipsoide um die Drehaxe des Körpers sind. Wir wählen die Rotationsaxe zur Axe der x, O als Coordinatenursprung, bezeichnen mit ω den Winkel, welchen eine beliebige Meridianebene der Fläche mit der

XY-Ebene einschliesst, mit r den Abstand eines beliebigen Punktes des Meridianes von der Axe der x, legen durch die Rotationsaxe eine zweite Meridianebene unter dem Winkel $\omega + d\omega$, ferner zwei Ebenen senkrecht zu ihr in den Abständen x und $x + dx$ von O, dann ist der Inhalt eines Flächenelementes zwischen den vier Ebenen $r\,d\omega\sqrt{dx^2 + dy^2} = r\,d\omega\,ds$. die Masse dieses Elementes, wenn ε die konstante Dichtigkeit der Rotationsfläche bezeichnet, $dm = \varepsilon r\,d\omega\,ds = \varepsilon y\,ds\,d\omega$, weil r gleich der Ordinate der die Fläche erzeugenden Curve ist. Nun sind die Trägheitsmomente für die durch den Punkt O gehenden Coordinatenaxen

$$A = \Sigma(y^2 + z^2)\,dm = \Sigma r^2\,dm,\quad B = C = \Sigma(x^2 + z^2)\,dm = \Sigma(x^2 + y^2)\,dm$$
$$= (\Sigma r^2 \sin^2\omega + x^2)\,dm = \Sigma(y^2 \sin^2\omega + x^2)\,dm,$$

folglich erhalten wir durch Substitution des Wertes von dm

$$A = \varepsilon\iint y^3\,ds\,d\omega,\quad B = C = \varepsilon\iint(y^2\sin^2\omega + x^2)\,y\,ds\,d\omega.$$

Die Grenzen von ω sind $\omega = 0$ und $\omega = 2\pi$, der Zusammenhang zwischen x und y ist gegeben durch die Gleichung der Meridiancurve $y = f(x)$, wobei O als Coordinatenursprung gedacht ist, die Grenzen von x und y bestimmen sich aus der Beschaffenheit des besonderen Falles. Dadurch ergiebt sich

$$A = \varepsilon\int\int_0^{2\pi} y^3\,ds\,d\omega = 2\,\varepsilon\pi\int y^3\,ds,$$
$$B = C = \int\int_0^{2\pi} y^3\,ds \sin^2\omega\,d\omega + \int\int_0^{2\pi} x^2 y\,ds\,d\omega$$
$$= \varepsilon\pi\int y^3\,ds + 2\,\varepsilon\pi\int x^2 y\,ds = \frac{A}{2} + 2\varepsilon\pi\int x^2 y\,ds.$$

Damit ist das Trägheitsmoment für eine beliebige, durch den Punkt O gehende Axe

$$T = A\cos^2\alpha + B(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha$$
$$= (1 + \cos^2\alpha)\,\varepsilon\pi\int y^3\,ds + 2\,\varepsilon\pi\sin^2\alpha\int x^2 y\,ds.$$

Weil A, B, C jetzt bekannt sind, so sind die Centralellipsoide des Punktes O gegeben.

II. Ein beliebiger, homogener Rotationskörper ist gegeben. Welches sind die Trägheitsmomente desselben für die Rotationsaxe und für eine durch einen Punkt O dieser Axe gehende, zu ihr senkrechte Gerade? Welches ist das Trägheitsmoment für eine beliebige, durch den Punkt O laufende Axe?

Hier sind die Rotationsaxe und alle zu ihr senkrechten, durch den Punkt O gehenden Axen Hauptaxen des Punktes O, so dass die Centralellipsoide dieses Punktes Rotationsellipsoide um die Drehaxe des Körpers sind.

Wir wählen den Punkt O als Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, die Rotationsaxe als Axe der x, bezeichnen mit ω den Winkel, welchen eine beliebige Meridianebene des Körpers mit der XY-Ebene einschliesst, mit r den Abstand eines beliebigen Punktes in dieser Meridianebene von der Axe der x, legen durch die Rotationsaxe eine zweite Meridianebene unter dem Winkel $\omega + d\omega$, zwei zu ihr senkrechte Ebenen in den Abständen x und $x + dx$ von O, endlich um die Rotationsaxe zwei Cylinderflächen mit den Halbmessern r und $r + dr$, dann ist das Volumenelement des Körpers $r\,dr\,d\omega\,dx$, dessen Massenelement $dm = \varepsilon r\,dr\,d\omega\,dx$, wenn ε die konstante Dichtigkeit bezeichnet. Die Trägheitsmomente des Körpers für die Coordinatenaxen sind

$$A = \Sigma(y^2 + z^2)\,dm = \Sigma r^2 dm. \quad B = C = \Sigma(x^2 + z^2)\,dm = \Sigma(x^2 + y^2)\,dm$$
$$= \Sigma(r^2 \sin^2\omega + x^2)\,dm,$$

so dass durch Substitution des Wertes von dm

$$A = \varepsilon\iiint r^3 dr\,d\omega\,dx, \qquad B = C = \varepsilon\iiint(r^2 \sin^2\omega + x^2)\,r\,dr\,d\omega\,dx.$$

Die Grenzen von ω sind $\omega = 0$ und $\omega = 2\pi$, diejenigen von r sind $r = 0$ und $r = y = f(x)$, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Meridiancurve für das gewählte Coordinatensystem bedeutet; diejenigen von x sind $x = x_0$ und $x = x_1$, so dass

$$A = \varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\int_0^y\int_0^{2\pi} r^3 dr\,d\omega\,dx = 2\varepsilon\pi\int_{x_0}^{x_1}\int_0^y r^3 dr\,dx = \varepsilon\frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} y^4 dx,$$

$$B = C = \varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\int_0^y\int_0^{2\pi} r^3 dr\,dx \sin^2\omega\,d\omega + \varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\int_0^y\int_0^{2\pi} r\,dr\,x^2 dx\,d\omega$$

$$= \varepsilon\pi\int_{x_0}^{x_1}\int_0^y r^3 dr\,dx + 2\varepsilon\pi\int_{x_0}^{x_1}\int_0^y r\,dr\,x^2 dx$$

$$= \varepsilon\frac{\pi}{4}\int_{x_0}^{x_1} y^4 dx + \varepsilon\pi\int_{x_0}^{x_1} y^2 x^2 dx = \frac{A}{2} + \varepsilon\pi\int_{x_0}^{x_1} y^2 x^2 dx.$$

Damit wird das Trägheitsmoment für eine beliebige, durch den Punkt O laufende Axe

$$T = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha = \varepsilon\frac{\pi}{4}(1 + \cos^2\alpha)\int_{x_0}^{x_1} y^4 dx + \varepsilon\pi\sin^2\alpha\int_{x_0}^{x_1} y^2 x^2 dx.$$

Weil jetzt die Hauptträgheitsmomente des Punktes O bekannt sind, so sind auch die Centralellipsoide des Punktes O gegeben.

1. Der Rotationscylinder vom Halbmesser a und der Höhe h.

a) Die Cylinderfläche. Zuerst nehmen wir den Punkt O in dem einen Endpunkte der Cylinderaxe an. In diesem Falle ist, weil $y = a$, $ds = dx$, wenn M die Masse der ganzen Fläche bezeichnet,

$$A = 2\varepsilon\pi a^3\int_0^h dx = 2\varepsilon\pi a^3 h = Ma^2,$$

$$B = C = \frac{A}{2} + 2\varepsilon\pi a\int_0^h x^2 dx = \varepsilon\pi a h\left(a^2 + \frac{2}{3}h^2\right) = \frac{1}{6}M(3a^2 + 2h^2).$$

Dadurch erhalten wir für die Centralellipsoide die Gleichungen

$$\text{I}\quad 6a^2x^2 + (3a^2 + 2h^2)(y^2 + z^2) = \frac{6}{M},\quad \text{II}\ \frac{x^2}{a^2} + 6\frac{y^2 + z^2}{3a^2 + 2h^2} = 1.$$

Damit diese Ellipsoide zu Kugeln werden, muss die Bedingung erfüllt sein $A = B = C$, d. i. $a^2 = \frac{1}{6}(3a^2 + 2h^2)$, woraus folgt $h = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Die Gleichungen dieser Kugelflächen sind

$$\text{I}\qquad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{Ma^2},\qquad \text{II}\qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Ferner wählen wir den Punkt O in der Mitte der Rotationsaxe. In diesem Falle ist

$$A = 2\varepsilon\pi a^3\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dx = 2\varepsilon\pi a^3 h,$$

$$B = C = \frac{A}{2} + 2\varepsilon\pi a\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^2 dx = \frac{1}{6}\varepsilon\pi a h(6a^2 + h^2) = \frac{1}{12}M(6a^2 + h^2).$$

Mithin sind die Gleichungen der Centralellipsoide des Schwerpunktes

$$\text{I}\quad 12a^2x^2 + (6a^2 + h^2)(y^2 + z^2) = \frac{12}{M},\quad \text{II}\quad \frac{x^2}{a^2} + 12\frac{y^2 + z^2}{6a^2 + h^2} = 1.$$

Mit $h = a\sqrt{6}$ gehen diese Ellipsoide in Kugeln über, ihre Halbmesser sind $\frac{1}{a\sqrt{M}}$ und a, wie vorhin.

Mit $a = 0$ wird die Cylinderfläche zu einer materiellen Geraden, für dieselbe ist daher, wenn O ein Endpunkt: $A = 0$, $B = C = \frac{1}{3}Mh^2$, wenn O ihr Mittelpunkt: $A = 0$, $B = C = \frac{1}{12}Mh^2$.

b) Der Rotationskörper. Zunächst wählen wir den Punkt O in dem einen Endpunkte der Cylinderaxe und bezeichnen mit M die ganze Masse des Körpers, dann ist

$$A = \varepsilon\frac{\pi}{2}\int_0^h a^4 dx = \frac{1}{2}\varepsilon\pi a^4 h = \frac{1}{2}Ma^2,$$

$$B = C = \frac{A}{2} + \varepsilon\pi a^2\int_0^h x^2 dx = \frac{1}{12}\varepsilon\pi a^2 h(3a^2 + h^2) = \frac{1}{12}M(3a^2 + h^2).$$

Das Trägheitsmoment für eine beliebige, durch den Punkt O gehende Axe ist

$$T = \varepsilon \frac{\pi}{4}(1 + \cos^2 \alpha)\, a^4 \int_0^h d\,x + \varepsilon \pi \sin^2 \alpha\, a^2 \int_0^h x^2\, d\,x$$

$$= \varepsilon \frac{\pi}{12} a^2 h \{3(1+\cos^2\alpha)a^2 + 4 h^2 \sin^2\alpha\} = \frac{1}{12} M \{3a^2(1+\cos^2\alpha) + 4h^2 \sin^2\alpha\}.$$

Damit ergeben sich als Gleichungen der Centralellipsoide des einen Endpunktes der Cylinderaxe

$$\text{I} \quad 6\,a^2 x^2 + (3\,a^2 + 4\,h^2)(y^2 + z^2) = \frac{12}{M}, \quad \text{II} \quad 2\frac{x^2}{a^2} + 12\frac{y^2 + z^2}{3\,a^2 + 4\,h^2} = 1.$$

Mit $h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ gehen diese Ellipsoide in Kugeln über, ihre Radien sind $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{M}}$ und $a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ferner lassen wir den Punkt O mit dem Schwerpunkte des Cylinders zusammenfallen. Das Trägheitsmoment für eine beliebige Schwerpunktsaxe ist hier

$$T = \varepsilon \frac{\pi}{4}(1 + \cos^2 \alpha)\, a^4 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} d\,x + \varepsilon \pi \sin^2 \alpha\, a^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^2\, d\,x$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon \pi a^2 h \{a^2(1+\cos^2\alpha) + \frac{1}{3} h^2 \sin^2\alpha\} = \frac{1}{12} M \{3\,a^2(1 + \cos^2\alpha) + h^2 \sin^2\alpha\}.$$

Daraus folgt mit $\alpha = 0$ das Trägheitsmoment für die Rotationsaxe, mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dasjenige für die Axe der z, mithin ist

$$A = \frac{1}{2} \varepsilon \pi a^4 h = \frac{1}{2} M a^2, \quad B = C = \frac{1}{4} \varepsilon \pi a^2 h (a^2 + \frac{1}{3} h^2) = \frac{1}{12} M (3\,a^2 + h^2).$$

Nun sind die Gleichungen der Centralellipsoide des Schwerpunktes

$$\text{I} \quad 6\,a^2 x^2 + (3\,a^2 + h^2)(y^2 + z^2) = \frac{12}{M}, \quad \text{II} \quad 2\frac{x^2}{a^2} + 12\frac{y^2 + z^2}{3\,a^2 + h^2} = 1.$$

Mit $h = a\sqrt{3}$ gehen die Centralellipsoide in Kugeln über, diese besitzen die Radien $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{M}}$ und $a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

2. Der Rotationskegel von der Höhe h und dem Basishalbmesser a.

a) Die Rotationsfläche. Fällt zunächst der Punkt O mit der Spitze des Kegels zusammen, dann ist die Gleichung der Erzeugungslinie $y = \frac{a}{h} x$, die Länge eines Elementes derselben $d\,s = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h}\, d\,x$, daher erhalten wir als Moment zweiten Grades für eine beliebige, durch die Kegelspitze laufende Axe

$$T=(1+\cos^2\alpha)\varepsilon\pi\frac{a^3}{h^4}\sqrt{a^2+h^2}\int_0^h x^3dx+2\varepsilon\pi\frac{a}{h^2}\sqrt{a^2+h^2}\sin^2\alpha\int_0^h x^3\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\varepsilon\pi\, a\sqrt{a^2+h^2}\{a^2(1+\cos^2\alpha)+2h^2\sin^2\alpha\}$$

$$=\frac{1}{4}M\{a^2(1+\cos^2\alpha)+2h^2\sin^2\alpha\}. \tag{1}$$

Das Trägheitsmoment für eine Mantellinie ist daher, weil dann $\cos^2\alpha = h^2:(a^2+h^2)$, $\sin^2\alpha = a^2:(a^2+h^2)$,

$$T=\frac{1}{4}M\frac{a^2}{a^2+h^2}(a^2+4h^2).$$

Die Trägheitsmomente für die Hauptaxen ergeben sich dadurch, dass wir in (1) $\alpha=0$ und $\alpha=\frac{\pi}{2}$ setzen, dieselben sind

$$A=\frac{1}{2}Ma^2, \qquad B=C=\frac{1}{4}M(a^2+2h^2).$$

Zufolge dieser Resultate sind die Gleichungen der Centralellipsoide für die Kegelspitze

$$\text{I}\quad 2a^2x^2+(a^2+2h^2)(y^2+z^2)=\frac{4}{M}, \qquad \text{II}\quad 2\frac{x^2}{a^2}+4\frac{y^2+z^2}{a^2+2h^2}=1.$$

Mit $h=a\sqrt{\frac{1}{2}}$ gehen die Trägheitsellipsoide in Kugeln mit den Radien $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{M}}$ und $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ über.

Ferner lassen wir den Punkt O mit dem Schwerpunkte der Fläche, welcher auf der Rotationsaxe und um die Strecke $\frac{2}{3}h$ von der Kegelspitze entfernt liegt, zusammenfallen. Bezeichnen jetzt A', B', C' die Hauptträgheitsmomente für den Scheitel, dann sind diejenigen für den Schwerpunkt

$$A=A'=\frac{1}{2}Ma^2, \qquad B=C=B'-M\left(\frac{2}{3}h\right)^2=\frac{1}{36}M(9a^2+2h^2).$$

Damit ergiebt sich für eine beliebige Schwerpunktsaxe

$$T=A\cos^2\alpha+B\sin^2\alpha=\frac{1}{36}M\{9a^2(1+\cos^2\alpha)+2h^2\sin^2\alpha\},$$

wenn diese Axe zu einer Mantellinie parallel ist, so haben wir

$$T_m=\frac{1}{36}M\frac{a^2}{a^2+h^2}(9a^2+20h^2).$$

Nun sind die Gleichungen der Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes

$$\text{I}\quad 18a^2x^2+(9a^2+2h^2)(y^2+z^2)=\frac{36}{M}, \qquad \text{II}\quad 2\frac{x^2}{a^2}+36\frac{y^2+z^2}{9a^2+2h^2}=1.$$

Mit $h = 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$ erscheinen die Ellipsoide als Kugeln, die Radien derselben sind $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{M}}$ und $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ wie vorhin.

b) Der Rotationskörper. Zuerst falle der Punkt O mit der Kegelspitze zusammen. Das Trägheitsmoment für eine beliebige, durch den Kegelscheitel laufende Axe ist

$$\begin{aligned} T &= \varepsilon\frac{\pi}{4}(1+\cos^2\alpha)\frac{a^4}{h^4}\int_0^h x^4\,dx + \varepsilon\pi\frac{a^2}{h^2}\sin^2\alpha\int_0^h x^4\,dx \\ &= \frac{1}{20}\varepsilon\pi a^2 h\,\{a^2(1+\cos^2\alpha)+4h^2\sin^2\alpha\} \\ &= \frac{3}{20}M\,\{a^2(1+\cos^2\alpha)+4h^2\sin^2\alpha\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Für eine Axe, welche mit der Erzeugungslinie des Kegels zusammenfällt, ist $\cos^2\alpha = h^2:(a^2+h^2)$, $\sin^2\alpha = a^2:(a^2+h^2)$, daher das Moment zweiten Grades für eine beliebige Mantellinie

$$T_m = \frac{3}{20}M\frac{a^2}{a^2+h^2}(a^2+6h^2).$$

Setzen wir in (2) $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so ergeben sich die Hauptträgheitsmomente des Scheitels

$$A' = \frac{1}{10}\varepsilon\pi a^4 h = \frac{3}{10}Ma^2,\quad B' = C' = \frac{1}{20}\varepsilon\pi a^2 h(a^2+4h^2) = \frac{3}{20}M(a^2+4h^2).$$

Mit diesen Werten sind die Gleichungen der Centralellipsoide des Scheitels

$$\text{I}\quad 2a^2x^2 + (a^2+4h^2)(y^2+z^2) = \frac{20}{9M},\qquad \text{II}\quad \frac{10}{3}\frac{x^2}{a^2} + \frac{20}{3}\frac{y^2+z^2}{a^2+4h^2} = 1.$$

Wenn $h = \frac{1}{2}a$ ist, so gehen diese Ellipsoide in Kugeln mit den Radien $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{10}{3M}}$ und $a\sqrt{\frac{3}{10}}$ über.

Ferner wollen wir den Punkt O mit dem Schwerpunkte des Körpers, welcher von dem Kegelscheitel um die Strecke $\frac{3}{4}h$ entfernt ist, zusammenfallen lassen. Zufolge der vorstehenden Resultate sind die Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes

$$A = A' = \frac{3}{10}Ma^2,\qquad B = C = B' - M\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3}{80}M(4a^2+h^2).$$

Damit ergiebt sich für eine beliebige Schwerpunktsaxe

$$T = \frac{3}{80}M\,\{4a^2(1+\cos^2\alpha)+h^2\sin^2\alpha\},$$

so dass für die zu einer Mantellinie parallele Axe

$$T_m = \frac{3}{80} M \frac{a^2}{a^2 + h^2} (2\,a^2 + 9\,h^2).$$

Die Gleichungen der Trägheitsellipsoide des Schwerpunktes sind infolge dieser Resultate

$$\text{I} \quad 4\,a^2 x^2 + (4\,a^2 + h^2)(y^2 + z^2) = \frac{80}{3\,M}, \qquad \text{II} \quad \frac{20}{3}\frac{x^2}{a^2} + \frac{80}{3}\frac{y^2 + z^2}{4\,a^2 + h^2} = 1.$$

Mit $h = 2\,a$ erscheinen diese Ellipsoide als Kugeln mit den Halbmessern

$$\varrho = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{20}{3M}}, \quad k = a\sqrt{\frac{3}{20}}.$$

3. Die homogene Kugel vom Halbmesser a.

a) Die Rotationsfläche. Wir wählen zuerst einen auf der Kugelfläche gelegenen Endpunkt der Rotationsaxe als den Punkt O. Die Gleichung des erzeugenden Kreises ist $y^2 = 2\,a\,x - x^2$, so dass $y\,d\,s = a\,d\,x$ ist. Damit wird das Trägheitsmoment einer Kugelschale von der Höhe h für eine beliebige, durch den Scheitel O gehende Axe

$$\begin{aligned} T &= \varepsilon\,\pi\,a\,(1 + \cos^2\alpha)\int_0^h (2\,a\,x - x^2)\,d\,x + 2\,\varepsilon\,\pi\,a\,\sin^2\alpha \int_0^h x^2\,d\,x \\ &= \frac{1}{3}\,\varepsilon\,\pi\,a\,h^2 \left\{(3\,a - h)(1 + \cos^2\alpha) + 2\,h\,\sin^2\alpha\right\} \\ &= \frac{1}{6}\,M h \left\{(3a - h)(1 + \cos^2\alpha) + 2\,h\,\sin^2\alpha\right\}. \end{aligned}$$

Mit $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ giebt diese Gleichung die Hauptträgheitsmomente für den Punkt O, nämlich

$$A = \frac{2}{3}\,\varepsilon\,\pi\,a\,h^2\,(3\,a - h) = \frac{1}{3}\,Mh\,(3\,a - h),$$

$$B = C = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,\pi\,a\,h^2\,(3\,a + h) = \frac{1}{6}\,Mh\,(3\,a + h),$$

folglich sind die Gleichungen der Centralellipsoide des Scheitels der Fläche

$$\text{I} \qquad 2\,(3\,a - h)\,x^2 + (3\,a + h)\,(y^2 + z^2) = \frac{6}{Mh},$$

$$\text{II} \qquad 3\,\frac{x^2}{(3\,a - h)\,h} + 6\,\frac{y^2 + z^2}{(3\,a + h)\,h} = 1.$$

Wenn $h = a$ ist, so haben wir die Halbkugelfläche vor uns, für dieselbe folgt aus den vorstehenden Resultaten

$$T = A = B = C = \frac{4}{3}\,\varepsilon\,\pi\,a^4 = \frac{2}{3}\,M a^2,$$

wodurch sich zeigt, dass die Trägheitsellipsoide des Scheitels der Halbkugelfläche Kugeln mit den Radien $\varrho = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{2M}}$ und $k = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ sind. Für die ganze Kugelfläche ist $h = 2a$, mithin sind die Trägheitsmomente für die Axen durch einen Punkt dieser Fläche

$$T = \frac{4}{3}\varepsilon\pi a^4(2 + 3\sin^2\alpha) = \frac{1}{3}Ma^2(2 + 3\sin^2\alpha),$$

$$A = \frac{8}{3}\varepsilon\pi a^4 = \frac{2}{3}Ma^2, \qquad B = C = \frac{20}{3}\varepsilon\pi a^4 = \frac{5}{3}Ma^2,$$

und die Gleichungen der Centralellipsoide dieses Punktes sind

$$\text{II} \quad 2x^2 + 5(y^2 + z^2) = \frac{3}{Ma^2}, \qquad \text{II} \quad \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}(y^2 + z^2) = a^2.$$

Ferner lassen wir den Punkt O mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfallen. In diesem Falle ist die Gleichung des erzeugenden Kreises $y^2 = a^2 - x^2$, $y\,ds = a\,dx$. Das Trägheitsmoment einer Flächenzone, von welcher die Ebenen der Begrenzungskreise um die Strecken h_1 und h_2 $(h_1 > h_2)$ von dem Punkte O abstehen, ist für eine beliebige, durch den Punkt O gehende Axe

$$T = \varepsilon\pi a(1 + \cos^2\alpha)\int_{h_2}^{h_1}(a^2 - x^2)\,dx + 2\varepsilon\pi a\sin^2\alpha\int_{h_2}^{h_1}x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\varepsilon\pi a(h_1 - h_2)\left\{3a^2(1 + \cos^2\alpha) - (h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2)(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}M\left\{3a^2(1 + \cos^2\alpha) - h^2(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right\},$$

wenn $h^2 = h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2$ gesetzt wird.

Damit ergeben sich als Hauptträgheitsmomente des Punktes O mit $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$A = \frac{1}{3}M(3a^2 - h^2), \qquad B = C = \frac{1}{6}M(3a^2 + h^2),$$

folglich sind die Trägheitsellipsoide des Punktes O durch die Gleichungen gegeben

$$\text{I} \qquad 2(3a^2 - h^2)x^2 + (3a^2 + h^2)(y^2 + z^2) = \frac{6}{M},$$

$$\text{II} \qquad 3\frac{x^2}{3a^2 - h^2} + 6\frac{y^2 + z^2}{3a^2 + h^2} = 1.$$

Mit $h_2 = 0$, $h_1 = a$ wird die Flächenzone zur Halbkugel, für dieselbe erhalten wir infolge vorstehender Resultate

$$T = A = B = C = \frac{4}{3} \varepsilon \pi a^4 = \frac{2}{3} M a^2.$$

Die Centralellipsoide des Punktes O sind in diesem Falle Kugelflächen mit den Radien $\varrho = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{2M}}$, $k = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Für die ganze Kugelfläche ist $h_2 = -a$, $h_1 = a$, so dass für dieselbe

$$T = A = B = C = \frac{8}{3} \varepsilon \pi a^4 = \frac{2}{3} M a^2.$$

Die Radien der hier ebenfalls kugelförmigen Trägheitsellipsoide des Mittelpunktes sind $\varrho = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{2M}}$, $k = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

b) Der Rotationskörper. Der Punkt O liege zunächst auf der Kugelfläche, dann ist die Gleichung des erzeugenden Kreises $y^2 = 2ax - x^2$. Das Trägheitsmoment eines sphärischen Segmentes von der Höhe h für eine beliebige, durch den Punkt O gehende Axe ist

$$T = \varepsilon \frac{\pi}{4}(1 + \cos^2\alpha)\int_0^h (2ax - x^2)^2\, dx + \varepsilon \pi \sin^2\alpha \int_0^h (2ax - x^2)\, x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{60} \varepsilon \pi h^3 \left\{[20a^2 - 3h(5a - h)](1 + \cos^2\alpha) + 6h(5a - 2h)\sin^2\alpha\right\},$$

oder, weil die Masse dieses Körpers $M = \frac{1}{3}\varepsilon \pi h^2(3a - h)$ ist,

$$T = \frac{1}{20}\frac{Mh}{3a - h}\left\{[20a^2 - 3h(5a - h)](1 + \cos^2\alpha) + 6h(5a - 2h)\sin^2\alpha\right\}.$$

Hiermit ergeben sich mit $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ für die Hauptträgheitsmomente des Punktes O die Werte

$$A = \frac{1}{10}\frac{Mh}{3a - h}\left\{20a^2 - 3h(5a - h)\right\},$$

$$B = C = \frac{1}{20}\frac{Mh}{3a - h}\left\{20a^2 + 3h(5a - 3h)\right\},$$

wodurch die Trägheitsellipsoide des Punktes O bestimmt sind.

Für die Halbkugel ist $h = a$, so dass in diesem Spezialfalle

$$T = \frac{1}{20} M a^2 (8 + 5\sin^2\alpha), \qquad A = \frac{2}{5} M a^2, \qquad B = C = \frac{13}{20} M a^2.$$

Mithin sind hier die Gleichungen der Centralellipsoide des Punktes O

$$\text{I} \quad 8x^2 + 13(y^2 + z^2) = \frac{20}{Ma^2}, \qquad \text{II} \quad \frac{5}{2}x^2 + \frac{20}{13}(y^2 + z^2) = a^2.$$

Bei der Vollkugel ist $h = 2a$, wodurch für dieselbe sich ergiebt

$$T = \frac{4}{15} \varepsilon \pi a^5 (2 + 5 \sin^2 \alpha) = \frac{1}{5} M a^2 (2 + 5 \sin^2 \alpha),$$

$$A = \frac{8}{15} \varepsilon \pi a^5 = \frac{2}{5} M a^2, \qquad B = C = \frac{28}{15} \varepsilon \pi a^5 = \frac{7}{5} M a^2.$$

Die Gleichungen der Centralellipsoide eines Punktes der Oberfläche der Vollkugel sind daher

$$\text{I} \quad 2 x^2 + 7 (y^2 + z^2) = \frac{5}{M a^2}, \qquad \text{II} \quad \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{7} (y^2 + z^2) = \frac{1}{5} a^2.$$

Ferner falle der Punkt O mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammen. Das Trägheitsmoment einer Kugelzone, von welcher die Begrenzungskreisflächen um die Strecken h_1 und h_2 $(h_1 > h_2)$ von dem Kugelmittelpunkte entfernt sind, ist für eine durch den Punkt O gehende, beliebige Axe, da die Gleichung des die Kugelfläche erzeugenden Kreises hier $y^2 = a^2 - x^2$ ist,

$$T = \varepsilon \frac{\pi}{4} (1 + \cos^2 \alpha) \int_{h_2}^{h_1} (a^2 - x^2)^2 \, d x + \varepsilon \pi \sin^2 \alpha \int_{h_2}^{h_1} (a^2 - x^2) x^2 \, d x.$$

Führen wir die Integrationen durch, gestalten das dadurch erhaltene Resultat etwas um und setzen zur Abkürzung $L = h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2$, $N = h_1^4 + h_1^3 h_2 + h_1^2 h_2^2 + h_1 h_2^3 + h_2^4$, so ergiebt sich

$$T = \frac{1}{60} \varepsilon \pi (h_1 - h_2) \Big\{ [5 a^2 (3 a^2 - 2 L) + 3 N] (1 + \cos^2 \alpha) + 4 (5 a^2 L - 3 N) \sin^2 \alpha \Big\},$$

oder, weil die Masse der Kugelzone $M = \frac{1}{3} \varepsilon \pi (h_1 - h_2)(3 a^2 - L)$ ist,

$$T = \frac{1}{20} \frac{M}{3 a^2 - L} \Big\{ [5 a^2 (3 a^2 - 2 L) + 3 N] (1 + \cos^2 \alpha) + 4 (5 a^2 L - 3 N) \sin^2 \alpha \Big\}.$$

Hierdurch erhalten wir für die Hauptträgheitsmomente des Punktes O die Werte

$$A = \frac{1}{10} \frac{M}{3 a^2 - L} \Big\{ 5 a^2 (3 a^2 - 2 L) + 3 N \Big\},$$

$$B = C = \frac{1}{20} \frac{M}{3 a^2 - L} \Big\{ 5 a^2 (3 a^2 + 2 L) - 9 N \Big\},$$

so dass die Trägheitsellipsoide des Punktes O bestimmt sind.

Bei der Halbkugel ist $h_2 = 0$, $h_1 = a$, für welche sich dadurch ergiebt

$$T = A = B = C = \frac{4}{15} \varepsilon \pi a^5 = \frac{2}{5} M a^2.$$

Die Centralellipsoide des Punktes O sind demnach hier Kugelflächen mit den Radien $\varrho = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{5}{2 M}}$ und $k = a \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Für die Vollkugel erhalten wir, weil in diesem Falle $h_2 = -a$, $h_1 = a$ ist,

$$T = A = B = C = \frac{8}{15}\varepsilon\pi a^5 = \frac{2}{5} M a^2.$$

Die Centralellipsoide des Mittelpunktes der Masse einer Vollkugel sind mithin Kugelflächen mit den Radien $\varrho = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{5}{2M}}$ und $k = a\sqrt{\frac{2}{5}}$.

4. Das homogene Rotationsellipsoid mit den Axen $2a$ und $2b$ und der Rotationsaxe $2a$. Bestimmung der Trägheitsellipsoide des Rotationskörpers.

a) Der Punkt O falle mit dem einen der Endpunkte der Rotationsaxe zusammen. Das Trägheitsmoment eines Segmentes von der Höhe h für eine durch O gehende, beliebige Axe ist, weil die Gleichung der die Fläche des Ellipsoides erzeugenden Curve $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ lautet,

$$\begin{aligned} T &= \varepsilon\frac{\pi}{4}(1 + \cos^2\alpha)\frac{b^4}{a^4}\int_0^h (2ax - x^2)^2\,dx \\ &\quad + \varepsilon\pi\sin^2\alpha\,\frac{b^2}{a^2}\int_0^h (2ax - x^2)\,x^2\,dx \\ &= \frac{1}{60}\varepsilon\pi\frac{b^2}{a^2}h^3\left\{\frac{b^2}{a^2}[20a^2 - 3h(5a - h)](1 + \cos^2\alpha)\right. \\ &\quad \left. + 6h(5a - 2h)\sin^2\alpha\right\}, \end{aligned}$$

oder, weil $M = \frac{1}{3}\varepsilon\pi\frac{b^2}{a^2}h^2(3a - h)$ ist,

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{20}\frac{Mh}{3a - h}&\left\{\frac{b^2}{a^2}[20a^2 - 3h(5a - h)](1 + \cos^2\alpha)\right. \\ &\left. + 6h(5a - 2h)\sin^2\alpha\right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgen als Hauptträgheitsmomente des Punktes O

$$A = \frac{1}{10}\frac{Mh}{3a - h}\frac{b^2}{a^2}\left\{20a^2 - 3h(5a - h)\right\},$$

$$B = C = \frac{1}{20}\frac{M}{3a - h}\left\{\frac{b^2}{a^2}[20a^2 - 3h(5a - h)] + 6h(5a - 2h)\right\},$$

womit auch die Centralellipsoide des Punktes O bestimmt sind.

Zufolge dieser Resultate ergiebt sich für das halbe Ellipsoid, weil dann $h = a$ ist,

$$T = \frac{1}{20}M\left\{4b^2(1 + \cos^2\alpha) + 9a^2\sin^2\alpha\right\},$$

$$A = \frac{2}{5}Mb^2, \qquad B = C = \frac{1}{20}M(9a^2 + 4b^2).$$

Mithin sind die Gleichungen der Trägheitsellipsoide des Punktes O

$$\text{I} \qquad 8 b^2 x^2 + (9 a^2 + 4 b^2)(y^2 + z^2) = \frac{20}{M},$$

$$\text{II} \qquad \frac{5}{2}\frac{x^2}{b^2} + 20\frac{y^2 + z^2}{9 a^2 + 4 b^2} = 1.$$

Ferner erhalten wir für das ganze Rotationsellipsoid, weil in diesem Falle $h = 2a$ ist,

$$T = \frac{1}{5} M \left\{ b^2 (1 + \cos^2 \alpha) + 6 a^2 \sin^2 \alpha \right\},$$

$$A = \frac{2}{5} M b^2, \qquad B = C = \frac{1}{5} M (6 a^2 + b^2),$$

$$\text{I} \quad 2 b^2 x^2 + (6 a^2 + b^2)(y^2 + z^2) = \frac{5}{M}, \qquad \text{II} \quad \frac{x^2}{2 b^2} + \frac{y^2 + z^2}{6 a^2 + b^2} = \frac{1}{5}.$$

b) Der Punkt O falle mit dem Mittelpunkte der Rotationsaxe zusammen. Die Gleichung der die Fläche des Körpers erzeugenden Ellipse ist hier $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Für den zwischen zwei zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen in den Abständen h_2 und h_1, $h_1 > h_2$ gedacht, vom Coordinatenursprunge liegenden Körperteil erhalten wir als Trägheitsmoment bezüglich einer durch O gehenden, beliebigen Axe

$$\begin{aligned} T &= \varepsilon \frac{\pi}{4}(1 + \cos^2 \alpha) \frac{b^4}{a^4} \int_{h_2}^{h_1} (a^2 - x^2)^2 \, dx \\ &\quad + \varepsilon \pi \sin^2 \alpha \frac{b^2}{a^2} \int_{h_2}^{h_1} (a^2 - x^2) x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{60} \varepsilon \pi (h_1 - h_2) \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{b^2}{a^2} [5 a^2 (3 a^2 - 2 L) + 3 N] (1 + \cos^2 \alpha) \right. \\ &\quad \left. + 4 (5 a^2 L - 3 N) \sin^2 \alpha \right\}, \end{aligned}$$

wo $L = h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2$, $N = h_1^4 + h_1^3 h_2 + h_1^2 h_2^2 + h_1 h_2^3 + h_2^4$ gesetzt wurde. Die Masse dieses Körperteiles ist $M = \frac{1}{3} \varepsilon \pi \frac{b^2}{a^2} (h_1 - h_2) \times (3 a^2 - L)$, mithin auch

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{20} \frac{M}{3 a^2 - L} &\left\{ \frac{b^2}{a^2} [5 a^2 (3 a^2 - 2 L) + 3 N] (1 + \cos^2 \alpha) \right. \\ &\left. + 4 (5 a^2 L - 3 N) \sin^2 \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Die Hauptträgheitsmomente des Punktes O sind folglich

$$A = \frac{1}{10} \frac{M}{3 a^2 - L} \frac{b^2}{a^2} \left\{ 5 a^2 (3 a^2 - 2 L) + 3 N \right\},$$

$$B = C = \frac{1}{20} \frac{M}{3 a^2 - L} \left\{ \frac{b^2}{a^2} [5 a^2 (3 a^2 - 2 L) + 3 N] + 4 (5 a^2 L - 3 N) \right\}.$$

Diese Resultate geben für das halbe Ellipsoid, weil in diesem Falle $h_1 = a$, $h_2 = 0$, $L = a^2$, $N = a^4$, $M = \frac{2}{3} \varepsilon \pi a b^2$ ist,

$$T = \frac{1}{5} M \left\{ b^2 (1 + \cos^2 \alpha) + a^2 \sin^2 \alpha \right\},$$

$$A = \frac{2}{5} M b^2, \qquad B = C = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2),$$

so dass die Gleichungen der Centralellipsoide des Punktes O sind

$$\text{I} \quad 2 b^2 x^2 + (a^2 + b^2)(y^2 + z^2) = \frac{5}{M}, \qquad \text{II} \quad \frac{5}{2} \frac{x^2}{b^2} + 5 \frac{y^2 + z^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Für das ganze Ellipsoid erhalten wir, weil dann $h_1 = a$, $h_2 = -a$, $L = a^2$, $N = a^4$, $M = \frac{4}{3} \varepsilon \pi a b^2$ ist,

$$T = \frac{1}{5} M \left\{ b^2 (1 + \cos^2 \alpha) + a^2 \sin^2 \alpha \right\},$$

$$A = \frac{2}{5} M b^2, \qquad B = C = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2),$$

$$\text{I} \quad 2 b^2 x^2 + (a^2 + b^2)(y^2 + z^2) = \frac{5}{M}, \qquad \text{II} \quad \frac{5}{2} \frac{x^2}{b^2} + 5 \frac{y^2 + z^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Mit $a = b$ gehen die sämtlichen vorstehenden Resultate in diejenigen für die Kugel über.

5. Das homogene Rotationsparaboloid von der Höhe h mit dem Punkte O in seinem Scheitel, wenn die Gleichung der die Fläche erzeugenden Curve $y^2 = 2 p x$ ist.

a) Die Rotationsfläche. Das Trägheitsmoment für eine beliebige, durch den Scheitel gehende Axe ist, weil $y\, ds = \sqrt{p(2x + p)}\, dx$ ist,

$$\begin{aligned}
T &= 2 \varepsilon \pi (1 + \cos^2 \alpha) p^{\frac{3}{2}} \int_0^h x \sqrt{2x + p}\, dx \\
&\quad + 2 \varepsilon \pi \sin^2 \alpha \sqrt{p} \int_0^h x^2 \sqrt{2x + p}\, dx \\
&= \frac{2}{105} \varepsilon \pi \sqrt{p} \Big\{ 7p \left[(3h - p)(2h + p)^{\frac{3}{2}} + p^{\frac{5}{2}} \right] (1 + \cos^2 \alpha) \\
&\quad + \left[(15 h^2 - 6 p h + 2 p^2)(2h + p)^{\frac{3}{2}} - 2 p^{\frac{7}{2}} \right] \sin^2 \alpha \Big\} \\
&= \frac{1}{35} \frac{M}{(2h + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}} \Big\{ 7p \left[(3h - p)(2h + p)^{\frac{3}{2}} + p^{\frac{5}{2}} \right] (1 + \cos^2 \alpha) \\
&\quad + \left[(15 h^2 - 6 p h + 2 p^2)(2h + p)^{\frac{3}{2}} - 2 p^{\frac{7}{2}} \right] \sin^2 \alpha \Big\},
\end{aligned}$$

weil die Masse der Fläche $M = \frac{2}{3} \varepsilon \pi \sqrt{p} \left\{ (2h + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right\}$ ist.

Damit erhalten wir für die Hauptträgheitsmomente des Scheitels der Fläche

$$A = \frac{2}{5} \frac{Mp}{(2h+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}} \left\{(3h-p)(3h+p)^{\frac{3}{2}} + p^{\frac{5}{2}}\right\},$$

$$B = C = \frac{1}{7} \frac{M}{(2h+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}} \left\{(3h^2 + 3ph - p^2)(2h+p)^{\frac{3}{2}} + p^{\frac{7}{2}}\right\},$$

wodurch auch die Trägheitsellipsoide des Scheitels bekannt sind.

b) Der Rotationskörper. Das Trägheitsmoment für eine durch den Scheitel gehende, beliebige Axe ist

$$T = \varepsilon\pi(1 + \cos^2\alpha)p^2 \int_0^h x^2\,dx + 2\varepsilon\pi \sin^2\alpha\, p \int_0^h x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\varepsilon\pi p h^3 \left\{2p(1+\cos^2\alpha) + 3h\sin^2\alpha\right\}$$

$$= \frac{1}{6} M h \left\{2p(1+\cos^2\alpha) + 3h\sin^2\alpha\right\},$$

weil die Masse des Körpers $M = \varepsilon\pi p h^2$ ist.

Mithin sind die Hauptträgheitsmomente des Scheitels

$$A' = \frac{2}{3} M p h = \frac{1}{3} M a^2, \quad B' = C' = \frac{1}{6} M h (2p + 3h)$$

$$= \frac{1}{6} M (a^2 + 3h^2),$$

wenn der Halbmesser der Basis des Körpers gleich a gesetzt wird.

Nun sind die Gleichungen der Trägheitsellipsoide des Scheitels

$$\text{I} \quad 2a^2x^2 + (a^2 + 3h^2)(y^2 + z^2) = \frac{6}{M}, \qquad \text{II} \quad \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 + 3h^2} = \frac{1}{6}.$$

Die Ellipsoide gehen mit $a = h\sqrt{3}$ oder $h = \frac{2}{3}p$ in Kugeln über.

Fällt der Punkt O mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammen, dann ist

$$A = A' = \frac{1}{3} M a^2, \quad B = C = B' - M\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{18} M (3a^2 + h^2),$$

$$T = \frac{1}{18} M \left\{3a^2(1 + \cos^2\alpha) + h^2 \sin^2\alpha\right\},$$

$$\text{I} \quad 6a^2x^2 + (3a^2 + h^2)(y^2 + z^2) = \frac{18}{M}, \qquad \text{II} \quad \frac{x^2}{6a^2} + \frac{y^2 + z^2}{3a^2 + h^2} = \frac{1}{18}.$$

Hier gehen die Ellipsoide dann in Kugeln über, wenn $a = \frac{h}{\sqrt{3}}$ oder $h = 6p$ ist.

6. Wenn eine ebene, zu der in ihr liegenden geraden Linie AA' symmetrische Fläche, oder der zwischen zwei sich nicht schneidenden ebenen, geschlossenen Figuren, welche zu AA' symmetrisch sind, liegende ebene Ring um eine zu AA' parallele, in der Ebene der Fläche oder des Ringes liegende, aber die Fläche oder den Ring nicht schneidende Linie BB' rotiert, so lässt sich erweisen, dass das Trägheitsmoment des dadurch erzeugten Körpers bezüglich der Rotationsaxe BB' gleich $M(h^2 + 3k^2)$ ist, wenn M die Masse des Rotationskörpers, h den Halbmesser des durch die Umdrehung von AA' erzeugten Cylinders, k den Trägheitshalbmesser der erzeugenden Fläche für die Symmetrieaxe AA' bezeichnet.

Townsend, Quarterly Journal of Mathematics, Vol. X, p. 203.
Walton, p. 387.

Drittes Kapitel.

Das Prinzip von D'Alembert.

Eine allgemeine Methode für die Bestimmung der Bewegung eines Systemes materieller Punkte, auf welches beliebige Kräfte wirken, wurde zuerst von D'Alembert aufgestellt. Derselbe kündigte sein Prinzip durch eine Abhandlung an, welche er der Akademie der Wissenschaften in Paris gegen Ende des Jahres 1742 vorlas. Im Jahre 1743 veröffentlichte D'Alembert diese Arbeit in seinem Traîté de Dynamique. Siehe auch seine Recherches sur la Précession des Equinoxes, p. 35, publiziert 1749. In dem Traîté de Dynamique gebraucht D'Alembert bei der Darlegung seines Prinzipes folgende Worte:

„Problème Général.

„Soit donné un système de corps disposés les uns par rapport aux autres d'une manière quelconque; et supposons qu'on imprimé à chacun de ces corps un mouvement particulier, qu'il ne puisse suivre à cause de l'action des autres corps; trouver le mouvement que chaque corps doit prendre.

„Solution.

„Soient $A, B, C,$ &c. les corps qui composent le système, et supposons qu'on leur ait imprimé les mouvemens a, b, c etc., qu'ils soient forcés, à cause de leur action mutuelle, de changer dans les mouvemenns $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ etc. Il est clair qu'on peut regarder le mouvement a imprimé au corps A comme composé du mouvement $\mathfrak{a}$, qu'il a pris, et d'un autre mouvement α; qu'on peut de même regarder les mouvemens $b, c,$ etc. comme composés des mouvemens $\mathfrak{b}, \beta; \mathfrak{c}, \varkappa$ etc.; d'où il s'ensuit que le mouvement des corps $A, B, C,$ etc. entr'eux auroit été le même, si au lieu de leur donner les impulsions $a, b, c,$ etc. on leur eût donné à-la-fois les doubles impulsions $\mathfrak{a}, \alpha; \mathfrak{b}, \beta; \mathfrak{c}, \varkappa,$ etc. Or par la supposition, les corps A, B, C etc. ont pris d'eux-mêmes les mouvemens $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$ etc. donc les mouvemens $\alpha, \beta, \varkappa,$ etc. doivent être tels qu'ils ne dérangent rien dans les mouvements $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$ etc. c'est-à-dire que, si les corps n'avoient reçu que les mouvemens $\alpha, \beta, \varkappa,$ etc. ces mouvemens auroient dû se détruire mutuellement, et le système demeurer en repos.

„De là résulte le principe suivant, pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres. Décomposez les mouvemens $a, b, c,$ etc. imprimés à chaque corps, chacun en deux autres $\mathfrak{a}, \alpha; \mathfrak{b}, \beta; \mathfrak{c}, \varkappa,$ etc. qui soient tels, que si l'on

n'eût imprimé aux corps que les mouvemens $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, etc. ils eussent pu conserver ces mouvemens sans se nuire réciproquement; et que si on ne leur eût imprimé que les mouvemens α, β, $\varkappa$, etc. le système fût demeuré en repos; il est clair que $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, etc. seront les mouvements que ces corps prendront en vertu de leur action. Ce qu'il falloit trouver."

Die Übersetzung dieses Abschnittes lautet:

„Allgemeines Problem.

„Es sei gegeben ein System von Körpern, welche nach irgend einem Gesetze gegen einander gelagert sind, und nehmen wir an, dass man jedem dieser Körper eine besondere Bewegung erteilt, der er nicht folgen kann wegen der Wirkung der anderen Körper, zu finden die Bewegung, welche jeder Körper machen muss.

„Lösung.

„$A, B, C \ldots$ seien die das System bildenden Körper, denselben habe man die Bewegungen $a, b, c \ldots$ resp. erteilt, jedoch seien sie zufolge ihrer gegenseitigen Wirkung gezwungen die Bewegungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ anzunehmen. Es ist klar, dass die Bewegung a, welche dem Körper A erteilt worden ist, betrachtet werden kann, zusammengesetzt aus der Bewegung $\mathfrak{a}$, die er genommen hat und einer Bewegung α; ebenso können die Bewegungen $b, c \ldots$ als Resultanten der Bewegungen $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}, \varkappa \ldots$ angesehen werden, woraus folgt, dass die Bewegungen der Körper $A, B, C \ldots$ dieselben gewesen sein würden, wenn ihnen anstatt der Bewegungen a, b, c .. gleichzeitig die Bewegungen $\mathfrak{a}, \alpha$; $\mathfrak{b}, \beta$; $\mathfrak{c}, \varkappa \ldots$ gegeben worden wären. Durch die Voraussetzung haben die Körper $A, B, C \ldots$ von sich selbst die Bewegungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ genommen, mithin müssen die Bewegungen $\alpha, \beta, \varkappa \ldots$ so beschaffen sein, dass sie nichts an den Bewegungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ ändern, das heisst, wenn die Körper nur die Bewegungen $\alpha, \beta, \varkappa \ldots$ empfangen hätten, so hätten sich diese Bewegungen gegenseitig zerstören und das System hätte in Ruhe bleiben müssen. Daraus entsteht das Prinzip der Auffindung der Bewegung mehrerer aufeinander wirkender Körper.

„Man zerlege die Bewegungen $a, b, c \ldots$, welche den einzelnen Körpern erteilt sind, jede einzeln in zwei andere $\mathfrak{a}, \alpha$; $\mathfrak{b}, \beta$; $\mathfrak{c}, \varkappa \ldots$ auf eine solche Weise, dass, wenn man den Körpern nur die Bewegungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ erteilt hätte, sie diese Bewegungen hätten behalten können, ohne sich gegenseitig zu alterieren und dass, wenn man ihnen nur die Bewegungen $\alpha, \beta, \varkappa$ .. erteilt hätte, das System in Ruhe geblieben wäre; es ist klar, dass $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ die Bewegungen sein werden, welche diese Körper kraft ihrer Wirkungen machen werden. Das ist es, was man finden musste."

Der Gedanke an die durch D'Alembert entwickelte allgemeine Methode für die Bestimmung der Bewegung eines materiellen Systemes ist etwas früher Fontaine zugestossen, wie wir durch die Table des Mémoires informiert sind, welche er seiner Abhandlung der Differentialrechnung in den Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris 1770 vorausschickte. Diese Tabelle wurde jedoch schon 1739 der Akademie der Wissenschaften und sodann mehreren Mathematikern von ihm mitgeteilt. Seine Ansicht über diesen Gegenstand wurde indessen erst lange nach dem Erscheinen des Traité de Dynamique veröffentlicht, wahrscheinlich gewahrte D'Alembert, welcher nicht vor dem Jahre 1741 Mitglied der Akademie der Wissenschaften wurde, Fontaines Verallgemeinerung gar nicht. D'Alembert war auch der Erste, welcher die wunderbare Fruchtbarkeit des Prinzipes durch Verwendung desselben zur Lösung einer grossen Zahl mannigfaltiger, schwieriger Aufgaben zeigte, unter denen die Bestimmung der Vorrückung der Tag- und Nachtgleichen genannt werden kann, wofür Newton nur ein mangelhaftes Resultat erzielte.

Der früheste Schritt zur Entdeckung von D'Alemberts Prinzip begegnet uns in

einem Aufsatze von Jakob Bernoulli in den Acta Eruditorum, 1686, Juli, p. 356, betitelt: „Narratio Controversiae inter Dn. Hugenium et Abbatem Catelanum agitatae de Centro Oscillationis quae loco animadversionis esse poterit in Responsionem Dn. Catelani, num. 27. Ephem. Gallic. anni 1684, insertam." Es seien m, m' zwei gleiche, an einer starren geraden Linie befestigte Körper, welche fähig sind, sich um einen ihrer befestigten Endpunkte in einer vertikalen Ebene zu bewegen. Ferner seien r, r' die Abstände der Körper m, m' resp. von dem festen Endpunkte, v, v' die Geschwindigkeiten dieser Körper für irgend eine Lage der starren Geraden bei ihrem Herabsinken aus einer bestimmten Lage, u, u' die Geschwindigkeiten, welche sie unverbunden beim Durchfallen der nämlichen Bogen erlangen würden. Dann wird infolge der Verbindung der beiden Körper eine Geschwindigkeit $u - v$ von m verloren und eine Geschwindigkeit $v' - u'$ von m' während des Fallens gewonnen. Bernoulli wies die Mathematiker oft darauf hin, dass gemäss der statischen Relation zweier Kräfte im Gleichgewichte an einem Hebel die Proportion $u - v : v' - u' :: r' : r$ ein genauer Ausdruck der Bewegungsverhältnisse sei. Dieser, von Irrtum nicht ganz freie Gedanke Bernoullis enthielt den ersten Keim des Prinzipes der Zurückführung der Bestimmung der Bewegung materieller Systeme auf die Lösung statischer Probleme. L'Hôpital bemerkte in einem an Huyghens gerichteten Briefe (Histoire des Ouvrages des Sçavans, 1690, Jun., p. 440) richtig, dass er, anstatt die in einer endlichen Zeit erlangten Geschwindigkeiten zu betrachten, die Infinitesimalgeschwindigkeiten, welche in einem Zeitmomente erlangt, hätte betrachten und diese vergleichen sollen mit denjenigen, die die Schwerkraft in demselben Momente erzeugt. Er nahm ein zusammengesetztes Pendel, das aus zwei beliebigen, an einer starren geraden Linie befestigten Körpern bestand, und schloss, dass Gleichgewicht vorhanden sei zwischen den Bewegungsgrössen, welche in einem beliebigen Zeitmomente durch diese Körper verloren und gewonnen werden, das ist zwischen den Unterschieden der Bewegungsgrössen, welche die Körper in diesem Momente wirklich erlangen und jenen, welche die Schwerkraft bestrebt ist, ihnen einzuprägen. Er wendete dieses Prinzip, das mit dem allgemeinen Prinzipe von D'Alembert übereinstimmt, zur Bestimmung des Schwingungsmittelpunktes eines aus zwei an einer starren geraden Linie befestigten Körpern bestehenden Pendels, welches um einen Endpunkt dieser Linie schwingt, an. Seine Theorie dehnte er sodann auf eine grössere Anzahl von an einer starren Geraden befestigten Körpern aus und bestimmte ihren Schwingungsmittelpunkt unter der Voraussetzung, dass irgend zwei dieser Körper in ihrem besonderen Schwingungsmittelpunkte vereinigt sein können. Die Wahrheit dieser Voraussetzung fällt indessen ohne Erklärung nicht genügend in die Augen. Bei der Veröffentlichung von L'Hôpitals Brief kam Jakob Bernoulli auf den Gegenstand des Schwingungsmittelpunktes zurück (Acta Erudit. Lips. 1691, Jul., p. 317; Opera, Tom. I, p. 460) und mit der Zeit gelang es ihm, eine direkte und strenge Lösung der Aufgabe in dem Falle zu erhalten, wo alle Körper in einer Linie sich befinden, indem er das von L'Hôpital zugrunde gelegte Prinzip anwendete. Bernoulli dehnte später seine Methode auf den allgemeinen Fall der Schwingungen von Körpern irgend welcher Gestalt aus. (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1703, 1704.)

Eine geistreiche Untersuchung des Schwingungsmittelpunktes, ein gleich anfangs mit der Entwickelung von D'Alemberts Prinzip verbundenes Problem, wurde bald darauf von Brook Taylor (Philosophical Transactions, 1714, May. Methodus Jncrementorum) und Johann Bernoulli (Acta Erudit. Lips. 1714, Jun., p. 257. Mémoires Acad. Par. 1714, p. 208. Opera, Tom. II, p. 168) gegeben, zwischen welchen sich ein ärgerlicher Streit wegen der Priorität der Entdeckung entspann. (Act. Erudit. Lips. 1716, 1718, 1719, 1721, 1722). Die von diesen Mathematikern gegebene Methode hing

auch von den statischen Gesetzen des Hebels ab, enthielt aber nicht in deutlicher Gestalt L'Hôpital's Gleichgewichtsprinzip. Endlich bestimmte Hermann (Phoronomia, Lib. I, cap. 5) den Schwingungsmittelpunkt durch das Prinzip der statischen Äquivalenz der Anregungen der Schwerkraft und der stellvertretenden, in entgegengesetzten Richtungen angebrachten Anregungen, oder, wie sich der moderne Mathematiker ausdrückt, durch das Gleichgewicht, welches zwischen den eingeprägten Schwerkräften und den in entgegengesetzten Richtungen angebrachten Effektivkräften besteht; eine mit der von Jakob Bernoulli gegebenen zusammenfallende Untersuchungsmethode. Der Gedanke L'Hôpitals verallgemeinerte sich noch unter den Händen von Euler in einem Aufsatze über die Bestimmung der Schwingungen biegsamer Seile, welcher im Jahre 1740 gedruckt wurde. (Comment. Petrop. Tom. VII.)

Aus dem vorstehenden historischen Abrisse geht hervor, dass zur Erklärung des allgemeinen Bewegungsprinzipes Fontaine und D'Alembert wenig mehr zu thun hatten, sie hatten nur in allgemeiner Sprache auszudrücken, was deutlich in den besonderen Untersuchungen von L'Hôpital, Jakob und Johann Bernoulli, Brook Taylor, Hermann und Euler enthalten war, wenn man dieselben verfolgte.

Zum Zwecke weiterer Kenntnisnahme von der historischen Entwickelung des Prinzipes von D'Alembert wird der Leser verwiesen auf: Lagrange, Mécanique Analytique, Seconde Partie, Section I; Montucula, Histoire des Mathématiques, part. V, Liv. 3., part. IV und Whewell, History of the Inductive Sciences, Vol. II.

In den heutigen Abhandlungen über Mechanik ist D'Alemberts Prinzip unter der einen oder der anderen der nachfolgenden Formen dargestellt.

1. Wenn irgend ein materielles System unter der Wirkung irgend welcher Kräfte in Bewegung ist, dann sind die in jedem Augenblicke verlorenen bewegenden Kräfte stets im Gleichgewichte.

2. Wenn die effektiven bewegenden Kräfte der verschiedenen materiellen Punkte eines Systemes an denselben in entgegengesetzten Richtungen zu jenen, in welchen sie wirken, angebracht werden, so bilden sie in Verbindung mit den gegebenen Kräften ein System statisch geordneter Kräfte.

Die erstere dieser Erklärungen ist, wie man sieht, im Wesentlichen die nämliche wie die von D'Alembert gegebene; die letztere hingegen ist eine Verallgemeinerung des von Hermann bei seinen Untersuchungen des besonderen Problemes des Schwingungsmittelpunktes entwickelten Gedankens.

Erster Abschnitt.

Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes.

Der Inhalt dieses Abschnittes hat zum Zweck die Anwendung von D'Alembert's Prinzip bei der Erläuterung einer allgemeinen Methode zur Bestimmung der Bewegung eines materiellen Punktes innerhalb Röhren und zwischen sehr nahe aneinanderliegenden Flächen, von welchen entweder die Lage oder die Gestalt, oder Lage und Gestalt so beschaffen ist, dass sie sich nach einem bestimmten Gesetze ändert, wenn an dem Punkte gegebene Kräfte wirken. Mehrere Aufgaben dieses Abschnittes sind durch besondere Methoden im fünften Kapitel des zweiten Teiles gelöst worden.

Diese Arbeit von William Walton wurde zuerst veröffentlicht in „The Cambridge Mathematical Journal", Vol. III, p. 49.

I. Wir wollen mit der Betrachtung der Bewegung eines materiellen Punktes innerhalb einer Röhre beginnen, die der Allgemeinheit halber von doppelter Krümmung sein möge. Die Röhre sei in allen Fällen von unangebbar kleinem Querschnitt, vollkommen glatt und jeder Schnitt senkrecht zu ihrer Axe sei kreisförmig.

Die Lage des materiellen Punktes werde auf drei zu einander rechtwinkelige, in einem Punkte sich schneidende Axen bezogen; x, y, z seien die Coordinaten dieses Punktes zu einer beliebigen Zeit t, $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ diejenigen zur Zeit $t + \delta t$, wobei die Coordinatendifferenzen $\delta x, \delta y, \delta z$ als unangebbar klein gedacht werden. Damit sind die effektiven accelerierenden Kräfte an dem materiellen Punkte, dessen Masse gleich der Einheit sein möge, parallel zu den drei festen Axen am Ende der Zeit t

$$\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}, \quad \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta t^2}.$$

Sind ferner X, Y, Z die auf den Punkt wirkenden beschleunigenden Kräfte parallel zu den Axen der x, y, z; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten eines Punktes in der Röhre sehr nahe dem Punkte (x, y, z), welchen der materielle Punkt zur Zeit t inne hat, dann haben wir vermöge D'Alemberts Prinzip in Verbindung mit dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten, wenn wir beachten, dass die Wirkung der Röhre auf den materiellen Punkt in jedem ihrer Punkte stets senkrecht zu ihrer Axe ist, indem wir die Punkte (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ durch eine Linie verbunden denken, zu der Zeit t

$$\left(\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} - X\right) dx + \left(\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} - Y\right) dy + \left(\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} - Z\right) dz = 0. \qquad \text{(A)}$$

Da sich ferner die Gestalt und die Lage der Röhre nach einem bestimmten Gesetze ändern soll, ist es klar, dass die Gleichungen der Röhre bekannt sein müssen, wenn t bekannt ist, folglich müssen zu der Gleichung (A) noch Gleichungen hinzugefügt werden, welche sich aus den besonderen Bedingungen für jede individuelle Aufgabe ergeben und äquivalent sind den Gleichungen von der Form

$$\Phi(x, y, z, t) = 0. \qquad \Psi(x, y, z, t) = 0, \qquad \text{(B)}$$

wo Φ und Ψ funktionale Symbole sind und diese Funktionen von den Gesetzen abhängen, nach welchen sich die Gestalt und die Lage der Röhre ändern.

Die drei Gleichungen (A) und (B) enthalten die vier Grössen x, y, z, t, so dass wir in jedem besonderen Falle, wenn die Schwierigkeiten des analytischen Verfahrens nicht unübersteiglich sind, jede der Grössen x, y, z als eine Funktion von t darstellen können, worinnen die vollständige Lösung des Problemes besteht.

Bleibt die Röhre während der ganzen Bewegung innerhalb einer

Ebene, dann gehen die drei Gleichungen (A) und (B), wenn wir die Ebene der xy mit der Ebene der Bewegung zusammenfallen lassen, über in die zwei Relationen

$$\left(\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} - X\right) dx + \left(\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} - Y\right) dy = 0, \quad (C) \qquad \Phi(x, y, t) = 0. \quad (D)$$

Wir geben nun dazu über, diese allgemeinen Bewegungsgleichungen durch die Discussion einiger besonderer Probleme zu illustrieren.

1. Eine geradlinige Röhre dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um einen ihrer Endpunkte in einer horizontalen Ebene. Welches ist die Bewegung eines materiellen Punktes in dieser Röhre?

Es sei ω die konstante Winkelgeschwindigkeit, r der Abstand des materiellen Punktes zu einer beliebigen Zeit t von dem festen Endpunkte der Röhre; die Ebene der Bewegung falle mit der Ebene der xy zusammen, der Ursprung der Coordinaten mit dem festen Drehpunkte der Röhre, die Abscissenaxe mit der Anfangslage der Röhre. Damit sind die Coordinaten des materiellen Punktes zur Zeit t

$$x = r \cos \omega t, \quad (1) \qquad y = r \sin \omega t. \quad (2)$$

Die Differentiation der Gleichungen (1) und (2) giebt

$$dx = dr \cos \omega t, \qquad dy = dr \sin \omega t.$$

Ferner erhalten wir durch (1) und (2)

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\delta r}{\delta t} \cos \omega t - \omega r \sin \omega t, \qquad \frac{\delta^2 x}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} \cos \omega t - 2\omega \frac{\delta r}{\delta t} \sin \omega t - \omega^2 r \cos \omega t,$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{\delta r}{\delta t} \sin \omega t + \omega r \cos \omega t, \qquad \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} \sin \omega t + 2\omega \frac{\delta r}{\delta t} \cos \omega t - \omega^2 r \sin \omega t.$$

Im vorliegenden Falle sind die gegebenen beschleunigenden Kräfte $X = 0$, $Y = 0$, so dass, wenn wir in die allgemeine Formel (C) diese und diejenigen Werte substituieren, welche wir für dx, dy, $\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$ bekommen haben, sich ergiebt

$$\cos \omega t \left(\frac{\delta^2 r}{\delta t^2} \cos \omega t - 2\omega \frac{\delta r}{\delta t} \sin \omega t - \omega^2 r \cos \omega t\right)$$

$$+ \sin \omega t \left(\frac{\delta^2 r}{\delta t^2} \sin \omega t + 2\omega \frac{\delta r}{\delta t} \cos \omega t - \omega^2 r \sin \omega t\right) = 0,$$

und daher

$$\frac{\delta^2 r}{\delta t^2} - \omega^2 r = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$r = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}.$$

Wählen wir nun $r = a$, $\frac{dr}{dt} = v_0$, wenn $t = 0$, dann sind die Integrationskonstanten

$$A = \frac{a\omega + v_0}{2\omega}, \qquad B = \frac{a\omega - v_0}{2\omega},$$

und mithin ist die Gleichung für die Bewegung des materiellen Punktes innerhalb der Röhre

$$2\omega r = (a\omega + v_0)e^{\omega t} + (a\omega - v_0)e^{-\omega t}.$$

Diese Aufgabe, welche das früheste Problem für die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer vorgeschriebenen Curve war, welche sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt, ist Johann Bernoulli zu verdanken. (Opera, Tom. IV, p. 248.) Eine Lösung dieser Aufgabe lieferte auch Clairaut, welchem sie wahrscheinlich von Johann Bernoulli vorgeschlagen wurde. (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1742, p. 10.)

2. Eine geradlinige Röhre dreht sich um einen ihrer Endpunkte in einer vertikalen Ebene. Beim Beginn der Bewegung falle die Axe der Röhre mit der horizontalen Abscissenaxe zusammen; die Axe der y sei vertikal, der Drehpunkt Coordinatenursprung. Welches ist die Gleichung für die Bewegung eines materiellen Punktes in dieser Röhre?

Indem wir beachten, dass hier $X = 0$, $Y = -g$ ist, erhalten wir durch denselben Prozess wie vorhin

$$\frac{\delta^2 r}{\delta t^2} - \omega^2 r = -g \sin \omega t.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$r = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t,$$

und wenn wir die Konstanten aus den Bedingungen bestimmen, dass anfangs r, $\frac{\delta r}{\delta t}$ gleich a, v_0 sind, finden wir für die Bewegung des Punktes entlang der Röhre

$$2\omega r = \left(a\omega + v_0 - \frac{g}{2\omega}\right)e^{\omega t} + \left(a\omega - v_0 + \frac{g}{2\omega}\right)e^{-\omega t} + \frac{g}{\omega}\sin \omega t.$$

Diese Aufgabe, von welcher eine irrtümliche Lösung durch Barbier in den Annales de Gergonne, Tom. XIX, gegeben worden ist, wurde in dem folgenden Bande richtig von Ampère gelöst. In dem Cambridge Mathematical Journal, Vol. III, p. 42 befindet sich eine Lösung von Professor Booth, welcher eine Zeit lang die interessanteren Fälle der Bewegung behandelt hat.

3. Eine geradlinige Röhre dreht sich in einer horizontalen Ebene um einen ihrer Endpunkte, welcher fest ist, mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit, dass die Tangente ihres Neigungswinkels zu der Axe der x der Zeit proportional ist. Welches ist die Bewegung eines materiellen Punktes in ihr?

Die Gleichung der Röhre zu einer beliebigen Zeit t ist

$$y = m t x, \tag{1}$$

wo m eine konstante Grösse bedeutet. Folglich haben wir $d y = m t d x$, und daher, weil $X = 0$, $Y = 0$, mit (C)

$$\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} + m t \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = 0. \tag{2}$$

Aber durch (1) bekommen wir

$$\frac{\delta y}{\delta t} = m t \frac{\delta x}{\delta t} + m x, \qquad \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = m t \frac{\delta^2 x}{\delta t^2} + 2 m \frac{\delta x}{\delta t},$$

mithin durch (2)

$$(1 + m^2 t^2) \frac{\delta^2 x}{\delta t^2} + 2 m^2 t \frac{\delta x}{\delta t} = 0, \qquad \frac{\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}}{\frac{\delta x}{\delta t}} + \frac{2 m^2 t}{1 + m^2 t^2} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$l\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right) + l(1 + m^2 t^2) = l(C), \qquad \frac{\delta x}{\delta t}(1 + m^2 t^2) = C.$$

Bezeichnet jetzt v_0 den Anfangswert von $\frac{\delta x}{\delta t}$, welcher die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes für die Bewegung entlang der Röhre ist, dann ist $C = 0$, mithin

$$\frac{\delta x}{\delta t}(1 + m^2 t^2) = v_0, \qquad \delta x = \frac{v_0 \, \delta t}{1 + m^2 t^2}.$$

Durch die Integration dieser Gleichung erhalten wir weiter

$$x + C = \frac{v_0}{m} \, arc\,(tg = m t).$$

Ist nun $x = a$, wenn $t = 0$, dann ist $a + C = 0$, mithin

$$x = a + \frac{v_0}{m} \, arc\,(tg = m t).$$

Sonach ergiebt sich mit (1)

$$y = a m t + v_0 \, t \, arc\,(tg = m t).$$

Bezeichnet noch ϑ die Neigung der Röhre gegen die Axe der x zu einer beliebigen Zeit t und r den Abstand des materiellen Punktes von ihrem festen Ende zu dieser Zeit, dann wird sein

$$r = \frac{a m + v_0 \vartheta}{m \cos \vartheta}.$$

4. Eine kreisförmige Röhre ist genötigt, sich in einer horizontalen Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um einen festen Punkt ihres Umfanges zu bewegen. Welches ist die Bewegung eines materiellen Punktes in der Röhre, der sich beim Beginn der Bewegung in dem Endpunkte des durch den festen Punkt gehenden Durchmessers befindet?

Die Abscissenaxe falle zusammen mit dem Diameter durch den festen Punkt zur Zeit $t = 0$, welcher Coordinatenursprung sein möge; ω bezeichne die Winkelgeschwindigkeit des Kreises, a seinen Radius, ϑ den Winkel zwischen dem Durchmesser durch den beweglichen Punkt zur Zeit t und dem Diameter durch den Ursprung.

Es ist leicht zu sehen, dass dann die Coordinaten des materiellen Punktes sind

$x = a \cos \omega t + a \cos(\omega t - \vartheta)$, (1) $y = a \sin \omega t + a \sin(\omega t - \vartheta)$. (2)

Da nun $X = 0$, $Y = 0$, so erhalten wir mit (C)

$$\sin(\omega t - \vartheta)\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} - \cos(\omega t - \vartheta)\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = 0, \quad (3)$$

weil $dx = a\,d\vartheta \sin(\omega t - \vartheta)$, $dy = -a\,d\vartheta \cos(\omega t - \vartheta)$ ist.

Ferner geben die Gleichungen (1) und (2)

$$\frac{\delta x}{\delta t} = -a\omega \sin \omega t + a\left(\frac{\delta \vartheta}{\delta t} - \omega\right)\sin(\omega t - \vartheta),$$

$$\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} = -a\omega^2 \cos \omega t - a\left(\frac{\delta \vartheta}{\delta t} - \omega\right)^2 \cos(\omega t - \vartheta) + a\frac{\delta^2 \vartheta}{\delta t^2}\sin(\omega t - \vartheta);$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} = a\omega \cos \omega t - a\left(\frac{\delta \vartheta}{\delta t} - \omega\right)\cos(\omega t - \vartheta),$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = -a\omega^2 \sin \omega t - a\left(\frac{\delta \vartheta}{\delta t} - \omega\right)^2 \sin(\omega t - \vartheta) - a\frac{\delta^2 \vartheta}{\delta t^2}\cos(\omega t - \vartheta),$$

und demnach ergiebt sich durch (3)

$$a\omega^2\left\{\sin \omega t \cos(\omega t - \vartheta) - \cos \omega t \sin(\omega t - \vartheta)\right\} + a\frac{\delta^2 \vartheta}{\delta t^2} = 0,$$

$$\omega^2 \sin \vartheta + \frac{\delta^2 \vartheta}{\delta t^2} = 0.$$

Indem wir beide Seiten dieser Gleichung mit $2\frac{\delta \vartheta}{\delta t}$ multiplizieren und integrieren, wird

$$\left(\frac{\delta \vartheta}{\delta t}\right)^2 = C + 2\omega^2 \cos \vartheta.$$

Ist die absolute Geschwindigkeit des materiellen Punktes anfangs gleich Null, dann ist, weil anfangs $\vartheta = 0$ und 2ω der Anfangswert von $\frac{\delta \vartheta}{\delta t}$ ist,

$$4\omega^2 = C + 2\omega^2, \qquad C = 2\omega^2,$$

mithin

$$\left(\frac{\delta \vartheta}{\delta t}\right)^2 = 2\omega^2(1 + \cos \vartheta) = 4\omega^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2}; \quad \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = 2\omega \cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}\,\delta \vartheta}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}} = 2\omega\,\delta t, \qquad \frac{\delta \sin\frac{\vartheta}{2}}{1 - \sin^2\frac{\vartheta}{2}} = \omega\,\delta t.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$l\frac{1+\sin\frac{\vartheta}{2}}{1-\sin\frac{\vartheta}{2}} = 2\,\omega\,t + C.$$

Aber es ist $\vartheta = 0$, wenn $t = 0$, folglich $C = 0$, und wir haben

$$\frac{1+\sin\frac{\vartheta}{2}}{1-\sin\frac{\vartheta}{2}} = e^{2\omega t},$$

also schliesslich

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}},$$

womit die Lage des materiellen Punktes in der Röhre für eine beliebige Zeit t bestimmt ist. Wenn $t = \infty$ ist, haben wir $\sin\frac{\vartheta}{2} = 1$, $\vartheta = \pi$, was zeigt, dass der materielle Punkt nach dem Verlaufe einer unendlichen Zeit n dem Rotationspunkte ankommen wird.

5. Wenn wir denselben Weg wie bei der Lösung der Aufgaben (1) (2), (4) verfolgen, so können wir eine bequemere Formel für die folgende allgemeinere Aufgabe erhalten.

Eine krummlinige Röhre irgend welcher unveränderlichen Gestalt dreht sich in ihrer Ebene um einen festen Punkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Welches ist die Bewegung eines materiellen Punktes in dieser Röhre, wenn auf denselben beliebige Kräfte wirken?

Es sei ω die konstante Winkelgeschwindigkeit der Röhre um den festen Punkt, r der Abstand des materiellen Punktes zu einer beliebigen Zeit t von diesem Punkte, φ der Winkel zwischen den gleichzeitigen Richtungen von r und einer Linie, welche einen gewissen Punkt der Röhre mit dem festen Rotationspunkte verbindet, ds ein Längenelement der Röhre an dem Orte des materiellen Punktes, S die accelerierende Kraft an dem materiellen Punkte parallel ds, dann ist die Gleichung für seine Bewegung

$$r^2\left(\frac{\delta\varphi}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\delta r}{\delta t}\right)^2 - \omega^2 r^2 = 2\int S\frac{ds}{d\varphi}\,\delta\varphi.$$

Weil aber die Gestalt der Röhre unveränderlich ist, so können offenbar $\delta\varphi$, δr durch $d\varphi$, dr ersetzt werden, und haben wir dann, wegen der Gleichmässigkeit der Bezeichnung dt an die Stelle von δt zu substituieren, so dass wir erhalten

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \omega^2 r^2 = 2\int S\,ds.$$

Wenn ω gleich Null ist, dann geht unsere Gleichung über in

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=2\int S\,ds,$$

welches die wohlbekannte Formel für die Bewegung eines materiellen Punktes in einer unbeweglichen ebenen Röhre ist, wenn auf diesen Punkt irgend welche Kräfte wirken.

6. In den vorhergehenden Beispielen ändert sich die Lage der Röhre mit der Zeit, die Gestalt derselben bleibt indessen unveränderlich. Wir wollen nun ein Beispiel geben, bei welchem die Gestalt sich mit der Zeit ändert.

Ein materieller Punkt wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit innerhalb einer kreisförmigen Röhre geworfen. Der Halbmesser der Röhre wächst proportional der Zeit, ihr Mittelpunkt verharrt an derselben Stelle. Welches ist die Bewegung eines materiellen Punktes in ihr, wenn die Röhre in einer horizontalen Ebene bleibt?

Die Gleichung des sich beständig ändernden Kreises ist

$$x^2+y^2=a^2(1+\alpha t)^2, \tag{1}$$

wo a und α konstante Grössen sind. Folglich ist

$$x\,dx+y\,dy=0,$$

und daher mit der allgemeinen Gleichung (C)

$$y\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}-x\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}=0,$$

welche Gleichung integriert giebt

$$y\frac{\delta x}{\delta t}-x\frac{\delta y}{\delta t}=C.$$

Wir wählen die Abscissenaxe so, dass sie mit dem anfänglichen Abstande des materiellen Punktes vom Mittelpunkte zusammenfällt, v_0 als seine Anfangsgeschwindigkeit entlang der Röhre, dann ist $C=-a\,v_0$, also

$$x\frac{\delta y}{\delta t}-y\frac{\delta x}{\delta t}=a\,v_0. \tag{2}$$

Ferner haben wir zufolge der Gleichung (1)

$$x\frac{\delta x}{\delta t}+y\frac{\delta y}{\delta t}=a^2\alpha(1+\alpha t). \tag{3}$$

Indem wir nun (2) mit y, (3) mit x multiplizieren und das erstere Resultat von dem letzteren subtrahieren, bekommen wir

$$(x^2+y^2)\frac{\delta x}{\delta t}=a^2\alpha(1+\alpha t)\,x-a\,v_0\,y,$$

und daher durch (1)

$$a(1+\alpha t)^2\frac{\delta x}{\delta t}=a\,\alpha(1+\alpha t)x-v_0\sqrt{a^2(1+\alpha t)^2-x^2},$$

oder, wenn wir $(1 + \alpha t) = \alpha \tau$ setzen,

$$a\tau^2 \frac{\delta x}{\delta t} = a\tau x - \frac{v_0}{\alpha^2}\sqrt{a^2\alpha^2\tau^2 - x^2}.$$

Ferner setzen wir noch $x = m\tau$, so dass

$$a\tau^2\left(m + \tau\frac{\delta m}{\delta \tau}\right) = a m \tau^2 - \frac{v_0 \tau}{\alpha^2}\sqrt{a^2\alpha^2 - m^2},$$

$$a\tau^3 \frac{\delta m}{\delta \tau} = -\frac{v_0 \tau}{\alpha^2}\sqrt{a^2\alpha^2 - m^2} = -\frac{a\alpha^2 \delta m}{\sqrt{a^2\alpha^2 - m^2}} = v_0 \frac{\delta \tau}{\tau^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$C + a\alpha^2 arc\left(cos = \frac{m}{a\alpha}\right) = -\frac{v_0}{\tau},$$

oder, indem wir für m seinen Wert schreiben,

$$C + a\alpha^2 arc\left(cos = \frac{x}{a\alpha\tau}\right) = -\frac{v_0}{\tau},$$

und wenn wir noch den Wert von $\tau = \frac{1}{\alpha}(1 + \alpha t)$ substituieren

$$C + a\alpha^2 arc\left(cos = \frac{x}{a(1+\alpha t)}\right) = -\frac{\alpha v_0}{1 + \alpha t}.$$

Nun ist $x = a$, wenn $t = 0$, folglich $C = -\alpha v_0$, und demnach

$$a\alpha^2 arc\left(cos = \frac{x}{a(1+\alpha t)}\right) = \frac{\alpha^2 v_0 t}{1+\alpha t}, \quad x = a(1+\alpha t)\cos\frac{v_0 t}{a(1+\alpha t)}.$$

Jetzt erhalten wir schliesslich mit (1)

$$y = a(1+\alpha t)\sin\frac{v_0 t}{a(1+\alpha t)}.$$

Die beiden letzten Gleichungen geben die absolute Lage des Punktes für igrend eine bestimmte Zeit t.

II. Wir gehen nun über zu der Betrachtung der Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Fläche, von welcher er nicht im stande ist sich zu trennen, während die Fläche selbst sich ändert in ihrer Lage oder in ihrer Form oder in beiden zugleich nach einem gegebenen Gesetze. Wir stellen uns dabei vor, dass sich der materielle Punkt zwischen zwei unendlich nahe an einander gelegenen Flächen bewegt, welche durch dieselbe Gleichung dargestellt werden können.

Es seien x, y, z die Coordinaten des materiellen Punktes zu einer beliebigen Zeit t, $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ die Zunahmen von x, y, z in einer unendlich kleinen Zeit δt, dx, dy, dz die Änderungen von x, y, z beim Übergange von dem Punkte (x, y, z) zur Zeit t zu einem unendlich nahe dabei gelegenen Punkte der Fläche; X, Y, Z die den Punkt parallel zu den Coordinatenaxen beschleunigenden Kräfte zur Zeit t. Die Wirkung der Fläche auf den Punkt ist stets in der Richtung der Normalen zu

jenem Punkte gelegen und haben wir daher durch das Prinzip von D'Alembert in Verbindung mit dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\left(\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} - X\right) dx + \left(\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} - Y\right) dy + \left(\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} - Z\right) dz = 0. \qquad \text{(A')}$$

Weil ferner die Lage und Gestalt der Fläche sich nach einem bestimmten Gesetze ändert, so muss ihre Gleichung für irgend eine gegebene Zeit bekannt sein, weshalb wir infolge der Beschaffenheit einer jeden besonderen Aufgabe noch gewisse Bedingungen zwischen den Grössen x, y, z, t haben, die durch die Gleichung repräsentiert sind

$$F = f(x, y, z, t) = 0. \qquad \text{(B')}$$

Das totale Differential dieser zweiten Bedingung ist

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0.$$

Diese Relation multiplizieren wir mit einer willkürlichen Grösse λ und subtrahieren das Resultat von der Gleichung (A'), wodurch wir erhalten

$$\left(\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} - X - \lambda \frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} - Y - \lambda \frac{dF}{dy}\right) dy$$
$$+ \left(\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} - Z - \lambda \frac{dF}{dz}\right) dz = 0.$$

Weil der Faktor λ willkürlich ist, so können wir die Coëfficienten irgend eines der drei Differentiale zu Null gleichen, und weil die zwei bleibenden der drei Differentiale dx, dy, dz von einander unabhängig sind, so müssen beide ihrer Coëfficienten gleich Null sein, folglich bekommen wir, indem wir λ zwischen den drei resultierenden Gleichungen eliminieren,

$$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} - Y\right) \frac{dF}{dz} = \left(\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} - Z\right) \frac{dF}{dy}, \quad \left(\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} - Z\right) \frac{dF}{dx} = \left(\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} - X\right) \frac{dF}{dz}.$$
$$\left(\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} - X\right) \frac{dF}{dy} = \left(\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} - Y\right) \frac{dF}{dx}.$$

Irgend zwei dieser drei Relationen geben uns in Verbindung mit der Gleichung (B') drei Gleichungen in x, y, z, t, woraus x, y, z als Funktionen von t zu bestimmen sind.

Das folgende Beispiel wird dazu dienen, den Gebrauch dieser Gleichungen zu erläutern. Wir haben einen Fall gewählt, wo die Gestalt der Fläche unverändert bleibt und ihre Lage allein sich ändert. Die Analysis erhält indessen in der Lösung der von uns betrachteten Klasse von Problemen ihren allgemeinen Charakter lediglich infolge der Gegenwart von t in der Gleichung (B'), und daher genügt das von uns gewählte Beispiel für den allgemeinen Zweck, welchen wir im Auge haben.

Ein materieller Punkt sinkt infolge der Wirkung der Schwerkraft auf einer sich um eine in ihr liegende vertikale Axe mit konstanter

Geschwindigkeit drehenden Ebene herab. Welches ist die Bewegung des Punktes?

Wir wählen die Ebene der xy horizontal, die Axe der x zusammenfallend mit dem anfänglichen Schnitte der sich drehenden Ebene und der horizontalen Ebene durch den Ursprung, die Axe der z vertikal abwärts, ω als konstante Winkelgeschwindigkeit der beweglichen Ebene.

Die Gleichung der rotierenden Ebene ist zu einer beliebigen Zeit t

$$F = y \cos \omega t - x \sin \omega t = 0, \tag{1}$$

womit $\quad \frac{dF}{dx} = -\sin \omega t, \quad \frac{dF}{dy} = \cos \omega t, \quad \frac{dF}{dz} = 0.$

Die den Punkt antreibenden Kräfte sind $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, so dass mit einer der zwei ersten der drei allgemeinen Relationen

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g \tag{2}$$

und mit der dritten

$$\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} \cos \omega t + \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} \sin \omega t = 0. \tag{3}$$

Bezeichnet r den Abstand des materiellen Punktes von der Axe der z zu der Zeit t, so ist

$$x = r \cos \omega t, \qquad y = r \sin \omega t,$$

womit

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\delta r}{\delta t} \cos \omega t - \omega r \sin \omega t, \qquad \frac{\delta^2 x}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} \cos \omega t - 2\omega \frac{\delta r}{\delta t} \sin \omega t - \omega^2 r \cos \omega t,$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{\delta r}{\delta t} \sin \omega t + \omega r \cos \omega t, \qquad \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 r}{\delta t^2} \sin \omega t + 2\omega \frac{\delta r}{\delta t} \cos \omega t - \omega^2 r \sin \omega t,$$

daher erhalten wir mit (3)

$$\frac{\delta^2 r}{\delta t^2} - \omega^2 r = 0. \tag{4}$$

Nun seien die Anfangswerte von $z, \frac{\delta z}{\delta t}$, $0, v_0$, jene von $r, \frac{\delta r}{\delta t}$, a, α, dann bekommen wir durch die Gleichungen (2) und (4) nach Vollzug unverkennbarer Operationen

$$z = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t,$$

$$2\omega r = (\omega a + \alpha) e^{\omega t} + (\omega a - \alpha) e^{-\omega t},$$

und $\quad l \frac{\sqrt{\omega^2 r^2 + \alpha^2 - \omega^2 a^2} + \omega r}{\alpha + \omega a} = \frac{\omega}{g} \left\{ \sqrt{2 g z + v_0^2} - v_0 \right\}.$

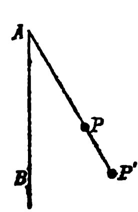
Die ersten zwei dieser Gleichungen geben die Lage des materiellen Punktes auf der rotierenden Ebene zur Zeit t und mittelst der Gleichung (1) erhalten wir seine absolute Lage zu dieser Zeit; die dritte ist die Gleichung der Bahn, welche der Punkt auf der Ebene beschreibt.

Walton, p. 394—411.

Zweiter Abschnitt.

Systeme materieller Punkte.

1. Zwei schwere Punkte P, P' (Fig. 69) sind an einem starren, gewichtslosen Stabe APP', welcher in einer vertikalen Ebene um seinen Endpunkt A schwingt, befestigt. Zu bestimmen die Bewegung.



Figur 69.

Lasse sein m, m' die Massen der zwei materiellen Punkte P, P', $AP = a$, $AP' = a'$. Ziehe AB vertikal abwärts und nimm $\measuredangle PAB = \vartheta$. Bezeichne mit ds, ds' die Elemente der Kreisbahnen, welche von den Punkten P, P' in der unendlich kleinen Zeit dt beschrieben werden, gerechnet in der Richtung, in welcher ϑ wächst. Damit sind die Effektivkräfte der beiden Punkte $m\frac{d^2s}{dt^2}$, $m'\frac{d^2s'}{dt^2}$, ihre Momente um den Punkt A: $ma\frac{d^2s}{dt^2}$, $m'a'\frac{d^2s'}{dt^2}$, auch sind die Momente der antreibenden Schwerkraft $-mag\sin\vartheta$, $-m'a'g\sin\vartheta$. Folglich erhalten wir für das Gleichgewicht der antreibenden Kräfte und der entgegengesetzt ihrer Richtung genommenen Effektivkräfte

$$ma\frac{d^2s}{dt^2} + m'a'\frac{d^2s'}{dt^2} + (ma + m'a')g\sin\vartheta = 0.$$

Aber es ist $ds = a\,d\vartheta$, $ds' = a'd\vartheta$, mithin

$$(ma^2 + m'a'^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (ma + m'a')g\sin\vartheta = 0,$$

ein Resultat, welches zeigt, dass der Stab isochron schwingen wird mit einem vollkommenen Pendel von der Länge

$$\frac{ma^2 + m'a'^2}{ma + m'a'}.$$

Walton, p. 411.

2. Zwei schwere Punkte sind an den Enden eines undehnbaren Fadens befestigt, welcher über eine glatte Rolle in dem gemeinsamen Gipfel zweier geneigter Ebenen läuft, und bewegen sich infolge der Wirkung der Schwerkraft auf diesen Ebenen. Welches ist die Bewegung der Punkte und die Spannung des Fadens?

Es seien m, m' die Massen der zwei Punkte, α, α' die Horizontalneigungen der beiden Ebenen, x, x' die Abstände der Punkte von dem gemeinschaftlichen Gipfel der Ebenen zur Zeit t. Die die schweren Punkte die Ebenen herunter beschleunigenden Kräfte sind $mg\sin\alpha$, $m'g\sin\alpha'$, die in denselben Richtungen wirkenden Effektivkräfte $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m'\frac{d^2x'}{dt^2}$, resp.

Daher ist für das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte und der Effektivkräfte

$$g\,(m \sin \alpha - m' \sin \alpha') = m\frac{d^2 x}{d t^2} - m'\frac{d^2 x'}{d t^2}. \tag{1}$$

Bezeichnen wir nun mit c die konstante Länge des Fadens, so ist

$$x + x' = c, \qquad \frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{d^2 x'}{d t^2} = 0.$$

Folglich erhalten wir mittelst der Relation (1)

$$(m + m')\frac{d^2 x}{d t^2} = g\,(m \sin \alpha - m' \sin \alpha'). \tag{2}$$

Diese Gleichung bestimmt die gemeinsame Acceleration der zwei materiellen Punkte in der Richtung, in welcher x wächst. Würde der Ausdruck für $\frac{d^2 x}{d t^2}$ negativ sein, so würde x abnehmen und x' wachsen.

Setzen wir $g\frac{m \sin \alpha - m' \sin \alpha'}{m + m'} = G$, dann ist

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = G.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{d x}{d t} = G t + C, \qquad x = G\frac{t^2}{2} + C t + D.$$

Ist beim Beginn der Bewegung $x = x_0$, $\frac{d x}{d t} = v_0$, $t = 0$, dann sind die Integrationskonstanten $C = v_0$, $D = x_0$, und bekommen wir mit Rücksicht darauf, dass $x' = c - x$, $\frac{d^2 x'}{d t^2} = -\frac{d^2 x}{d t^2}$ ist,

$$\frac{d x}{d t} = v = v_0 + G t, \qquad \frac{d x'}{d t} = v' = -(v_0 + G t).$$

$$x = x_0 + v_0 t + G\frac{t^2}{2} = c - x'.$$

Die Bewegung der beiden materiellen Punkte ist mithin so beschaffen, dass sie für den einen derselben eine gleichförmig beschleunigte seine geneigte Ebene abwärts, für den anderen eine eben solche seine Ebene aufwärts ist. Soll die Bewegung der beiden Punkte eine gleichförmige sein, dann haben wir die Bedingung $\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{d^2 x'}{d t^2} = 0$, indem in diesem Falle $\frac{d x}{d t} = -\frac{d x'}{d t} =$ einer Konstanten sein muss. Dieses tritt ein, wenn die Massen der materiellen Punkte in der Beziehung stehen, dass $m \sin \alpha - m' \sin \alpha' = 0$, oder $m : m' = \sin \alpha' : \sin \alpha$. Bezeichnet T die Spannung

des Fadens, so erhalten wir für das Gleichgewicht der Kräfte T, $m g \sin \alpha$ und der Effektivkraft $m \frac{d^2 x}{d t^2}$ an der Masse m, indem wir die letztere entgegengesetzt ihrer eigenen Richtung zu nehmen haben,

$$T = m \left(g \sin \alpha - \frac{d^2 x}{d t^2} \right),$$

also mit (2)
$$T = \frac{m m' g}{m + m'} (\sin \alpha + \sin \alpha').$$

Demnach ergiebt sich, dass die Spannung des Fadens während der ganzen Bewegung konstant ist.

Von besonderem Interesse ist hier der Spezialfall, wo $\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}$, also jede der beiden Ebenen vertikal ist, die wir uns dann ganz fort denken können. Wir kommen dadurch auf die Bewegung der Adwoot'schen Fallmaschine. Es ist hier, ohne Berücksichtigung der Reibungswiderstände

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = g \frac{m - m'}{m + m'} = - \frac{d^2 x'}{d t^2}, \qquad v = v_0 + g \frac{m - m'}{m + m'} t = - v',$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{g}{2} \frac{m - m'}{m + m'} t^2 = c - x', \qquad T = \frac{2 m m' g}{m + m'}.$$

Gewöhnlich wird $m : m' = 7 : 8$ gewählt, so dass die effektive Beschleunigung gleich $\frac{1}{15} g$ wird.

Poisson, Traîté de Mécanique, Tom. II, p. 12.

3. Auf einer horizontalen Welle befindet sich eine zu ihrer Axe senkrechte vertikale Kreisscheibe. Um Rad und Welle sind in entgegengesetzten Richtungen gewichtslose Fäden gewunden, deren freie Enden Gewichte tragen. Welches ist die Bewegung der Gewichte und die Spannung der Fäden?

Lasse bezeichnen a, a' die Halbmesser von Rad und Welle, m, m' die Massen der von denselben herabhängenden Körper, s den am Ende der Zeit t von einem Massenelemente μ der Masse des Rades und der Welle beschriebenen Bogen, dessen Abstand von der Rotationsaxe r sein möge, x, x' die Vertikaldistanzen der Massen m, m' unter der horizontalen Ebene durch die Axe.

Das resultierende Moment der antreibenden Kräfte um die Rotationsaxe ist $m a g - m' a' g$ und dasjenige der Effektivkräfte, genommen in derselben Richtung,

$$m a \frac{d^2 x}{d t^2} - m' a' \frac{d^2 x'}{d t^2} + \Sigma \left(\mu r \frac{d^2 s}{d t^2} \right).$$

Folglich ist durch das Prinzip von D'Alembert

$$m a \frac{d^2 x}{d t^2} - m' a' \frac{d^2 x'}{d t^2} + \Sigma \left(\mu r \frac{d^2 s}{d t^2}\right) = m a g - m' a' g. \tag{1}$$

Stellt ϑ den ganzen Winkel dar, um welchen das Rad und die Welle in der Zeit t sich gedreht haben, sind b, b' die Anfangswerte von x, x', dann ist offenbar

$$x = b + a \vartheta, \qquad x' = b' - a' \vartheta,$$

und demnach
$$\frac{d^2 x}{d t^2} = a \frac{d^2 \vartheta}{d t^2}, \qquad \frac{d^2 x'}{d t^2} = - a' \frac{d^2 \vartheta}{d t^2}. \tag{2}$$

Auch ist es augenscheinlich, dass $s = r \vartheta$, mithin

$$\Sigma \left(\mu r \frac{d^2 s}{d t^2}\right) = \Sigma \left(\mu r^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2}\right) = \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} \Sigma (\mu r^2) = M k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2}, \tag{3}$$

wo $M k^2$ das Trägheitsmoment von Rad und Welle zusammen für die Rotationsaxe bedeutet.

Jetzt bekommen wir mit (1), (2), (3)

$$(m a^2 + m' a'^2 + M k^2) \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = (m a - m' a') g,$$

und daher, wenn das System zur Zeit $t = 0$ keine Bewegung besitzt,

$$\vartheta = \frac{1}{2} g t^2 \frac{m a - m' a'}{m a^2 + m' a'^2 + M k^2},$$

woraus hervorgeht, dass die Winkelbewegung des Systemes eine gleichförmig beschleunigte ist.

Bezeichnet noch T die Spannung des Fadens, welcher die Masse m, T' diejenige des Fadens, welcher die Masse m' trägt, so erhalten wir

$$T = m \left(g - \frac{d^2 x}{d t^2}\right) = m \left(g - a \frac{d^2 \vartheta}{d t^2}\right) = m g \left\{1 - \frac{a (m a - m' a')}{m a^2 + m' a'^2 + M k^2}\right\},$$

$$T = m g \frac{m' a' (a + a') + M k^2}{m a^2 + m' a'^2 + M k^2}; \qquad T' = m' g \frac{m a (a + a') + M k^2}{m a^2 + m' a'^2 + M k^2},$$

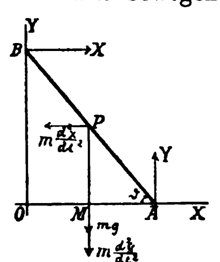
was zeigt, dass diese Spannungen während der ganzen Bewegung des Systemes unveränderlich sind.

Walton, p. 413.

4. Ein dünner, gleichförmiger Stab AB (Fig. 70, S. 200) gleitet zwischen dem vertikalen Stabe OBY und dem horizontalen Stabe OAX herunter, an welche Stäbe er durch kleine Ringe bei A und B gefesselt ist. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit des Stabes AB für eine beliebige seiner Lagen?

Es bezeichne X den Druck von OY auf AB, Y denjenigen von OX auf AB, m die Masse eines Längenelementes ds des Stabes AB bei P. Ferner sei $PM \perp OX$, $OM = x$, $PM = y$, $AB = a$, $\sphericalangle OAB = \vartheta$, $AP = s$.

Die bewegenden Kräfte an dem Massenelemente m sind die gegebene Kraft mg parallel OY, die Effektivkräfte $m\frac{d^2 x}{dt^2}$, $m\frac{d^2 y}{dt^2}$ parallel zu OX, OY. Behalten wir die Richtungen von $m\frac{d^2 x}{dt^2}$, $m\frac{d^2 y}{dt^2}$ so bei, wie sie in der Figur angegeben sind und sehen wir dieselben Grössen als für alle materiellen Punkte des Stabes AB gegeben an, dann befriedigt das Kräftesystem die Bedingungen des Gleichgewichtes. Folglich müssen wir haben



Figur 70.

$$\Sigma\left(m\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = X, \quad (1) \qquad \Sigma\left(m\frac{d^2 y}{dt^2} + g\right) = Y, \quad (2)$$

$$\Sigma\left\{m\left(\frac{d^2 y}{dt^2} + g\right)x - m\frac{d^2 x}{dt^2}y\right\} + Xa\sin\vartheta - Ya\cos\vartheta = 0. \quad (3)$$

Bezeichnet nun μ die Masse einer Längeneinheit des Stabes, dann ist $m = \mu\, ds$, auch haben wir $x = (a-s)\cos\vartheta$, $y = s\sin\vartheta$, daher

$$\Sigma\left(m\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = \mu\int_0^a (a-s)\,ds\frac{d^2}{dt^2}\cos\vartheta = \frac{1}{2}\mu a^2\frac{d^2}{dt^2}\cos\vartheta,$$

$$\Sigma\left(m\frac{d^2 y}{dt^2} + g\right) = \mu\int_0^a\left(s\,ds\frac{d^2}{dt^2}\sin\vartheta + g\,ds\right) = \mu\left(\frac{1}{2}a^2\frac{d^2}{dt^2}\sin\vartheta + ag\right),$$

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \mu\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\int_0^a s(a-s)\,ds = \frac{1}{6}\mu a^3\frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$

$$\Sigma(mgx) = \mu g\cos\vartheta\int_0^a (a-s)\,ds = \frac{1}{2}\mu g a^2\cos\vartheta.$$

Stellt noch M die Masse des ganzen Stabes AB dar, dann gehen mit den soeben gefundenen Werten die Gleichungen (1), (2), (3) über in

$$X = \frac{1}{2}Ma\frac{d^2}{dt^2}\cos\vartheta, \quad (4) \qquad Y = M\left(g + \frac{1}{2}a\frac{d^2}{dt^2}\sin\vartheta\right), \quad (5)$$

$$\frac{1}{6}Ma\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{1}{2}Mg\cos\vartheta + X\sin\vartheta - Y\cos\vartheta = 0. \quad (6)$$

Eliminieren wir zwischen den Gleichungen (4), (5), (6) die Grössen X, Y, dann gelangen wir zu

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{3g}{2a}\cos\vartheta, \quad (7)$$

und giebt die Integration dieser Relation, wenn α den Anfangswert von ϑ bedeutet,

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{a}(\sin\alpha - \sin\vartheta) = \omega^2, \tag{8}$$

dasjenige Resultat, welches die Winkelgeschwindigkeit von AB für irgend eine seiner Lagen bestimmt. Durch die Gleichungen (4), (5), (7), (8) bekommen wir noch die Reaktionen in den Stützpunkten B, A des Stabes, nämlich

$$X = \frac{3}{4} Mg\cos\vartheta\,(3\sin\vartheta - 2\sin\alpha)$$

$$Y = Mg\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}(2\sin\alpha\sin\vartheta + \sin^2\vartheta)\right\}.$$

Walton, p. 415.

5. Ein gleichförmiger, schwerer Stab OA besitzt die Freiheit in einer vertikalen Ebene um eine horizontale Axe durch den Endpunkt O zu schwingen, und fällt aus einer horizontalen Lage. Wie gross ist der Winkel zwischen der Richtung des Stabes und der Richtung des Druckes für eine beliebige Lage des Stabes?

Es seien OX, OY (Fig. 71) die Coordinatenaxen in der Oscillationsebene, OX horizontal, OY vertikal, die dritte Coordinatenaxe OZ ist dann senkrecht auf der Coordinatenebene XOY, sie fällt mit der Drehaxe zusammen. Ferner seien U, V die Componenten der Reaktion der Axe OZ auf den Stab in den Richtungen OX, OY, und es sei $\varrho =$ der konstanten Dichtigkeit des Stabes, $\varkappa =$ seiner Schnittfläche senkrecht zu seiner Länge, P ein beliebiger Punkt in OA, $PM \perp OX$, $PM = y$, $OM = x$, $OP = r$, $OA = a$, $\sphericalangle AOX = \vartheta$.

Figur 71.

Damit sind nach dem Prinzipe von D'Alembert die Reaktionen U, V, indem wir die Kräfte parallel zu den Axen OX, OY zerlegen,

$$U = -\int_0^a \left\{\varkappa\varrho\, dr \frac{d^2x}{dt^2}\right\} = -\varkappa\varrho\int_0^a \left\{dr\frac{d^2x}{dt^2}\right\}, \tag{1}$$

$$V = -\varkappa\varrho\int_0^a \left\{dr\left(\frac{d^2y}{dt^2} - g\right)\right\}. \tag{2}$$

und dadurch, dass wir Momente um die Axe OZ nehmen, wird

$$\int_0^a \varkappa\varrho g\, dr.x = \int_0^a \left\{\varkappa\varrho\, dr\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right\},$$

oder

$$g\int_0^a x\,dr = \int_0^a \left\{dr\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right\}. \tag{3}$$

Aber die Geometrie sagt uns, dass

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -r\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - r\sin\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -r\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Mit diesen Werten gehen die Gleichungen (1) und (2) über in

$$U = \varkappa\varrho\int_0^a r\,dr\left\{\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}a^2\varkappa\varrho\left\{\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right\}, \tag{4}$$

$$V = \varkappa\varrho a g + \frac{1}{2}a^2\varkappa\varrho\left\{\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right\}. \tag{5}$$

Ferner giebt die Gleichung (3), wenn wir daselbst für x und y die Werte in Ausdrücken von r und ϑ substituieren,

$$g\int_0^a \cos\vartheta\, r\,dr = \int_0^a r^2\,dr\frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$

und daher

$$\frac{1}{2}a^2 g\cos\vartheta = \frac{1}{3}a^3\frac{d^2\vartheta}{dt^2}, \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{3g}{2a}\cos\vartheta.$$

Indem wir nun hier mit $2\frac{d\vartheta}{dt}$ multiplizieren, integrieren und nicht vergessen, dass $\vartheta = 0$, wenn $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ ist, bekommen wir

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{a}\sin\vartheta.$$

Jetzt führen wir für $\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ in (4) und (5) die soeben erhaltenen Werte ein, womit sich ergiebt

$$U = \frac{3}{4}\varkappa\varrho a g\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad V = \frac{1}{4}\varkappa\varrho a g(10 - 9\cos^2\vartheta).$$

Diese zwei Gleichungen sagen uns, dass

$$U\cos\vartheta + V\sin\vartheta = \frac{5}{2}\varkappa\varrho a g\sin\vartheta, \qquad V\cos\vartheta - U\sin\vartheta = \frac{1}{4}\varkappa\varrho a g\cos\vartheta.$$

Aber $U\cos\vartheta + V\sin\vartheta$ und $V\cos\vartheta - U\sin\vartheta$ sind die Componenten der Reaktion der Axe OZ parallel und senkrecht zu OA, daher haben wir, wenn φ die Neigung der Richtung der resultierenden Reaktion zu der Linie OA bedeutet,

$$tg\,\varphi = \frac{V\cos\vartheta - U\sin\vartheta}{U\cos\vartheta + V\sin\vartheta} = \frac{1}{10}\cot g\,\vartheta, \qquad tg\,\vartheta\,.\,tg\,\varphi = \frac{1}{10}.$$

Walton, p. 416.

6. Eine Kette von homogener Beschaffenheit gleitet ohne Reibung auf zwei geneigten, sich in einer horizontalen Linie schneidenden Ebenen und bleibt dabei stets in einer zu dieser Schnittlinie senkrechten Ebene. Welches ist die Bewegung der Kette?

Es sei l die unveränderliche Länge der Kette, m die Masse ihrer Längeneinheit, x die Länge des Kettenstückes auf der ersten, x' diejenige des Kettenstückes auf der zweiten geneigten Ebene zu der Zeit t, α die Horizontalneigung der ersten, α' diejenige der zweiten Ebene.

Die gegebene geometrische Relation für die Kettenstücklängen ist

$$x + x' = l, \quad \text{womit} \quad \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta x'}{\delta t} = 0, \quad \frac{\delta^2 x}{\delta t^2} + \frac{\delta^2 x'}{\delta t^2} = 0. \tag{1}$$

Die Massen der beiden Teile der Kette sind mx, mx', ihre Gewichte mgx, mgx', die Componenten der letzteren in den Richtungen der schiefen Ebenen $mgx \sin\alpha$, $mgx' \sin\alpha'$, und die effektiven Kräfte $mx\frac{d^2 x}{dt^2}$, $mx'\frac{d^2 x'}{dt^2}$, so dass nach D'Alembert's Prinzip, wenn wir gleich den gemeinschaftlichen Faktor m weglassen,

$$g(x \sin\alpha\, \delta x + x' \sin\alpha'\, \delta x') = x\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + x'\frac{d^2 x'}{dt^2}\delta x'. \tag{2}$$

oder mit (1), weil $\delta x' = -\delta x$,

$$g(x \sin\alpha - x' \sin\alpha') = x\frac{d^2 x}{dt^2} - x'\frac{d^2 x'}{dt^2},$$

und weil ferner $x' = l - x$, $\frac{d^2 x'}{dt^2} = -\frac{d^2 x}{dt^2}$,

$$g\left\{x \sin\alpha - (l - x)\sin\alpha'\right\} = \left\{x + (l - x)\right\}\frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{g}{l}\left\{x \sin\alpha + (x - l)\sin\alpha'\right\},$$

oder

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{g}{l}(\sin\alpha + \sin\alpha')\left\{x - \frac{l \sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'}\right\}.$$

Schreiben wir hier zur Abkürzung $\frac{g}{l}(\sin\alpha + \sin\alpha') = a^2$, $x - \frac{l\sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'} = y$, also $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}$, so erscheint die einfache Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 y,$$

deren Integration giebt

$$y = A e^{at} + B e^{-at},$$

und wenn wir hier den Wert von y substituieren, so kommt

$$x = A e^{at} + B e^{-at} + \frac{l \sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'}.$$

Die Integrationskonstanten A und B bestimmen sich durch die Anfangswerte von x und $\frac{dx}{dt}$, welche, (wenn diese Werte mit x_0 und v_0 bezeichnet werden und anfangs $t = 0$ ist, sich aus den Relationen ergeben

$$x_0 = A + B + \frac{l \sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'}, \qquad v_0 = a(A - B).$$

Die beschleunigende Kraft wird gleich Null, wenn

$$x = \frac{l \sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'}, \quad \text{oder} \quad x' = \frac{l \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\alpha'}.$$

d. h. wenn $x : x' = \sin\alpha' : \sin\alpha$, folglich wenn die Längen x und x' sich umgekehrt wie die Sinuse der Neigungswinkel der Ebenen verhalten. Besitzt die Kette gleich anfangs eine solche Lage und wirkt nur die Schwerkraft, dann tritt keine Bewegung der Kette ein.

Duhamel, Cours de Mécanique. Deuxième Partie, p. 82.

7. Ein kleiner Körper hängt von einem festen Punkte mittelst eines gewichtslosen Fadens herab und wird von einem Kraftcentrum angezogen, dessen Entfernung im Vergleich zur Länge des Fadens sehr gross ist. Wenn die Zeit einer kleinen Schwingung proportional dem Abstande ist, um welchen der anziehende Punkt verrückt wird, zu bestimmen das Gesetz der anziehenden Kraft.

Die anziehende Kraft ändert sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung.

8. Eine unausdehnbare Kette von gleichförmiger Dichtigkeit bewegt sich auf zwei geneigten Ebenen, die Rücken an Rücken gestellt sind. Zu finden ihre Spannung in einem beliebigen Punkte, ihre grösste Spannung in dem gemeinschaftlichen Gipfel der Ebenen und zu bestimmen, ob letztere grösser oder kleiner als die Spannung in dem nämlichen Punkte, wenn Gleichgewicht ist.

Es bezeichne l die ganze Länge der Kette, m die Masse einer Einheit ihrer Länge, α, α' die Horizontalneigungen der Kettenstücke CP, CP'. Es sei $CP = r$, T = der Spannung in einem beliebigen Punkt E von CP, $CE = x$. Damit wird gefunden werden

$$T = \frac{mg}{l}(r - x)(l - r)(\sin\alpha + \sin\alpha'),$$

als grösste Spannung in dem gemeinschaftlichen Gipfel

$$\frac{1}{4} m g l (\sin\alpha + \sin\alpha')$$

eine kleinere Grösse, als wenn hier Gleichgewicht ist, es sei denn $\alpha = \alpha'$.

9. Eine enge, glatte, halbkreisförmige Röhre ist in einer vertikalen Ebene so befestigt, dass ihr Scheitel der höchste Punkt. Durch sie läuft ein schwerer, vollkommen biegsamer Faden und hängt in Ruhe. Der Faden wird an dem einen Ende der Röhre abgeschnitten. Wie gross ist die Geschwindigkeit, welche der längere Teil des Fadens erhalten haben wird, wenn er eben die Röhre verlässt.

Wenn a den Radius des Halbkreises, l die Länge des grösseren Fadenstückes bezeichnet, dann ist das Quadrat der verlangten Geschwindigkeit gleich

$$ag\left\{2\pi - \frac{a}{l}(\pi^2 - 4)\right\}.$$

10. Zwei materielle, durch einen starren unwägbaren Stab fest mit einander verbundene Punkte sind genötigt sich entlang zweier Rinnen OX, OY resp. zu bewegen, die erstere ist horizontal, die letztere vertikal. Die Punkte sind in irgend eine bestimmte Lage gebracht und das System falle unter der Wirkung der Schwerkraft. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit des Stabes in irgend einer Lage seines Fallens? Wie gross sind die Pressungen auf die Rinnen?

Es bezeichne ϑ die Horizontalneigung des Stabes zu einer beliebigen Zeit, ω die entsprechende Winkelgeschwindigkeit, α den Anfangswert von ϑ, l die Länge des Stabes. X, Y seien die Pressungen auf die Rinnen OY, OX, resp, m, m' die Massen der materiellen Punkte in der horizontalen und der vertikalen Rinne resp. Damit ergiebt sich

$$\omega = \sqrt{\frac{2m'g}{l}}\sqrt{\frac{\sin\alpha - \sin\vartheta}{m\sin^2\vartheta + m'\cos^2\vartheta}},$$

$$X = \frac{mm'g\cos\vartheta}{(m\sin^2\vartheta + m'\cos^2\vartheta)^2}\left\{\sin\vartheta\,(m\sin^2\vartheta + m'\cos^2\vartheta) - 2m'(\sin\alpha - \sin\vartheta)\right\},$$

$$Y = mg + \frac{mm'g\sin\vartheta}{(m\sin^2\vartheta + m'\cos^2\vartheta)^2}\left\{\sin\vartheta\,(m\sin^2\vartheta + m'\cos^2\vartheta) - 2m'(\sin\alpha - \sin\vartheta)\right\}.$$

7—10. Walton, p. 418—420.

Viertes Kapitel.

Dynamische Prinzipe.

Erste Abteilung.

Lebendige Kraft.

Der Ausdruck „Vis Viva", „lebendige Kraft" wurde zuerst von Leibnitz in die Sprache der Mechanik durch einen in den Acta Eruditorum für das Jahr 1695 veröffentlichten Aufsatz eingeführt, welcher den Titel trägt: „Specimen dynamicum pro admirandis naturae legibus circa corporum vires et mutuas actiones de tegendis et ad suas causas revocandis", wodurch der Verfasser beabsichtigte, die Kraft eines thatsächlich sich bewegenden Körpers zu bezeichnen, die auch „Vis Motrix" oder „bewegende Kraft" genannt wurde, zur Auszeichnung von dem statischen Drucke eines Körpers gegen ein festes Hindernis, welcher nur die Neigung hat, eine Bewegung hervorzurufen, und nannte er die statische Kraft eines Körpers „Vis Mortua" oder „tote Kraft". Leibnitz behauptete, der von den Cartesianern überlieferten Lehre widersprechend, dass das richtige Mass der „Vis Viva" oder „bewegenden Kraft" eines Körpers das Produkt aus seiner Masse und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit sei, dagegen war das von den Schülern des Descartes adoptierte Mass dasselbe wie dasjenige der Bewegungsgrösse, nämlich das Produkt aus der Masse und der ersten Potenz der Geschwindigkeit des Körpers. Diese Meinungsverschiedenheit in Beziehung auf die Schätzung der lebendigen Kraft gab zu einem der merkwürdigsten Streite in den philosophischen Annalen Veranlassung; beinahe alle Mathematiker Europas ordneten sich schliesslich als Partei-

gänger und schlossen sich entweder der Lehre von Descartes oder derjenigen von Leibnitz an. Unter den Anhängern von Leibnitz können genannt werden: Johann und Daniel Bernoulli, Poleni, Wolff, 'sGravesande, Camus, Muschenbroek, Papin, Hermann, Bulfinger, Koenig und eventuell Madame du Châtelet; während auf der anderen Seite namhaft zu machen sind: Maclaurin, Clarke, Stirling, Desaguliers, Catalan, Robins, Mairan und Voltaire. Die Vis Motrix oder — wie Leibnitz sich ausdrückte — die Vis Viva eines sich bewegenden Körpers wurde als eine dem Körper innewohnende Kraft angesehen, durch welche er im Stande ist, einen gewissen Betrag von Widerstand zu bewältigen, ehe er seine ganze Geschwindigkeit verliert. Die Frage reduziert sich also auf die Bestimmung eines geeigneten Masses für diesen Betrag von Widerstand, zu welchem die bewegende Kraft proportional gedacht wurde. Leibnitz betrachtete das Produkt aus der Masse des Körpers und seinem Wege, welchen er zurücklegen muss unter der Wirkung einer gegebenen verzögernden Kraft, um seine ganze Geschwindigkeit zu verlieren, als das richtige Mass des zur Zerstörung der Bewegung aufzuwendenden Widerstandes und daher als einen richtigen Vertreter der Vis Motrix oder Vis Viva des Körpers. Nun ist nach der Theorie der gleichförmig beschleunigten Bewegung $mv^2 = 2m\varphi s$, wenn m die Masse des Körpers und s seinen Weg bezeichnet, welchen er unter der Wirkung einer konstanten Verzögerung φ zurücklegen muss, um seine ganze Geschwindigkeit zu verlieren. Folglich ist es klar, dass nach der Lehre von Leibnitz mv^2 die lebendige Kraft des Körpers repräsentiert. Auf der anderen Seite schätzten die Cartesianer den ganzen zur Vernichtung der Geschwindigkeit des Körpers erforderlichen Widerstand durch das Produkt aus der Masse des Körpers und der ganzen Zeit der Wirkung der gegebenen verzögernden Kraft; daher würde aus der Formel $mv = m\varphi t$ folgen, dass mv das eigentliche Mass der Vis Motrix oder, in der Sprache von Leibnitz, der Vis Viva sei. Der denkwürdige Streit über die lebendige Kraft, welcher innerhalb eines Zeitraums von gegen dreissig Jahren gewütet hatte, wurde endlich durch leuchtende Bemerkungen von D'Alembert in der Vorrede zu seiner Dynamik zur Ruhe gebracht, welcher erklärte, dass der ganze Streit ein blosser Wortstreit sei und in keinem möglichen Zusammenhange mit den Fundamentalprinzipien der Mechanik stehe. Seit der Veröffentlichung von D'Alemberts Werk wird der Ausdruck „lebendige Kraft" nur gebraucht, um das algebraische Produkt aus der Masse eines sich bewegenden Körpers und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit zu bezeichnen, während die Worte „bewegende Kraft" allgemein in Gebrauch gekommen sind, entsprechend der von Newton in den Principia gegebenen Erklärung in der Bedeutung des Produktes aus der Masse eines sich bewegenden Körpers und seiner Beschleunigung, wobei keine physikalische Theorie in diesen Definitionen enthalten ist, was auch die absolute Beschaffenheit der Kraft sein mag. Zur weiteren Information bezüglich des Streites über die lebendige Kraft wird der Leser verwiesen auf: Montucula, Histoire des Mathématiques, Tome III; Huttons Mathematical Dictionary unter dem Worte „Force" und Whewells History of the Inductive Sciences.

Das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft ist in dem folgenden Satze enthalten: „Wenn ein System materieller Punkte, von welchen eine beliebige Anzahl starr mit einander verbunden sind, sich aus einer Lage in eine andere entweder mit oder ohne Zwang unter der Wirkung endlicher accelerierender äusserer oder innerer Kräfte bewegt, dann ist die Änderung der lebendigen Kraft des ganzen Systemes unabhängig von den Wirkungen der materiellen Punkte, die aus ihren gleichzeitigen Verbindungen entspringen, und ist gleich der Summe der Änderungen, welche hervorgebracht würden durch die lebendigen Kräfte der materiellen Punkte, wenn sich jeder derselben unverbunden aus seiner ursprünglichen in seine neue Lage durch eine dünne,

glatte, feste Röhre unter der Wirkung der nämlichen accelerierenden Kräfte bewegen würde, welchen er in dem wirklichen Bewegungszustande unterworfen ist."

Dieses Prinzip rüstet uns augenblicklich mit einem ersten Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung aus, was häufig von grossem Nutzen ist, besonders wenn die Coordinaten der Lage des sich bewegenden Systemes nur eine unabhängige Veränderliche enthalten, wie in dem Probleme des Schwingungsmittelpunktes, wenn das Prinzip für die vollständige Bestimmung der Bewegung genügend ist.

Das von Huyghens bei seinen Untersuchungen des Problemes des Schwingungsmittelpunktes zugrunde gelegte Prinzip besteht unter einer indirekten Gestalt aus einem besonderen Falle des Prinzipes der Erhaltung der lebendigen Kraft. (Horolog. Oscillator., p. 126.) Johann Bernoulli (Opera, passim.) war indessen der erste, welcher die Theorie der Erhaltung der lebendigen Kraft erläuterte, welchen Namen er dem Prinzipe als einem allgemeinen Naturgesetze gab, und von dem er dasjenige von Huyghens als einen besonderen Fall ableitete. Daniel Bernoulli dehnte später die Anwendung des Prinzipes auf die Bewegung von Körpern aus, welche gegenseitiger Attraktion unterworfen sind, oder durch feste Centren mit Kräften angezogen werden, die irgend welchen Funktionen ihrer Abstände von diesen Centren proportional sind. (Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1748.) D'Alembert gab zuerst eine Demonstration dieses Prinzipes in besonderen Fällen mittelst seines allgemeinen dynamischen Prinzipes und es war offenbar dieselbe Beweismethode von allgemeiner Anwendbarkeit. (Traité de Dynamique, Seconde Partie, chap. II, p. 252.)

Wenn m die Masse und v die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes eines Systemes bezeichnet, so wird $\Sigma(mv^2)$ von Leibnitz die lebendige Kraft des Systemes genannt, wogegen damit Young seine Energie bezeichnet. (Lectures on Natural Philosophy, 1807, Vol. I, p. 78, Vol. II, p. 52.) Rankine gab dem Ausdrucke $\frac{1}{2}\Sigma(mv^2)$ den Namen „wirkliche Energie", welcher auch die „mechanische Arbeit" genannt wird, um ihn zu unterscheiden von der „Potentialenergie," eine von ihm ersonnene Benennung, um den Betrag von Arbeit zu bezeichnen, welche die wechselseitigen Kräfte des Systemes während seines Überganges aus irgend einer anfänglichen Configuration zu der Configuration irgend eines folgenden Zeitabschnittes ist. (Edinburgh, New Philosophical Journal, 1855, Vol. II, p. 120.) Was Rankine „wirkliche Energie" genannt hat, ist von Thomson „dynamische Energie" (Edinburgh, New Philosophical Journal. 1855, Vol. I, p. 90), von Thomson und Tait „kinetische Energie" (Treatise on Natural Philosophy, Vol. I, p. 163) genannt worden. Was Rankine mit „Potentialenergie" bezeichnete, nannte Helmholtz (Berlin, 1847, übersetzt in Taylors Scientific Memoirs, Feb. 1853) die „Summe der Spannungen", Thomson „statische Energie". Die Ausdrücke „kinetische Energie" und „Potentialenergie" sind nun gewöhnlich adoptiert. Über den Gegenstand der Energie kann sich der Studierende weiter informieren durch Tyndall's Heat considered as a Mode of Motion; Balfour Stewart's Elementary Treatise on Heat; Maxwell's Theory of Heat, Tait's Thermodynamics.

Erster Abschnitt.

Mechanische Arbeit.

I. Das Produkt aus einer konstanten Kraft P und dem Wege s ihres Angriffspunktes in der Kraftrichtung wird die „Arbeit", „mechanische

Arbeit", „Leistung" der Kraft genannt, so dass, wenn L die Grösse dieser Leistung bezeichnet, die Fundamentalformel für die Arbeit einer Kraft ist

$$L = P s.$$

Denken wir uns die Kraft P während der Zurücklegung des Weges s veränderlich, bezeichnen mit M die Masse des durch diese Kraft bewegten Körpers, nennen φ seine Beschleunigung, v seine Geschwindigkeit, dann ist, weil jetzt $\int P\,ds$ der Ausdruck für die während des Durchlaufens des Weges s in der Kraftrichtung verrichtete Arbeit sein wird,

$$\frac{v\,dv}{ds} = \varphi = \frac{P}{M}, \quad \text{oder} \quad v\,dv = \frac{P}{M}\,ds,$$

$$\int P\,ds = M\int v\,dv = \frac{1}{2}Mv^2 + C.$$

Ist nun v_0 die Geschwindigkeit, welche der Körper in der Kraftrichtung schon zu Anfang der betrachteten Bewegung besitzt, dann haben wir für die Integrationskonstante $C = -\frac{1}{2}Mv_0$, und daher

$$\int P\,ds = \frac{1}{2}M(v^2 - v_0{}^2).$$

Ebenso ist, wenn durch einen veränderlichen Widerstand W, welcher auf die Länge des Weges w wirkt die Geschwindigkeit des bewegten Körpers von v auf v_0 herabsinkt, die Arbeit des Widerstandes

$$\int W\,dw = \frac{1}{2}M(v^2 - v_0{}^2) = \int P\,ds.$$

Mithin haben wir für die Arbeit einer Kraft die allgemeine Gleichung

$$L = \int P\,ds = \frac{1}{2}\,M(v^2 - v_0{}^2).$$

Der Ausdruck $M(v^2 - v_0{}^2)$ wird nun bekanntlich lebendige Kraft genannt, so dass die mechanische Arbeit eines Körpers gleich seiner halben lebendigen Kraft ist, wobei zu beachten, dass die Worte „lebendige Kraft" als blosse Bezeichnung dienen, denn Arbeit ist keine Kraft.

1. Welches ist die zum Aufziehen einer gemeinen Jalousie und eines Vorhanges aufzuwendende Arbeit?

Es bezeichne G das Gewicht eines jeden Stabes der Jalousie, a den Abstand zwischen den Axen je zweier aufeinander folgender Stäbe, n die Zahl der Stäbe. Damit ist die erforderliche Arbeit

$$L = G(a + 2a + 3a + \cdots + na), \qquad L = \frac{1}{2}n(n+1)\,G\,a.$$

Ist P die Summe der Gewichte der Stäbe und l die Höhe des Fensters, so erhalten wir, weil $P = nG$,

$$L = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) P l.$$

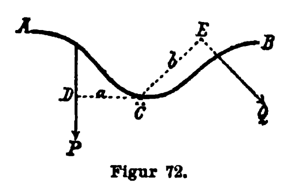
Mit $n = \infty$ wird die Jalousie mechanisch dasselbe wie ein Vorhang, die Anzahl der Stäbe ist hier unendlich gross und das Gewicht eines jeden Stabes unangebbar klein, so dass, wenn P das ganze Gewicht des Vorhanges und l seine Länge bezeichnet

$$L = \frac{1}{2} P l.$$

Bedenken wir, dass das Gewicht einer Länge dx des Vorhanges gleich $\frac{P}{l} dx$ ist, so erhalten wir auch eleganter für die zum Hochziehen desselben erforderliche Arbeit

$$L = \int_0^l \frac{P}{l} x\, dx = \frac{P}{l} \int_0^l x\, dx; \quad L = \frac{1}{2} P l.$$

Walton, p. 189.



Figur 72.

2. An einem beliebig gestalteten Hebel ABC, gelegen in einer Ebene und mit der Drehaxe durch C (Fig. 72), suchen zwei Kräfte P, Q, deren Richtungen in der Ebene des Hebels liegen, in entgegengesetzten Richtungen zu drehen. Wann sind die Kräfte im Gleichgewichte?

Die Kräfte P und Q sind sowohl dann im Gleichgewichte, wenn der Hebel in Ruhe ist, als auch dann, wenn er sich mit konstanter Geschwindigkeit um die Axe C dreht. Indem wir das Letztere annehmen, die Hebelarme CD, CE der beiden Kräfte mit a, b bezeichnen, den in der Zeit dt vom Punkte D in der Richtung DP zurückgelegten Weg ds, den in derselben Zeit von dem Punkte E in der Richtung EQ durchlaufenen Weg ds_1 nennen, ist $ds_1 = \frac{b}{a} ds$. Für den Gleichgewichtszustand muss nun sein

$P ds - Q ds_1 = 0$, oder $P ds - Q \frac{b}{a} ds = 0$, womit sich ergiebt

$$P a - Q b = 0.$$

Wenn mehrere Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ und $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ den Hebel in entgegengesetzten Richtungen zu drehen suchen, so haben wir offenbar für das rotatorische Gleichgewicht

$$\Sigma(P a) - \Sigma(Q b) = 0.$$

3. Welches ist die Arbeitsgrösse eines Körpers, die derselbe in sich aufnimmt, wenn er frei herabfällt?

Es sei r der Erdhalbmesser, h die Fallhöhe des Körpers von der Masse m, g seine Beschleunigung an der Erdoberfläche, x seine Fallhöhe nach einer beliebigen Zeit t, g' die entsprechende Beschleunigung. Damit sind die Gewichte des fallenden Körpers in den Abständen r und $r+h-x$ vom Erdmittelpunkte $G = mg$, und $G' = mg'$. Folglich haben wir nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze

$$g:g' = G:G' = \frac{1}{r^2}:\frac{1}{(r+h-x)^2}, \quad g' = g\frac{r^2}{(r+h-x)^2}, \quad G' = G\frac{r^2}{(r+h-x)^2}.$$

Die auf dem Wegelemente dx verrichtete Arbeit ist, da wir annehmen können, dass g' während dieses unendlich kleinen Weges konstant bleibt,

$$mg'\,dx = mgr^2\frac{dx}{(r+h-x)^2},$$

und daher die gesamte Arbeit der Schwere, während der Körper die endliche Strecke x durchfällt,

$$L = m\int_0^x g'\,dx = mgr^2\int_0^x \frac{dx}{(r+h-x)^2} = Gr^2\int_0^x \frac{dx}{(r+h-x)^2}.$$

Um die Integration ausführen zu können, setzen wir $r+h-x = z$, womit wir bekommen

$$\int_0^x \frac{dx}{(r+h-x)^2} = -\int_{r+h}^{r+h-x} z^{-2}dz = \frac{1}{r+h-x} - \frac{1}{r+h}.$$

Folglich ist

$$L = Gr^2\int_0^x \frac{dx}{(r+h-x)^2} = Gr^2\left(\frac{1}{r+h-x} - \frac{1}{r+h}\right).$$

Die Arbeit für den ganzen Fallraum h ist mithin, da dann in dem vorstehenden Resultate $x = h$ zu nehmen ist,

$$L = Gh\frac{r}{r+h}.$$

Wenn der Fallraum h im Vergleich zum Erdhalbmesser klein ist, kann in dem Nenner des Bruches h gegen r vernachlässigt werden, und bekommen wir dadurch für die gewöhnlichen Fälle

$$L = Gh = mgh.$$

Ist dagegen r gegen h verhältnismässig klein, wie dieses der Fall, wenn Meteorsteine nach der Erde sich bewegen, dann kann r gegen h im Nenner des Bruches vernachlässigt werden, und ist mithin die von einem solchen Meteoriten aufgenommene Arbeit

$$L = Gr = mgr,$$

welche er beim Aufschlagen auf die Erdoberfläche an die Erdmasse abgiebt. Es ist daraus ersichtlich, dass kein Körper durch die blose Wir-

kung der Schwerkraft eine grössere Arbeit in sich aufnehmen kann als diejenige, welche das Produkt aus seinem Gewichte und dem Erdradius ist, selbst wenn derselbe aus einer unendlichen Entfernung gegen die Erde fallen würde.

Verwandelt sich z. B. die Arbeit, welche ein Meteor beim Herabfallen an die Erde abgiebt, in Wärme, dann werden in diesem Falle $\frac{Gr}{424}$ Wärmeeinheiten entwickelt. Wäre nun $G = 1$ Kilogramm und setzen wir $r = 6375400$ Meter, so würden wir eine Wärmemenge von $\frac{6375400}{424} =$ 15036 Kalorien erhalten, d. h. so viel Wärme, welche 193 Kilogramm Eis schmelzen könnte. Würde die Masse des Meteors diese Wärmemenge allein aufnehmen und seine spezifische Wärme 0,2 sein (0,2 ist die spezifische Wärme der Steinmassen), dann würde seine Temperatur auf $\frac{15036}{0{,}2}$ $= 75180$ Centigrade steigen. Unter der Voraussetzung, dass die Erde durch die Verdichtung vieler, kleiner, im Weltraume zerstreuter Massen entstanden sei, lässt sich auf diesem Wege die hohe Temperatur erklären, in welcher sich die Erde nach dem Ballungsakte befunden haben muss.

Authenheimer, Elementarbuch für die Differentialrechnung & c.

4. Bestimmung der lebendigen Kraft eines homogenen Cylinders, welcher sich um seine Axe dreht.

Es bezeichne r den Halbmesser, a die Länge, v die Umfangsgeschwindigkeit, m die Masse der Volumeneinheit des Cylinders. Legen wir mit den Halbmessern x, $x + dx$ zwei zur Axe koncentrische Cylinderflächen in den Cylinder, so schliessen dieselben eine Schichte von der Dicke dx, der Länge a und dem Umfange $2\pi x$ ein, deren Volumen $2\pi x a dx$ und deren Masse $2\pi a m x dx$ ist. Alle Elemente dieser Schichte haben gleiche Rotationsgeschwindigkeit v', für welche die Relation besteht $v' : v = x : r$, so dass $v' = \frac{vx}{r}$ ist. Daher ist die lebendige Kraft einer solchen Schichte $2\pi a m x dx v'^2 = 2\pi a m x dx \frac{v^2 x^2}{r^2}$, und mithin die ganze lebendige Kraft des Cylinders

$$\frac{2\pi a m v^2}{r^2}\int_0^r x^3\,dx = \frac{1}{2}\pi a m r^2 v^2 = \frac{1}{2}Mv^2,$$

wenn M die ganze Masse des Cylinders bezeichnet.

Die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um dem Cylinder die Rotationsgeschwindigkeit v zu erteilen, ist die Hälfte dieser lebendigen Kraft, mithin

$$L = \frac{1}{4} M v^2.$$

Um dem Cylinder eine Translationsgeschwindigkeit v beizubringen, haben wir die mechanische Arbeit $\frac{1}{2} M v^2$ nötig, folglich ist zur Erzeugung einer fortschreitenden Bewegung doppelt so viel Arbeit nötig, als zur Hervorbringung einer Rotationsbewegung mit der gleichen Geschwindigkeit am Umfange des Cylinders.

5. Welches ist die auf die Drehung einer homogenen Kugel um einen ihrer Diameter als Drehaxe zu verwendende Arbeit?

Es sei r der Halbmesser, v die Geschwindigkeit des Äquators und m die Masse der Volumeneinheit der Kugel. Legen wir längs der Drehaxe einen ebenen Schnitt durch die Kugel, nehmen die Rotationsaxe als Axe der x, ihren Mittelpunkt als Ursprung der Coordinaten, so ist die Gleichung des Schnittkreises $x^2 + y^2 = r^2$. Beschreiben wir ferner mit den Halbmessern y, $y + dy$ zwei zur Axe koncentrische Cylinderflächen im Inneren der Kugel, so schliessen dieselben ein Körperelement von der Dicke dy und der Länge $2x$ ein; der Inhalt dieses Elementes ist $2\pi y dy . 2x$, seine Masse $4 m \pi y x dy$. Bezeichnet v' die Geschwindigkeit dieser Cylinderschichte, dann ist $v' = v \frac{y}{r}$ und die auf das Massenelement zu verwendende Arbeit $4 m \pi y x d y \frac{v_1^2}{2} = \frac{2 m \pi v^2}{r^2} x y^3 d x$. Aber es ist $y d y = - x d x$, also auch $x y^3 d x = - (r^2 - x^2) x^2 d x$, folglich das Arbeitselement $= - \frac{2 \pi m v^2}{r^2} (r^2 x^2 - x^4) d x$. Daher erhalten wir für die aufzuwendende Arbeit

$$L = - \frac{2 \pi m v^2}{r^2} \int_r^0 (r^2 x^2 - x^4) d x; \qquad L = \frac{4}{15} \pi m r^3 v^2 = \frac{1}{5} M v^2,$$

wenn M die ganze Masse der Kugel bedeutet.

Die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um der Kugel die translatorische Geschwindigkeit v zu erteilen, ist $L' = \frac{1}{2} M v^2$, so dass $L' : L = \frac{5}{2}$, d. h. die letztere Arbeit ist $\frac{5}{2}$ mal grösser als die für die Rotation erforderliche.

Die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Erde ist etwa 64 mal grösser als ihre Rotationsgeschwindigkeit unter dem Äquator. Hätte nun die Erde überall gleiche Dichtigkeit, so würde der Translation $\frac{5}{2} \times 64^2 = 10240$ mal mehr lebendige Kraft entsprechen als der Rotation.

6. Ein elastischer Faden von der natürlichen Länge l wird gedehnt von der Länge r bis zur Länge r'. Welches ist die erforderliche Arbeit?

Bezeichnet P die streckende Kraft, $\varkappa$ den Querschnitt, λ den Elastizitätsmodulus des Materiales des Fadens, x die Zunahme der Länge desselben, dann ist nach der Erfahrung $P = \lambda \frac{\varkappa}{l} x$. Erleidet nun die Kraft P eine Änderung dP, dann erfährt auch der Faden eine Längenänderung dx, und ist daher $P + dP = \lambda \frac{\varkappa}{l}(x + dx)$. Die Arbeit dieser Kraft auf dem unendlich kleinen Wege dx ist

$$(P + dP)\,dx = \lambda \frac{\varkappa}{l}(x + dx)\,dx,$$

oder, wenn wir die unendlich kleinen Grössen der zweiten Ordnung vernachlässigen,

$$P\,dx = \lambda \frac{\varkappa}{l}\,x\,dx.$$

Mithin ist die durch die spannende Kraft hervorgebrachte Arbeit

$$L = \int P\,dx = \lambda \frac{\varkappa}{l} \int_r^{r'} x\,dx, \qquad L = \lambda \frac{\varkappa}{2l}(r'^2 - r^2).$$

Wird der Faden von seiner natürlichen Länge ab um eine Strecke a gedehnt, welche Längenänderung der Grenze der Elastizität entsprechen mag, dann ist die zu dieser Längenänderung erforderliche Arbeit offenbar

$$L' = \lambda \frac{\varkappa}{l} \int_0^a x\,dx = \lambda \frac{\varkappa a^2}{2l}.$$

Bezeichnet nun p die Kraft, welche der Längenänderung a entspricht, so ist offenbar $p = \lambda \frac{\varkappa a}{l}$, folglich $a = \frac{pl}{\lambda \varkappa}$, mithin

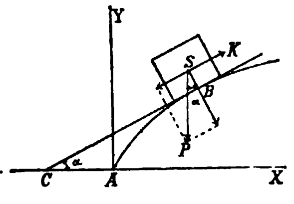
$$L' = \frac{1}{2} p a = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{p}{\varkappa}\right)^2}{\lambda} \varkappa l.$$

Es ist aber $\frac{p}{\varkappa}$ die Kraft, welche einen Faden von dem Querschnitte Eins um die Länge a ausdehnt, $\varkappa l$ sein Volumen. Folglich ist die Arbeit dem Quadrate dieser Kraft und dem Volumen des Fadens proportional.

Dasselbe gilt auch von der Ausdehnung eines prismatischen Stabes.

7. Welches ist die zum Hinaufziehen eines Körpers über eine beliebige Cylinderfläche mit horizontaler Generatrix erforderliche Arbeit?

Der Körper bewege sich ohne Rotation längs der in einer vertikalen zur Cylinderaxe senkrechten Ebene liegenden stetig gekrümmten Curve AB auf der Oberfläche des Cylinders (Fig. 73). Durch A legen wir in dieser Ebene die rechtwinkeligen Coordinatenaxen AX und AY horizontal und vertikal, so dass x, y die Coordinaten des Punktes B sind, in welchem der Körper die Curve berührt und in welchem der Druck auf die Fläche koncentriert gedacht werden kann. Nun sei P das konstante Gewicht des Körpers, welches in seinem Schwerpunkte wirksam gedacht ist, μ der Reibungscoëfficient, α die Neigung der Tangente im Punkte B der Bahn zu AX. Zerlegen wir die Kraft P in die Componenten $P\sin\alpha$ und $P\cos\alpha$ parallel und senkrecht zu der Tangente BC und bezeichnen mit K die Kraft, welche den Körper in der Richtung CB hinaufzuziehen hat, so muss offenbar sein



Figur 73.

$$K = P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Bewegt sich nun der Körper längs des Bogenelementes ds, dann ist die dazu erforderliche Kraft

$$K + dK = P\left\{\sin(\alpha - d\alpha) + \mu\cos(\alpha - d\alpha)\right\},$$

und die auf dem Wege ds zu leistende Arbeit

$$(K + dK)\,ds = P\left\{\sin(\alpha - d\alpha) + \mu\cos(\alpha - d\alpha)\right\}ds,$$

oder, indem wir die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung als der ersten vernachlässigen,

$$K\,ds = P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,ds.$$

Weil aber $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$, $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, so ist auch

$$K\,ds = P(dy + \mu\,dx).$$

In dem Ausdrucke auf der rechten Seite der Gleichung sind P und μ konstant, y ist eine Funktion von x; integrieren wir daher zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x$, so erhalten wir die Arbeit, welche zur Fortbewegung des Körpers längs des Weges AB erforderlich ist, nämlich

$$L = \int_0^s K\,ds = Py + \mu Px, \qquad L = Ks = P(y + \mu x).$$

Die gesamte Arbeit besteht sonach aus zwei Teilen, die Arbeit Py ist erforderlich, um den Körper längs der Vertikalprojektion der Bahn fortzuschaffen, d. i. um denselben auf die Höhe y frei zu heben, die Arbeit

$\mu P x$ ist nötig, um den Körper längs der Horizontalprojektion x des Weges AB fortzubewegen.

Ist z. B. der Cylinder ein Kreiscylinder, also der Bogen AB ein Kreisbogen vom Halbmesser r und die Gleichung der Bahn $y = \sqrt{2rx - x^2}$, dann erhalten wir

$$L = P(\sqrt{2rx - x^2} + \mu x),$$

und wenn die Fortbewegung bis zu seinem höchsten Punkte erfolgen soll, da dann $x = r$ ist,

$$L = Pr(1 + \mu).$$

Handelt es sich um eine schiefe Ebene von der Horizontalneigung α, der Länge l, der Basis a, der Höhe h, dann haben wir für die Arbeit zum Hinaufziehen des Körpers

$$L = Pl(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = P(h + \mu a).$$

8. Welche Arbeit muss auf die Drehung einer rechtwinkeligen Fläche in einem Medium verwendet werden?

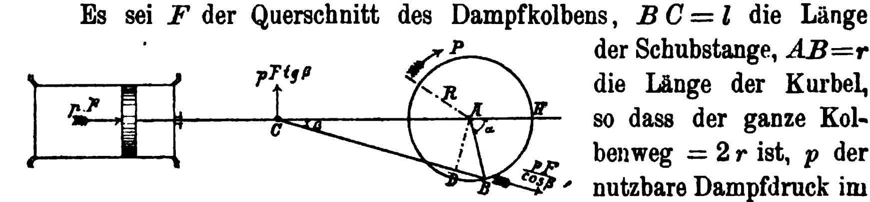
Versuche haben ergeben, dass der Widerstand, welchen Luft, Wasser u. s. w. der Bewegung entgegensetzt, proportional der Fläche ist, welche normal zur Richtung der Bewegung gegen das Medium stösst, und sehr nahe proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit der Bewegung. Es bezeichne a die Kante, um welche sich das Rechteck dreht, b die darauf senkrechte Rechtecksseite. v die Geschwindigkeit der zur Rotationsaxe parallelen Kante, p den Widerstand, welchen das Mittel einer mit einer Geschwindigkeit Eins sich bewegenden Flächeneinheit entgegensetzt. Legen wir in der Rechtecksfläche zwei zu der Axe parallele Gerade in den Abständen x und $x + dx$ von derselben, dann schliessen diese ein Flächenelement $a\,dx$ ein. Dreht sich dieses Element mit der Geschwindigkeit v', so ist $v' : v = x : b$, oder $v' = \frac{v}{b} x$. Würde sich die Fläche $a\,dx$ mit der Geschwindigkeit $= 1$ bewegen, dann würde auf sie der Widerstand $p\,a\,dx$ wirken, folglich ist der Widerstand gegen diese Fläche bei der Geschwindigkeit v' gleich $\frac{pav^2}{b^2} x^2\,dx$. Der Angriffspunkt dieser Kraft legt in der Zeiteinheit den Weg v' in der Richtung von v' zurück, daher ist die auf das Flächenelement $a\,dx$ zu verwendende Arbeit $\frac{pav^3}{b^3} \cdot x^3\,dx$ und mithin die auf die Drehung der ganzen Rechtecksfläche zu verwendende Arbeit

$$L = \frac{pav^3}{b^3} \int_0^b x^3\,dx = \frac{1}{4} p\,a\,b\,v^3.$$

Diese Arbeit ist somit proportional der dritten Potenz der Rotationsgeschwindigkeit der zur Drehaxe parallelen Rechtecksseite. Würde sich das Rechteck mit der Translationsgeschwindigkeit v bewegen, dann würde die dazu aufgewendete Arbeit sein $L' = p\,a\,b\,v^3$, so dass für die Rotation nur der vierte Teil dieser Arbeit erforderlich ist.

9. Übertragung der Bewegung von dem Dampfkolben einer ohne Expansion arbeitenden Hochdruckdampfmaschine auf die Kurbel AB der Triebwelle A (Fig. 74).

Es sei F der Querschnitt des Dampfkolbens, $BC = l$ die Länge der Schubstange, $AB = r$ die Länge der Kurbel, so dass der ganze Kolbenweg $= 2r$ ist, p der nutzbare Dampfdruck im Cylinder pro Einheit der Kolbenfläche, so dass die bewegende Kraft $= p.F$ ist, $P.R$ das Moment der an der Triebwelle Widerstand leistenden Kraft, wodurch die Nutzarbeit und sämtliche passiven Widerstände repräsentiert sind; dabei denken wir uns P als einen konstanten Widerstand, dessen Hebelarm bezüglich der Axe A der Triebwelle gleich R ist.


Figur 74.

Soll die Maschine in periodisch gleichförmiger Bewegung sein, dann müssen die mechanischen Arbeiten der bewegenden Kraft $p.F$ während eines Auf- und Niederganges des Kolbens und der widerstehenden Kraft P während einer Umdrehung der Triebwelle einander gleich sein, so dass also $L = 2pF.2r = 2R\pi P$, oder $P.R = 0{\cdot}637\,p\,r\,F$. (1)
Bezeichnen wir für eine beliebige Stellung der Kurbel $\measuredangle BAH$ mit α, $\measuredangle ACB$ mit β, zerlegen den Kolbendruck $p.F$ in den Richtungen senkrecht zur Kolbenstange und parallel zur Schubstange, so sind diese Componenten $p.F tg\,\beta$ und $\frac{p.F}{\cos\beta}$. Die erstere giebt den Druck auf die Geradführung, welcher einen gewissen Reibungswiderstand erzeugt, den wir aber hier vernachlässigen wollen, die zweite wird ohne Weiteres auf den Kurbelzapfen übertragen und ist ihr Hebelarm AD in Bezug auf die Drehaxe A durch die beiden Gleichungen bestimmt

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha, \qquad \text{und} \qquad AD = r\sin(\alpha - \beta),$$

womit wir finden

$$AD = r\sin\alpha\left(\cos\beta - \frac{r}{l}\cos\alpha\right).$$

Demnach ist das Moment der bewegenden Kraft in Bezug auf die Drehaxe A in dem betrachteten Augenblicke der Bewegung gleich

$$\frac{p.F}{\cos\beta}\cdot A\,D = r\,p.F\sin\alpha\left(1-\frac{r\cos\alpha}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}}\right).$$

Da sich während eines Kolbenspieles der Winkel α ändert, so ist auch während dieser Zeit dieses Moment veränderlich, es kann demnach nicht in jedem unendlich kleinen Zeitelemente dt zwischen dem veränderlichen Momente der bewegenden Kraft und dem konstanten Momente $P.R$ der widerstehenden Kraft Gleichgewicht stattfinden, so dass die Bewegung keine vollständig gleichförmige, sondern nur eine periodisch gleichförmige sein kann, indem die Geschwindigkeit abwechselnd zu- und abnimmt und nach einer vollen Umdrehung der Triebwelle wieder den früheren Wert annimmt.

Dreht sich die Triebwelle während des Zeitelementes dt um den unendlich kleinen Winkel $d\alpha$, dann verrichtet die bewegende Kraft die Arbeit

$$r\,p.F\sin\alpha\left(1-\frac{r\cos\alpha}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}}\right)d\alpha,$$

und die Arbeit des Widerstandes ist gleichzeitig

$$P.R\,d\alpha = 0{,}637\,p\,r\,F\,d\alpha,$$

womit der Unterschied dieser in der Zeit dt verrichteten Arbeiten ist

$$d\,L_1 = p\,r\,F\,d\,\alpha\left\{0{\cdot}637-\sin\alpha+\frac{r\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}}\right\}. \qquad (2)$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$L_1 = p\,r\,F\int\left\{0{\cdot}637\,d\alpha + d(\cos\alpha) + \frac{\sin\alpha\,d(\sin\alpha)}{\sqrt{\left(\frac{l}{r}\right)^2-\sin^2\alpha}}\right\},$$

$$L_1 = p\,r\,F\left\{0{\cdot}637\,\alpha+\cos\alpha-\sqrt{\left(\frac{l}{r}\right)^2-\sin^2\alpha}\right\}+C.$$

Handelt es sich nun darum, die gesamte mechanische Arbeit L' zu bestimmen, die auf eine Verminderung der Geschwindigkeit der Bewegung hinwirkt, dann haben wir zwischen den Grenzen $+\alpha'$ und 0 zu integrieren und das Resultat mit 2 zu vervielfachen, weil zu beiden Seiten der Linie CH die Bewegung des Systemes offenbar symmetrisch ist, wobei α' den Winkel bezeichnet, für welchen die Differenz der mechanischen Arbeiten $dL_1 = 0$ ist. Für diesen Winkel α' haben wir vermöge der Gleichung (2) die Relation

$$0 = 0{\cdot}637 - \sin\alpha' + \frac{\sin\alpha'\cos\alpha'}{\sqrt{\left(\frac{l}{r}\right)^2 - \sin^2\alpha'}}, \tag{3}$$

womit sich der Winkel α' finden lässt. Gewöhnlich ist bei Dampfmaschinen $l = 5r$, wofür sich aus (3) entweder durch Probieren, oder durch Anwendung des Taylor'schen Satzes findet $\sin\alpha' = 0{\cdot}74$, so dass $\sphericalangle\alpha' = 47^0\,44'$ und der entsprechende Bogen vom Halbmesser 1: Bogen $\alpha' = \frac{47{\cdot}733}{180}\cdot 3{\cdot}14 = 0{\cdot}833$ ist.

Mithin ist die Arbeit L', welche auf die Verminderung der Geschwindigkeit hinwirkt,

$$L' = 2prF(0{\cdot}637\,.\,0{\cdot}833 + \cos 47^0\,44' - \sqrt{5^2 - 0{\cdot}74^2} - 1 + 5),$$
$$L' = 0{\cdot}516\,prF = 0{\cdot}129\,L.$$

Tellkampf, Grundzüge der höheren Mathematik, p. 108.

Denken wir uns den Kolbendruck pF in den Kurbelzapfen parallel mit sich selbst verlegt, macht die Kurbel mit seiner Richtung zu einer beliebigen Zeit t den Winkel φ und zerlegen wir den Kolbendruck daselbst in zwei Seitenkräfte parallel und senkrecht zur Kurbelaxe, so sind dieselben $pF\sin\varphi$ und $pF\cos\varphi$, wovon die erstere in tangentialer Richtung zum Kurbelkreise, die letztere gegen die Kurbelwelle A wirkt und nur die erstere Bewegung erzeugt. Geht der Winkel φ in $\varphi + d\varphi$ über, dann rückt der Kurbelzapfen um $r\,d\varphi$ vor und wird die drehende Kraft $P'\sin(\varphi + d\varphi)$. Die Arbeit dieser Kraft längs des Weges $r\,d\varphi$ ist gleich $P'r\sin(\varphi + d\varphi)\,d\varphi = P'r(\sin\varphi\cos d\varphi + \cos\varphi\sin d\varphi)\,d\varphi = P'r\sin\varphi\,d\varphi$, indem $\cos d\varphi = 1$, $\sin d\varphi = 0$ gesetzt werden kann, und sonach die Arbeit der tangentialen Seitenkraft während eines Kolbenganges

$$L = P'r\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi = pFr\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi = 2P'r = 2pFr.$$

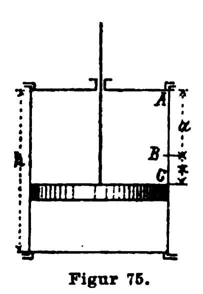
Da diese Arbeit gleich dem Drucke auf den Kolben, multipliziert mit seinem Wege $2r$, so sehen wir, dass durch die Kurbelbewegung keine Arbeit verloren geht, abgesehen von den vorkommenden Reibungswiderständen. Bezeichnet P den mittleren Druck auf den Kurbelzapfen in der Richtung der Tangente an den Kurbelkreis, so ist seine Arbeit während eines Kolbenganges $Pr\pi$ und da diese auch gleich $2P'r$ sein muss, erhalten wir für diesen Druck die Relation

$$Pr\pi = 2P'r, \qquad \text{woraus} \qquad P = 0{\cdot}637\,P' = 0{\cdot}637\,pF$$

folgt.

10. Bestimmung der Arbeit des Dampfes bei einer Expansionsmaschine.

Bei dieser Maschine wirkt der ganze Dampfdruck nur auf einem Teile des Kolbenweges; nachdem der Kolben in dem Cylinder unter dem Einströmen des Dampfes einen gewissen Weg $AB = a$ zurückgelegt hat (Fig. 75, S. 219), wird der Dampfzufluss plötzlich abgesperrt und der Kolben bewegt sich auf dem übrigen Teile seines ganzen Schubes unter der Wirkung des expandierenden Dampfes weiter. Das Verhältnis zwischen dem



Figur 75.

einströmenden Dampfvolumen und dem ganzen Volumen des Cylinders, d. i. zwischen a und der Hubhöhe h, wird gewöhnlich der Füllungsgrad genannt und ist gleich $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$ so dass allgemein $\frac{a}{h} = \frac{1}{n}$ gesetzt werden kann. Bezeichnet p den Druck des einströmenden Dampfes pro Flächeneinheit des Kolbens vom Querschnitte F, so ist der Dampfdruck auf dem Wege $AB = a$, $P = pF$, p' den Druck pro Flächeneinheit, nachdem der Kolben den Weg $BC = x$ zurückgelegt hat, dann ist der Gesamtdruck $P' = p'F$. Annähernd können wir setzen

$$\frac{p'}{p} = \frac{\text{Volumen von } A \text{ bis } B}{\text{Volumen von } A \text{ bis } C} = \frac{a}{a+x},$$

so dass

$$p' = p\frac{a}{a+x}$$

wird. Bewegt sich nun der Kolben um den unendlich kleinen Weg dx, dann geht der Dampfdruck P' in den Druck $P' + dP'$ über, so dass die Arbeit des Dampfes auf diesem Wege sein wird

$$(P' + dP')\,dx = P'dx = aP\frac{dx}{a+x} = apF\frac{dx}{a+x}.$$

Mithin ist die Arbeit während der ganzen Periode der Expansion

$$L_1 = apF\int_0^{h-a}\frac{dx}{a-x} = apF.l\left(\frac{h}{a}\right).$$

Die Arbeit des Dampfes auf dem Wege a des Kolbens ist

$$L_2 = a.P = apF.$$

Daher ist die Arbeit des Dampfes während eines ganzen Kolbenschubes

$$L = L_2 + L_1 = apF + apF.l\left(\frac{h}{a}\right) = apF\left\{1 + l\left(\frac{h}{a}\right)\right\}.$$

$$L = apF\left\{1 + l(n)\right\} = apF\left\{1 + 2{\cdot}302585\, log\, n\right\}.$$

mit $a = \frac{1}{n}h$.

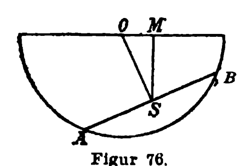
Wollten wir hieran dieselbe Betrachtung knüpfen, welche wir bei der vorhergehenden Aufgabe gemacht haben, dann kann die Rechnung nicht in derselben Weise wie vorhin geführt werden, indem die Integration zu verwickelt wird, sondern wir haben dann zu graphischen Darstellungen unsere Zuflucht zu nehmen, indem wir bestimmte Werte des Winkels α oder vielmehr seines Bogens vom Halbmesser 1 als Abscissen und die entsprechenden Werte der Momente der bewegenden und der widerstehenden Kraft als Ordinaten abtragen. Dadurch erhalten wir eine Curve, welche den ersteren und eine gerade Linie, die den letzteren Momenten entspricht. Die zwischen dieser

Curve und der geraden Linie eingeschlossenen Flächenräume repräsentieren die mechanischen Arbeiten, die abwechselnd zur Beschleunigung und zur Verzögerung der periodisch gleichförmigen Bewegung der Maschine verwendet werden. Übrigens gehören die weiteren Untersuchungen dieses Gegenstandes in das Gebiet der angewandten Mechanik

Zweiter Abschnitt.

Das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

1. Ein homogener Stab AB konstanten Querschnittes (Fig. 76) bewegt sich innerhalb einer Halbkugel in einer vertikalen Ebene. Welches ist seine Winkelgeschwindigkeit für irgend eine seiner Lagen, wenn seine Anfangslage eine augenblickliche Ruhelage war?



Figur 76.

Es sei O der Mittelpunkt der Kugel, S der Schwerpunkt und Mittelpunkt von AB, SM eine Senkrechte von S auf den in der Ebene der Bewegung liegenden horizontalen Durchmesser der Kugel, OS die Verbindungslinie der Punkte O und S, $OS = c$, $AS = a = BS$, $OM = x$, $SM = y$, $k =$ dem Trägheitsradius von AB um S, $\vartheta =$ dem Neigungswinkel von AB zu dem Horizonte am Ende der Zeit t, $m =$ der Masse des Stabes.

Durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft haben wir die Gleichung

$$m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + k^2\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right) = C + 2mgy.$$

Bezeichnet h den Anfangswert von y, dann ist, weil $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}$ anfangs gleich Null sind, $C = -2mgh$, folglich

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2g(y-h).$$

Weil nun auch die geometrischen Relationen bestehen

$$x = c \sin\vartheta, \qquad y = c\cos\vartheta,$$

so erhalten wir $\frac{dx}{dt} = c\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = -c\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt},$

mit welchen Werten unsere Hauptgleichung übergeht in

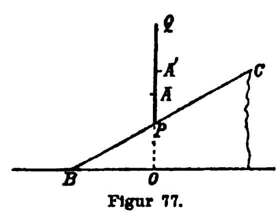
$$c^2\cos^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + c^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2g(c\cos\vartheta - c\cos\alpha),$$

$$(c^2+k^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2cg(\cos\vartheta - \cos\alpha),$$

wo α der Anfangswert von ϑ ist. Setzen wir nun noch $k^2 = \frac{1}{3} a^2$, so ist die Winkelgeschwindigkeit des Stabes für irgend eine seiner Lagen durch die Gleichung bestimmt

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{6cg}{3c^2 + a^2}(\cos\vartheta - \cos\alpha).$$

2. Ein Stab PQ wird in einer vertikalen Lage mittelst zweier kleiner Ringe A, A' (Fig. 77) gehalten, sein tieferes Ende P wird von einer geneigten Ebene BC unterstützt, welche sich frei auf einer horizontalen Ebene bewegen kann. Wie ist die Bewegung des Stabes und diejenige der Ebene beschaffen?



Figur 77.

Die Verlängerung des Stabes schneide die horizontale Ebene in O. Zu einer beliebigen Zeit t der Bewegung sei $OP = y$, $OB = x$. Ferner bezeichne h den Anfangswert von y, α die Neigung der schiefen Ebene zu der Vertikalen, m die Masse des Stabes, m' diejenige der geneigten Ebene. Da der Stab keine rotierende Bewegung besitzen kann, ist hier

$$m'\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = C - 2mgy.$$

Nehmen wir an, dass beim Beginne der Bewegung der Stab in einem Zustande augenblicklicher Ruhe sich befindet, so ist $C = 2mgh$, folglich

$$m'\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2mg(h-y).$$

Ferner haben wir die geometrische Beziehung

$$x = y\, tg\,\alpha, \qquad \text{also auch} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} tg\,\alpha,$$

und ist mithin

$$(m' tg^2\alpha + m)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2mg(h-y); \quad \sqrt{m' tg^2\alpha + m}\,\frac{dy}{\sqrt{h-y}} = -\sqrt{2mg}\,dt.$$

Hier ist das negative Zeichen vor der Wurzel zu nehmen, weil y mit wachsendem t abnimmt. Die Integration dieser Gleichung giebt

$$2\sqrt{(m' tg^2\alpha + m)(h-y)} = C + \sqrt{2mg}\,.\,t,$$

weil aber $y = h$, wenn $t = 0$, so ist $C = 0$, demnach

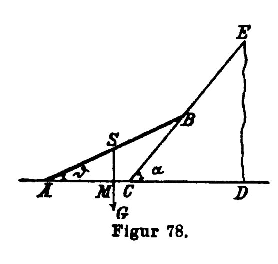
$$2(m' tg^2\alpha + m)(h-y) = mgt^2.$$

Daher ist in einem beliebigen Momente der Bewegung

$$y = h - \frac{mgt^2}{2(m + m' tg^2\alpha)}, \quad x = h\, tg\,\alpha - \frac{mgt^2}{2(m + m' tg^2\alpha)} tg\,\alpha,$$

womit die Bewegung des Stabes und diejenige der geneigten Ebene bestimmt ist.

3. AB ist ein gleichförmiger Stab, welcher sich frei um ein Charnier A bewegen kann, das Ende B ruht auf einer geneigten Ebene CE (Fig. 78), die von der oberen Fläche des Körpers CED gebildet wird; dieser Körper stützt sich mit seiner flachen Basis auf eine glatte, durch A gehende horizontale Ebene. Die vertikale Ebene durch den Stab schneidet die geneigte Fläche des Körpers CED rechtwinkelig und geht durch dessen Schwerpunkt. Welches ist die Bewegung des Stabes und diejenige des Körpers?



Figur 78.

Es sei S der Schwerpunkt von AB, $SM \perp$ zu der Horizontalen AD, m die Masse des Stabes, m' diejenige des Körpers, $AB = 2a$, $AM = x$, $MS = y$, $\sphericalangle BAC = \vartheta$, $\sphericalangle ECD = \alpha$, $AC = x'$, $k =$ dem Schwingungshalbmesser von AB um S.

Damit erhalten wir durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + k^2\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right) + m'\frac{dx'^2}{dt^2} = C - 2mgy. \tag{1}$$

Ferner ist

$$x = a\cos\vartheta, \qquad y = a\sin\vartheta, \qquad x' = \frac{2a}{\sin\alpha}\sin(\alpha - \vartheta). \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) geben uns nun die Relation

$$\left\{m(a^2 + k^2)\sin^2\alpha + 4m'a^2\cos^2(\alpha - \vartheta)\right\}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \sin^2\alpha\,(C - 2mga\sin\vartheta).$$

Ist β der Wert von ϑ, wenn $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, dann haben wir für die Konstante

$$0 = \sin^2\alpha\,(C - 2mga\sin\beta),$$

und bekommen daher

$$\left\{m(a^2 + k^2)\sin^2\alpha + 4m'a^2\cos^2(\alpha - \vartheta)\right\}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2mag\sin^2\alpha\,(\sin\beta - \sin\vartheta),$$

womit die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ des Stabes für jeden gegebenen Wert von ϑ bestimmt ist.

Bezeichnet ω diese Winkelgeschwindigkeit, so ist vermöge der Gleichungen (2) für die translatorische Bewegung des Schwerpunktes des Stabes

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a\sin\vartheta\,.\,\omega, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = a\cos\vartheta\,.\,\omega,$$

und für die Geschwindigkeit des Körpers CDE

$$v_x' = \frac{dx'}{dt} = \frac{2a}{\sin\alpha}\cos(\alpha - \vartheta)\,.\,\omega,$$

so dass die Bewegung beider Körper vollständig bestimmt ist.

4. Ein gleichförmiger Hebel ACB (Fig. 79), dessen Arme AC, BC in einer vertikalen Ebene liegen und rechtwinkelig zu einander sind, ist im Gleichgewichte, wenn AC unter einem gegebenen Winkel zum Horizonte geneigt ist. Wenn AC um den festen Punkt C in eine horizontale Lage gedreht ist, den Winkel zu finden, durch welchen der Hebel fallen muss.

Figur 79.

Es sei $AC = 2a$, $BC = 2a'$, $m =$ der Masse von AC, $m' =$ derjenigen von BC, ϑ die Neigung von AC, ϑ' diejenige von BC gegen den Horizont zu einer beliebigen Zeit der Bewegung.

Die lebendige Kraft des Hebels ist gleich

$$2mag\sin\vartheta + 2m'a'g\sin\vartheta' + C,$$

und weil, wenn $\vartheta = 0$, $\vartheta' = \frac{\pi}{2}$, die lebendige Kraft gleich Null ist, so wird C bestimmt durch

$$0 = 2m'ga' + C,$$

mithin ist die lebendige Kraft des Hebels für irgend eine Lage gleich

$$2mag\sin\vartheta + 2m'a'g\sin\vartheta' - 2m'a'g.$$

Nun wird, wenn der Winkel ϑ seinen Maximalwert erreicht, die lebendige Kraft nochmals gleich Null werden, folglich besteht für den verlangten Wert von ϑ die Bedingung

$$ma\sin\vartheta + m'a'\sin\vartheta' - m'a' = 0. \tag{1}$$

Sind β, β' die Werte von ϑ, ϑ' für die Gleichgewichtslage des Hebels, dann ist

$$ma = m'a'\frac{\cos\beta'}{\cos\beta},$$

so dass mit (1)

$$\cos\beta'\sin\vartheta + \cos\beta\sin\vartheta' = \cos\beta,$$

und weil $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\vartheta' = \frac{\pi}{2} - \vartheta$,

$$\sin\beta\sin\vartheta + \cos\beta\cos\vartheta = \cos\beta, \qquad \cos(\vartheta - \beta) = \cos\beta, \qquad \vartheta - \beta = \beta,$$

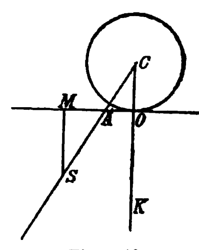
daher ist

$$\vartheta = 2\beta$$

der Winkel, durch welchen CA fällt.

5. Es soll die Bewegung eines materiellen Pendels ermittelt werden, dessen Axe ein Cylinder ist, welcher sich auf zwei vollkommen rauhe Ebenen stützt, die in einer horizontalen Ebene liegen, und ist die cylindrische Axe im stande, entlang diesen Ebenen zu rollen.

Es sei (Fig. 80, S. 224) C der Mittelpunkt des Kreisschnittes der cylindrischen Axe durch eine Ebene, welche den Schwerpunkt des Pendels enthält, C der Schwerpunkt der Axe, S der Schwerpunkt des Pendels und



Figur 80.

des Cylinders zusammen, mk^2 ihr Trägheitsmoment um eine horizontale Linie durch S, parallel zu der Axe, m die Summe der Massen bezeichnend, SM rechtwinkelig zu der horizontalen Ebene, entlang welcher die Axe rollt, O der Berührungspunkt des Schnittes C der Axe mit dieser Ebene zu einer beliebigen Zeit t während der Bewegung, A der der Gleichgewichtslage des Systemes entsprechende Ort von O, $CO = c$, $CS = a$, $\sphericalangle SCK = \varphi$, wobei CK die Vertikale durch C ist, $AM = x$, $MS = y$.

Die lebendige Kraft des Systemes besteht aus zwei Teilen, der erste Teil $m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right)$ ist zu verdanken der Translation von S, der zweite Teil $mk^2\frac{d\varphi^2}{dt^2}$ der Rotation um S, so dass wir für dieselbe den Ausdruck erhalten

$$m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + k^2\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right).$$

Auch ist die Summe der Produkte aus der Masse eines jeden materiellen Punktes des Systemes und dem vertikalen Wege, durch welchen er herabgesunken ist, gleich my plus eine gewisse konstante Grösse, welche von dem Anfangszustande des Systemes abhängig ist. Folglich bekommen wir mittelst des Prinzipes der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + k^2\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right) = C + 2mgy. \tag{1}$$

Ferner haben wir hier die geometrischen Nebenbedingungen

$$x = a \sin\varphi - c\varphi, \qquad y = a\cos\varphi - c,$$

also auch $\frac{dx}{dt} = (a\cos\varphi - c)\frac{d\varphi}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = -a\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}.$

Mit diesen Werten geht die Gleichung (1) über in

$$(a^2 + c^2 + k^2 - 2ac\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C' + 2g(a\cos\varphi - c).$$

Bezeichnet nun α den Maximalwert von φ, so ist

$$0 = C' + 2g(a\cos\alpha - c),$$

und daher

$$(a^2 + c^2 + k^2 - 2ac\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2ag(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

womit sich die Winkelgeschwindigkeit des Pendels für jede seiner Lagen während der Bewegung bestimmt.

Nun erhalten wir für die Periode einer halben Schwingung

$$T = \frac{1}{\sqrt{2ag}}\int_0^\alpha \frac{(a^2 + c^2 + k^2 - 2ac\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}{(\cos\varphi - \cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}d\varphi. \tag{2}$$

Die Integration kann hier nur dann ausgeführt werden, wenn wir voraussetzen, dass die Amplitude der Schwingung des Pendels sehr klein ist.

Für diesen Fall setzen wir $\sin\frac{\varphi}{2} = s$, $\sin\frac{\alpha}{2} = b$, womit $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - 2s^2$, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2b^2$, und $d\varphi = \frac{4s\,ds}{\sin\varphi} = \frac{4s\,ds}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = \frac{2\,ds}{\sqrt{1-s^2}}$ wird.

Damit geht die Gleichung (2) über in

$$T = \frac{1}{\sqrt{2ag}} \int_0^b \frac{\{(a-c)^2 + k^2 + 4acs^2\}^{\frac{1}{2}}}{(2b^2 - 2s^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{2\,ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}},$$

oder in, wenn wir $(a-c)^2 + k^2 = h^2$ nehmen,

$$T = \frac{1}{\sqrt{ag}} \int_0^b \frac{\sqrt{h^2 + 4acs^2}}{\sqrt{(b^2 - s^2)(1-s^2)}}\, ds.$$

Weil nun s eine kleine Grösse ist, so können wir die kleinen Grössen von höherer Ordnung als der zweiten vernachlässigen, wodurch wir bekommen

$$\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}s^2, \qquad \sqrt{h^2 + 4acs^2} = h\left(1 + \frac{2ac}{h^2}s^2\right),$$

folglich
$$\sqrt{\frac{h^2 + 4acs^2}{1-s^2}} = h\left(1 + \frac{4ac + h^2}{2h^2}s^2\right) \text{ annähernd,}$$

mit welchem Werte die Gleichung für die Schwingungszeit wird

$$T = \frac{h}{\sqrt{ag}} \int_0^b \left\{ \frac{1}{\sqrt{b^2 - s^2}} + \frac{4ac + h^2}{2h^2} \cdot \frac{s^2}{\sqrt{b^2 - s^2}} \right\} ds,$$

so dass
$$T = \frac{\pi h}{2\sqrt{ag}} + \frac{\pi b^2 (4ac + h^2)}{8h\sqrt{ag}},$$

und somit ist die Periode einer vollen Schwingung gleich

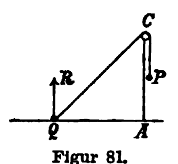
$$\frac{\pi h}{\sqrt{ag}} + \frac{\pi b^2 (4ac + h^2)}{4h\sqrt{ag}}.$$

Euler hat dieses Problem, von den allgemeinen Bewegungsgleichungen ausgehend, erörtert; er untersuchte den Druck auf die Ebenen zu einer beliebigen Zeit t und auch die horizontale Wirkung der Ebenen auf den Cylinder, um ihre Grösse zu ermitteln, welche jegliches Gleiten verhindert.

Euler, Nova Acta Acad. Petrop. 1788, p. 145.
1—5. Walton, p. 526—533.

6. Zwei Gewichte P, Q (Fig. 81, S. 226) sind durch einen vollkommen biegsamen, unelastischen, gewichtslosen, über eine kleine Rolle C laufenden Faden verbunden. P zieht vertikal herabsinkend Q eine glatte horizontale Ebene entlang. Welches ist der Druck von Q auf die Ebene?

Es seien m_1, m_2 die Massen von P, Q resp., die vertikale Ebene durch



Figur 81.

QCP schneide die horizontale Ebene durch Q in der Geraden QA, CA sei senkrecht auf QA. Ferner sei $a =$ der Länge des Fadens PCQ, $b = AC$, $\vartheta = \sphericalangle QCA$, $x = CP$, $y = AQ$, $R =$ dem Drucke von Q auf die Ebene, $T =$ der Spannung des Fadens.

Weil hier ausser der Schwerkraft, welche das Gewicht der Masse P erzeugt, der Spannung des Fadens und der Reaktion von Q keine weiteren Kräfte wirken, so können wir das Prinzip der lebendigen Kraft anwenden. Es ist hier

$$\Sigma(mv^2) = m_1\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$2\Sigma\left\{m\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\right\} = 2\int(m_1 g\,dx) = 2\,m_1 g x + C,$$

folglich

$$m_1\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\,m_1 g x + C.$$

Nun sei beim Beginn der Bewegung P in C, dann ist mit $t = 0$, $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, folglich $C = 0$, mithin

$$m_1\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\,m_1 g x. \tag{1}$$

Ferner haben wir

$$a - x = CQ = \sqrt{b^2 + y^2}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}\frac{dy}{dt}.$$

Werden diese Werte von x und $\frac{dx}{dt}$ in die Gleichung (1) substituiert, so erhalten wir

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2g(a - \sqrt{b^2 + y^2})}{\frac{m_2}{m_1} + \frac{y^2}{b^2 + y^2}}. \tag{2}$$

Weil nun Q keine Vertikalbewegung besitzt, so sind die Kräfte, welche auf dasselbe wirken, solche, die genau einander entgegen wirken. Durch Zerlegung der Spannung ist daher

$$R = m_2 g - T\cos\sphericalangle CQR.$$

Um T zu finden, haben wir die Bewegungsgleichung für Q zu bilden, diese ist

$$m_1\frac{d^2y}{dt^2} = -T\sin\sphericalangle QCA,$$

so dass
$$R = m_2 g + m_1\frac{d^2y}{dt^2}\operatorname{cotg}\sphericalangle CQR = m_2 g + \frac{mb}{y}\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{3}$$

Differentiieren wir jetzt die Gleichung (2) bezüglich t, so erhalten wir den

Wert von $\frac{d^2 y}{dt^2}$, welcher in die (3) eingeführt die verlangte Reaktion als Funktion des Winkels ϑ giebt, nämlich

$$R = m_2 g - m_1 g \frac{\cos\vartheta}{\left(\frac{m_2}{m_1} + \sin^2\vartheta\right)} \left(\frac{m_2}{m_1} + \sin^2\vartheta - 2\cos^2\vartheta + \frac{2a}{b}\cos^3\vartheta\right).$$

7. Zwei Gewichte sind durch einen vollkommen biegsamen und unelastischen, gewichtslosen Faden verbunden. Der Faden läuft über eine Rolle von solcher Rauheit, dass kein Gleiten stattfinden kann. Welches ist die Bewegung?

Es seien m_1, m_2, M die Massen der Gewichte und der Rolle, $m_1 > m_2$ gedacht, Mk^2 bedeute das Trägheitsmoment der Rolle um ihre Axe. Das Prinzip der lebendigen Kraft kann angewendet werden, weil die Reibung zwischen Faden und Rolle vollendete Reibung ist. Nun sei (Fig. 82) $AB = 2b$ ein horizontaler Durchmesser der Rolle, $Am_1 = x'$, $Bm_2 = x''$ zur Zeit t, $a =$ der Länge des Fadens, $\vartheta =$ dem Winkel, durch welchen sich die Rolle gedreht hat, während m_1 aus A in seine gegenwärtige Lage herabgesunken ist. Damit haben wir zunächst

Figur 82.

$$x' = b\vartheta, \quad x'' = a - x', \quad \text{also} \quad \frac{dx'}{dt} = b\frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dx''}{dt} = -\frac{dx'}{dt}.$$

Zufolge des Prinzipes der lebendigen Kraft ist aber

$$\Sigma(mv^2) = m_1\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + m_2\left(\frac{dx''}{dt}\right)^2 + Mk^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \left(m_1 + m_2 + M\frac{k^2}{b^2}\right)\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma\left\{m\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\right\} = \int\left\{m_1 g\,dx' - m_2 g\,dx''\right\}$$

$$= (m_1 - m_2)g\int dx' = (m_1 - m_2)g(x' + C),$$

mithin

$$\left(m_1 + m_2 + M\frac{k^2}{b^2}\right)\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = 2(m_1 - m_2)g(x' + C).$$

Beim Beginn der Bewegung ist aber $x' = 0, \frac{dx'}{dt} = 0$, folglich $C = 0$, daher

$$\left(m_1 + m_2 + M\frac{k^2}{b^2}\right)\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = 2(m_1 - m_2)g x', \quad \text{d. i.} \quad A\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = Bx', \quad (1)$$

womit

$$x' = 4\frac{B}{A}t^2 = \frac{8(m_1 - m_2)g t^2}{m_1 + m_2 + M\frac{k^2}{b^2}}$$

und die Bewegung vollständig bestimmt ist.

Wenn die Spannungen der zwei Teile des Fadens auf den entgegen-

gesetzten Seiten der Rolle bestimmt werden sollen, so haben wir die Bewegungsgleichungen anzuwenden. Es seien T_1, T_2 die Spannungen von $A m_1$, $B m_2$ resp., dann sind die Bewegungsgleichungen für die materiellen Punkte m_1 und m_2

$$\frac{d^2 x'}{d t^2} = g - \frac{T_1}{m_1}, \quad \text{und} \quad \frac{d^2 x''}{d t^2} = g - \frac{T_2}{m_2},$$

so dass

$$T_1 = m_1 g - m_1 \frac{d^2 x'}{d t^2}, \quad T_2 = m_2 g - m_2 \frac{d^2 x''}{d t^2} = m_2 g + m_2 \frac{d^2 x'}{d t^2}.$$

Aus (1) folgt aber

$$\frac{d^2 x'}{d t^2} = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + M \frac{k^2}{b^2}},$$

mithin erhalten wir

$$T_1 = m_1 g - \frac{m_1 (m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + M \frac{k^2}{b^2}},$$

$$T_2 = m_2 g + \frac{m_2 (m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + M \frac{k^2}{b^2}}.$$

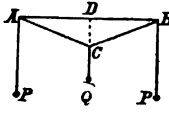
Der Druck auf die Axe der Rolle ist, wenn wir denselben R nennen,

$$R = T_1 + T_2 + M g = (m_1 + m_2 + M) g - (m_1 - m_2) \frac{d^2 x'}{d t^2},$$

$$R = (m_1 + m_2 + M) g - \frac{(m_1 - m_2)^2 g}{m_1 + m_2 + M \frac{k^2}{b^2}}.$$

8. Zwei gleiche Gewichte P, P sind an die Enden eines feinen Fadens gefesselt, welcher über zwei Rollen ohne Masse und in einer horizontalen Linie läuft. Ein Gewicht $Q < 2P$ wird in dem Mittelpunkte des horizontalen Teiles des Fadens befestigt. Wie tief wird dieses Gewicht sinken?

Es sei a der Abstand zwischen den beiden Rollen A, B (Fig. 83), C die Lage des Mittelpunktes des Fadens zur Zeit t, gerechnet vom Beginn des Sinkens, $CD \perp AB$, $CD = y$, x die vertikale Erhebung eines Gewichtes P in dieser Zeit, m_1 die Masse eines der Gewichte P, m_2 diejenige des Gewichtes Q.



Figur 83.

Wir haben hier offenbar

$$\Sigma(m v^2) = 2\int_0^x 2 m_1 g\, dx - 2\int_0^y m_2 g\, dy = 4 m_1 g x - 2 m_2 g y = 4 P x - 2 Q y.$$

Zwischen x und y besteht, da $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2$ die Relation $y^2 + \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{4} + x\right)^2$, oder $y^2 = x^2 + ax$, so dass auch

$$\Sigma(mv^2) = 4Px - 2Q\sqrt{x^2 + ax}.$$

Hat das Gewicht Q seine tiefste Stelle erreicht, so ist $v = 0$, daher in diesem Falle

$$0 = 2Px - Q\sqrt{x^2 + ax} = (4P^2 - Q^2)x - Q^2 a,$$

woraus folgt

$$x = \frac{Q^2 a}{4P^2 - Q^2}.$$

Aber es ist auch

$$4Px - 2Qy = 0, \qquad \text{folglich} \qquad x = \frac{Q}{2P}y.$$

Daher erhalten wir für die Fallhöhe h von Q

$$\frac{Q}{2P}h = \frac{Q^2 a}{4P^2 - Q^2}, \qquad \text{woraus} \qquad h = \frac{2PQa}{4P^2 - Q^2}$$

als grösste Senkung des Gewichtes Q sich ergiebt.

9. Ein materieller Punkt A sinkt auf einer Curve CKA (Fig. 84), einen materiellen Punkt B auf der Curve CLB mittelst eines feinen über den Punkt C laufenden Fadens in die Höhe ziehend; beide Curven liegen in einer vertikalen Ebene. Welches sind die Geschwindigkeiten der beiden Punkte, nachdem sie sich aus der Ruhe durch irgend welche entsprechende Bahnen bewegt haben?

Figur 84.

Es seien m_1, m_2 die Massen der Punkte A, B, v_1, v_2 ihre Geschwindigkeiten, nachdem sie sich durch die Höhen y_1, y_2 bewegt haben, ds_1, ds_2 resp. die Längenelemente der zwei Curven.

Hier haben wir offenbar

$$\Sigma(mv^2) = m_1\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right\} + m_2\left\{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2\right\},$$

$$2\int m(X dx + Y dy + Z dz) = 2m_1 g\int_0^{y_1} dy_1 - 2m_2 g\int_0^{y_2} dy_2$$
$$= 2g(m_1 y_1 - m_2 y_2),$$

folglich muss sein

$$m_1\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right\} + m_2\left\{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2\right\} = 2g(m_1 y_1 - m_2 y_2),$$

so dass auch

$$v_1^2\left(\frac{dt}{ds_1}\right)^2\left\{m_1\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right]+m_2\left[\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2\right]\right\}$$
$$= 2g(m_1 y_1 - m_2 y_2),$$
$$v_1^2\frac{m_1\,ds_1^2+m_2\,ds_2^2}{ds_1^2} = 2g(m_1 y_1 - m_2 y_2).$$

Damit ergiebt sich

$$v_1^2 = 2g(m_1 y_1 - m_2 y_2)\frac{ds_1^2}{m_1\,ds_1^2+m_2\,ds_2^2},$$

und in ähnlicher Weise

$$v_2^2 = 2g(m_1 y_1 - m_2 y_2)\frac{ds_2^2}{m_1\,ds_1^2+m_2\,ds_2^2}.$$

Johann Bernoulli, Acta. Erudit. Lips. 1735, Mai, p. 210, Opera. Tom. III, p. 257. Hermann, Mémoires de St. Pétersbourg, Tom. II. D'Alembert, Traîté de Dynamique, p. 123, Seconde Edition.

10. BFG (Fig. 85) ist ein Körper beliebiger, jedoch teilweise cylindrischer Gestalt und es geht die Axe des Cylinders durch den Schwerpunkte C des Körpers. Ein unausdehnbarer, an den festen Punkt E gefesselter Faden ist mit seinem anderen Ende an dem Kreiscylinder befestigt und um den Normalschnitt durch C desselben gewunden, so dass er diesen Kreisschnitt in A berührt, und ist der Fadenteil EA vertikal. Welches ist die Geschwindigkeit des Punktes C, wenn der Körper aus einer Ruhelage durch eine gegebene Höhe h unter der Wirkung der Schwerkraft gesunken ist, wobei sich der Faden abwickelt?

Es sei a der Halbmesser des Cylinders, k der Trägheitsradius des Körpers von der Masse m um die Axe durch C, v die Geschwindigkeit des Punktes C nach dem Durchfallen eines Weges x. Wir haben hier

$$\Sigma(mv^2) = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mk^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

Figur 85.

$$\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_0^x g\,dx = gx, \qquad x = a\vartheta.$$

Daher ist durch das Prinzip der lebendigen Kraft

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mk^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2mgx, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\cdot\frac{a^2+k^2}{a^2} = 2gx,$$

woraus

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{2a^2gx}{a^2+k^2}, \qquad x = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 g}{a^2+k^2}\,t^2.$$

In dem besonderen Falle, wo der Körper durchweg ein homogener Cylinder ist, haben wir $k^2 = \frac{1}{2}a^2$, also

$$v^2 = \frac{4}{3} g x, \qquad x = \frac{1}{3} g t^2.$$

Dieses Problem ist eines der Theoremata Selecta von Johann Bernoulli, „pro conservatione virium vivarum demonstranda et experimentis confirmanta“.

Comment. Acad. Petrop. 1727, p. 200. Opera, Tom. III, p. 127.

11. Ein homogener Kreiscylinder kann sich frei um seine Axe bewegen, welche in einer horizontalen Lage festgehalten wird. Zwei Gewichte G_1, G_2 sind an die Enden eines gewichtslosen Fadens gefesselt, welcher um den Cylinder gewunden und an irgend einer Stelle fest mit demselben verbunden ist, um ein Gleiten des Fadens auf der Cylinderfläche zu verhindern. Nachdem das Gewicht G_2 während t Sekunden gesunken ist, wird es plötzlich abgeschnitten und das System kommt nach t weiteren Sekunden in den Zustand der Ruhe. Welches ist das Gewicht des Cylinders?

Es seien m_1, m_2 und m die Massen der Gewichte G_1, G_2 und des Gewichtes G des Cylinders resp., a bezeichne den Halbmesser, k den Trägheitsradius für die Axe des Cylinders, x den in der Zeit t von dem sinkenden Gewichte G_2 durchlaufenen Weg, y den vertikalen Weg des Fadenendes G_2, nachdem das Gewicht G_2 abgeschnitten worden ist, in t' weiteren Sekunden.

Zunächst haben wir für die Bewegung der Massen m_1, m_2, m

$$\Sigma(m v^2) = m_1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m k^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

und weil $x = a\vartheta$, wo ϑ den Winkel bezeichnet, durch welchen der Cylinder sich in der Zeit t gedreht hat,

$$\Sigma(m v^2) = \left(m_1 + m_2 + m\frac{k^2}{a^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma\left\{m\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\right\} = \int_0^x (m_2 g\,dx - m_1 g\,dx)$$
$$= (m_2 - m_1) g x.$$

Daher ist nach dem Prinzipe der lebendigen Kraft

$$\left(m_1 + m_2 + m\frac{k^2}{a^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2(m_2 - m_1) g x,$$

und, weil $k^2 = \frac{1}{2} a^2$,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{4(m_2 - m_1) g}{2(m_1 + m_2) + m} x.$$

Da nun die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte mit der Acceleration

$\varphi_1 = \frac{2(m_2 - m_1)g}{2(m_1 + m_2) + m}$ ist, so haben wir, wenn v_1 die Geschwindigkeit bezeichnet,

$$v_1{}^2 = \frac{4(m_2 - m_1)g\frac{v_1}{2}t}{2(m_1 + m_2) + m}, \qquad v_1 = \frac{2(m_2 - m_1)g}{2(m_1 + m_2) + m}t. \tag{1}$$

Das ist die Geschwindigkeit von G_1, wenn G_2 abgeschnitten wird.

Das Gewicht G_1 sucht den Cylinder in entgegengesetzter Richtung zu drehen und wirkt also auf Verminderung dieser Geschwindigkeit des freien Fadenendes hin.

Für die lebendige Kraft der beiden Massen m_1 und m haben wir

$$\Sigma(m v^2) = m_1\left(\frac{dy}{dt'}\right)^2 + m\frac{k^2}{a^2}\left(\frac{dy}{dt'}\right)^2,$$

auch ist $\Sigma\left\{m\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\right\} = m_1 g\int_0^y dy = m_1 g y,$

daher

$$\left(m_1 + m\frac{k^2}{a^2}\right)\left(\frac{dy}{dt'}\right)^2 = 2m_1 g y, \quad \left(\frac{dy}{dt'}\right)^2 = \frac{2m_1 g y}{m_1 + m\frac{k^2}{a^2}} = \frac{4m_1 g y}{2m_1 + m}.$$

Mit $\frac{dy}{dt'} = v_2$, also $y = \frac{1}{2}v_2 t'$, wird

$$v_2 = \frac{2m_1 g}{2m_1 + m}t', \tag{2}$$

und die entsprechende Beschleunigung ist $\varphi_2 = \frac{2m_1 g}{2m_1 + m}$.

Dadurch haben wir für die Bewegung des Fadenendes G_2 von dem Augenblicke an, wo das Gewicht G_2 abgeschnitten worden ist, die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt'^2} = -\varphi_2 = -\frac{2m_1 g}{2m_1 + m},$$

ihre Integration giebt

$$\frac{dy}{dt'} = C - \frac{2m_1 g}{2m_1 + m}t'.$$

Beim Beginn der Bewegung ist aber $t' = 0$, $\frac{dy}{dt'} = v_1$, folglich $C = v_1$, und mithin

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{2(m_2 - m_1)g}{2(m_1 + m_2) + m}t - \frac{2m_1 g}{2m_1 + m}t'.$$

Soll nun nach dem Verlauf von $2t$ Sekunden, vom Beginn der ganzen Bewegung an gerechnet, das System zur Ruhe kommen, so muss in diesem Momente $\frac{dy}{dt'} = 0$ und $t' = t$ sein, was die Bedingung giebt

$$0 = \frac{m_2 - m_1}{2(m_1 + m_2) + m} - \frac{m_1}{2m_1 + m},$$

woraus folgt:

$$m = \frac{4m_1^{\,2}}{m_2 - 2m_1}, \qquad \text{oder} \qquad mg = \frac{4m_1^{\,2}g^2}{m_2 g - 2m_1 g},$$

d. i.

$$G = \frac{4G_1^{\,2}}{G_2 - 2G_1}.$$

Diese Gleichung giebt das verlangte Cylindergewicht.

12. Zwei gleiche, homogene Kugeln bewegen sich mit den Anfangsgeschwindigkeiten Null auf zwei gleich geneigten Ebenen gleichzeitig herab; die eine Ebene ist vollkommen glatt, die andere vollkommen rauh. Welches ist das Verhältnis der lebendigen Kräfte beider Kugeln?

Es sei m die Masse einer jeden der zwei Kugeln, a ihr Halbmesser, k ihr Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt, x der von jeder Kugel in der Zeit t zurückgelegte Weg, ϑ der Winkel, durch welchen sich die Kugeln in der Zeit t drehen, L_1 die lebendige Kraft, mit welcher sich die eine Kugel auf der glatten Ebene, L_2 diejenige, mit welcher sich die andere Kugel auf der vollkommen rauhen Ebene bewegt. Damit haben wir

$$L_1 = \Sigma(mv^2) = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mk^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = m\cdot\frac{a^2+k^2}{a^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{7}{5}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

$$L_2 = \Sigma(mv^2) = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

folglich ergiebt sich

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{7}{5}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{7}{5}.$$

13. Ein kreisförmiger Draht kann sich frei um einen vertikalen Durchmesser als feste Axe drehen und eine Perle kann frei entlang demselben unter der Wirkung der Schwerkraft gleiten. Das ganze System wird in Rotation um die vertikale Axe gebracht und es soll die daraus folgende Bewegung ermittelt werden.

Es sei M die Masse des Drahtes, m diejenige der Perle, a der Halbmesser des kreisförmig gebogenen Drahtes, Mk^2 sein Trägheitsmoment um einen Diameter, der Mittelpunkt des Ringes Coordinatenursprung, die Axe der y vertikal und positiv abwärts, ϑ der Winkel, welchen der nach dem Mittelpunkte der Perle gezogene Radius des Ringes mit der Ordinatenaxe einschliesst, ω die Winkelgeschwindigkeit des Ringes.

Weil die Schwerkraft in vertikaler Richtung wirkt und weil alle Reaktionen auf die feste Axe durch diese gehen müssen, so muss das Moment aller Kräfte um den vertikalen Diameter gleich Null sein. Folglich haben wir, Momente um die Vertikale nehmend,

$$M k^2 \omega + m a^2 \sin^2 \vartheta \,.\, \omega = h,$$

und durch das Prinzip der lebendigen Kraft

$$M k^2 \omega^2 + m \left\{ a^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + a^2 \sin^2 \vartheta \,.\, \omega^2 \right\} = C + 2 m g a \cos \vartheta.$$

Diese zwei Gleichungen genügen zur Bestimmung von $\frac{d\vartheta}{dt}$ und ω. Indem wir ω eliminieren, ergiebt sich

$$\frac{h^2}{M k^2 + m a^2 \sin^2 \vartheta} + m a^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C + 2 m g a \cos \vartheta.$$

Weil diese Gleichung nicht integriert werden kann, so ist es nicht möglich ϑ als Funktion der Zeit darzustellen. Um die Konstanten h und C zu bestimmen, haben wir die Bedingungen für den Beginn der Bewegung zu beachten. Nehmen wir an, dass anfangs $\vartheta = \pi$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ und $\omega = \alpha$, dann ist $h = M k^2 \alpha$ und $C = 2 m g a + M k^2 \alpha$, womit wir bekommen

$$\frac{M^2 k^4 \alpha^2}{M k^2 + m a^2 \sin^2 \vartheta} + m a^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2 m g a + M k^2 \alpha + 2 m g a \cos \vartheta,$$

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2 m g a (1 + \cos \vartheta) + M k^2 \alpha}{m a^2} - \frac{M^2 k^4 \alpha^2}{m a^2 (M k^2 + m a^2 \sin^2 \vartheta)}.$$

14. Zwei gleiche materielle Punkte sind an den Enden A, A' eines geraden, gleicharmigen, gewichtslosen Hebels mit der Drehaxe C befestigt (Fig. 86). Der feste Punkt O, vertikal über C, ist der Sitz einer Centralkraft, deren Intensität umgekehrt proportional dem Kubus des Abstandes ist, und ist OC gleich einer Armlänge des Hebels. Der Hebel befindet sich in einer gegebenen Lage. Welches ist die Zeit, innerhalb der er vertikal werden wird?

Figur 86.

Es sei $CO = CA = CA' = a$, $OA = r$, $OA' = r'$, $\sphericalangle ACO = \vartheta$ zu einer beliebigen Zeit t während der Bewegung, $m =$ der Masse eines jeden der materiellen Punkte, $\mu =$ der Attraktion der Centralkraft auf eine Masseneinheit in der Einheit der Entfernung, $\alpha =$ dem Anfangswerte von ϑ.

Die lebendige Kraft der zwei materiellen Punkte zusammen, zu einer beliebigen Zeit t während der Bewegung, ist gleich $2 m a^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$, so dass wir die Gleichung erhalten

$$2 m a^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2 \int \left(-\frac{\mu m}{r^3} d r - \frac{\mu m}{r'^3} d r'\right) + C,$$

und daher

$$2 a^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\mu}{r'^2} + C'.$$

Weiter giebt uns die Beschaffenheit der Aufgabe die geometrischen Relationen

$$r^2 = 2 a^2 (1 - \cos\vartheta), \qquad r'^2 = 2 a^2 (1 + \cos\vartheta),$$

folglich ist auch

$$2 a^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{2 a^2}\left(\frac{1}{1-\cos\vartheta} + \frac{1}{1+\cos\vartheta}\right) + C' = \frac{\mu}{a^2} \frac{1}{\sin^2\vartheta} + C'.$$

Aber wenn $\vartheta = \alpha$, so ist $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, daher $C' = -\frac{\mu}{a^2} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha}$, mithin

$$2 a^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{a^2 \sin^2\alpha} \cdot \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}.$$

Daher bekommen wir, weil ϑ mit wachsendem t abnimmt,

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}}\, a^2 \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\vartheta}} = -\frac{dt}{\sin\alpha}, \quad \sqrt{\frac{2}{\mu}}\, a^2 \frac{d(\cos\vartheta)}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\vartheta}} = \frac{dt}{\sin\alpha}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}}\, a^2\, l \left\{\cos\vartheta + \sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\alpha}\right\} = \frac{t}{\sin\alpha} + C,$$

weil aber $\vartheta = a$, wenn $t = 0$ ist, so muss sein $C = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\, a^2\, l(\cos\alpha)$, folglich

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}}\, a^2\, l \frac{\cos\vartheta + \sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{t}{\sin\alpha}.$$

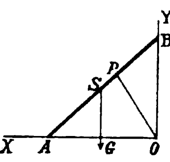
Wenn nun $A C A'$ vertikal wird, so geht ϑ in Null über, mithin ist die verlangte Zeit, welche wir mit t' bezeichnen wollen,

$$t' = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\, a^2 \sin\alpha\, l \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\, a^2 \sin\alpha\, l\left(tg \frac{\pi + 2\alpha}{4}\right).$$

Walton, p. 533.

15. Ein gleichförmiger, schlanker Stab, auf den die Schwerkraft wirkt, befindet sich so zwischen einer horizontalen und einer vertikalen Ebene, dass die Vertikalebene durch den Stab auf diesen beiden Stützebenen senkrecht steht. Im Schnittpunkte dieser drei Ebenen ist der Sitz einer Attraktionskraft, welche proportional dem Quadrate des Abstandes und deren Beschleunigung für den Schwerpunkt des Stabes immer gleich $\frac{g}{2}$ ist. Der Stab befindet sich anfangs in einer gegebenen Lage, welches ist seine Winkelgeschwindigkeit?

Es sei AB (Fig. 87) die Lage des Stabes zu der Zeit t nach dem Beginne der Bewegung, $a = AS = BS = OS$, $\vartheta = \sphericalangle OAB$, $M =$ der Masse des Stabes, $m =$ derjenigen eines Stabelementes in P, $OP = r$, wo P ein beliebiger Punkt des Stabes, und x, y seien die Coordinaten dieses Punktes.



Figur 87.

Da hier keine Reibung stattfinden soll, so kann das Prinzip der lebendigen Kraft angewendet werden, womit wir erhalten

$$\Sigma(mv^2) = \Sigma\left[m\left\{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2\right\}\right] + \Sigma(m\overline{SP}^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

und $$\Sigma(mv^2) = 2\Sigma\left\{m\int(Xdx + Ydy + Zdz)\right\}.$$

Die geometrischen Nebenbedingungen sind

$$\bar{x} = a\cos\vartheta, \qquad \bar{y} = a\sin\vartheta.$$

Nun ist $\Sigma(m\overline{SP}^2) =$ dem Trägheitsmomente von SA und SB um S $= \frac{M}{2}\cdot\frac{a^2}{3} + \frac{M}{2}\frac{a^2}{3} = \frac{1}{3}Ma^2$, so dass

$$\Sigma(mv^2) = \Sigma\left\{ma^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} + \frac{1}{3}Ma^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{4}{3}Ma^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

Die Attraktionsbeschleunigung von O auf P ist $= \frac{g}{2}\frac{a^2}{\overline{OP}^2}$, welche äquivalent ist den beiden Beschleunigungen $-\frac{g}{2}\cdot\frac{a^2}{\overline{OP}^2}\cdot\frac{x}{OP}$, parallel zu OX, und $-\frac{g}{2}\cdot\frac{a^2}{\overline{OP}^2}\cdot\frac{y}{OP}$, parallel zu OY, wodurch $X = -\frac{g}{2}\cdot\frac{a^2x}{\overline{OP}^3}$, $Y = -g - \frac{g}{2}\cdot\frac{a^2y}{\overline{OP}^3}$, folglich ist

$$m(Xdx + Ydy + Zdz) = -\frac{mg}{2}\left\{\frac{a^2xdx + a^2ydy}{\overline{OP}^3} + 2dy\right\}$$

$$= -\frac{mg}{2}\left\{\frac{a^2dr}{r^2} + 2dy\right\},$$

$$m\int(Xdx + Ydy + Zdz) = C - \frac{mg}{2}\left\{-\frac{a^2}{r} + 2y\right\}$$

$$= C - mgy + \frac{mga^2}{2r},$$

$$2\Sigma\left\{m\int(Xdx + Ydy + Zdz)\right\} = C' - 2g\Sigma(my) + ga^2\Sigma\left(\frac{m}{r}\right).$$

Nun sei $AP = s$ und $\delta s =$ der Länge des Elementes bei P, dessen Masse $= m$ ist, so wird sein $m = M\frac{\delta s}{2a}$, also

$$\Sigma\left(\frac{m}{r}\right)=\frac{M}{2a}\Sigma\left(\frac{\delta s}{r}\right)=\frac{M}{2a}\int_0^{2a}\frac{1}{OP}\delta s$$
$$=\frac{M}{2a}\int_0^{2a}\frac{\delta s}{\sqrt{4a^2\cos^2\vartheta-4a\cos\vartheta . s+s^2}},$$

$$\Sigma\left(\frac{m}{r}\right)=\frac{M}{2a}\Big[C''-l(2a\cos^2\vartheta-s+\sqrt{4a^2\cos^2\vartheta-4a\cos\vartheta . s+s^2})\Big]_0^{2a},$$

$$\Sigma\left(\frac{m}{r}\right)=\frac{M}{2a}\,l\,\frac{\cos\vartheta(1+\cos\vartheta)}{\sin\vartheta(1-\sin\vartheta)}=\frac{M}{2a}\,l\,\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)}{tg\frac{\vartheta}{2}}.$$

Ferner ist $\Sigma(my)=M\bar{y}=Ma\sin\vartheta.$

Mit diesen Werten erhalten wir

$$\frac{4}{3}Ma^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=C'-2gMa\sin\vartheta+ga\frac{M}{2}\,l\,\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)}{tg\frac{\vartheta}{2}}.$$

Nun ist beim Beginn der Bewegung $\frac{d\vartheta}{dt}=0$ und $\vartheta=\alpha$, so dass für die Konstante die Gleichung besteht

$$0=C'-2gMa\sin\alpha+\frac{1}{2}gMa\,l\,\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{tg\frac{\alpha}{2}},$$

und wird mithin

$$\frac{4}{3}a\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=2g(\sin\alpha-\sin\vartheta)+\frac{1}{2}g\,l\,\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)tg\frac{\alpha}{2}}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)tg\frac{\vartheta}{2}}.$$

Diese Gleichung giebt die gesuchte Winkelgeschwindigkeit für irgend eine gegebene Lage des Stabes.

16. Ein materieller Punkt beschreibt eine Ellipse frei um ein Kraftcentrum in ihrem Mittelpunkte. Welches ist die ganze Energie seiner Bewegung?

Es sei m die Masse des materiellen Punktes, r sein Abstand zu einer beliebigen Zeit t von dem Centrum, μr die beschleunigende Kraft an dem materiellen Punkte. Betrachten wir das Centrum als Pol von Polarcoordinaten, so ist die Potentialenergie gleich $\int_r^0(-\mu m r)\,dr$ $=\frac{1}{2}\mu m r^2$. Ist r' der zu r konjugierte Halbdiameter, dann ist die Ge-

schwindigkeit des materiellen Punktes $\sqrt{\mu r'}$ und die kinetische Energie daher $\frac{1}{2}\mu m r'^2$. Mithin haben wir für die ganze Energie des Punktes im Abstande r vom Centrum $\frac{1}{2}\mu m(r^2 + r'^2)$. Nun ist aber, wenn a und b die Halbaxen der Ellipse bezeichnen, $r'^2 + r^2 = a^2 + b^2$ und daher die ganze Energie der Masse m, wenn sie die Ellipse rund um das Centrum beschreibt, $\frac{1}{2}\mu m(a^2 + b^2)$.

17. Eine gleichförmige, gerade Planke ruht mit ihrem Mittelpunkte auf einem rauhen, horizontalen Kreiscylinder, die Richtungen beider Körper sind senkrecht zu einander. Die Planke werde nur sehr wenig so verschoben, dass sie immer mit dem Cylinder in Berührung bleibt, ohne zu gleiten. Welches ist die Periode einer Schwingung?

Wenn $2a$ die Länge der Planke und r der Halbmesser des normalen Kreisquerschnittes des Cylinders bedeutet, so ist die Zeit einer Schwingung gleich $\frac{\pi a}{\sqrt{3gr}}$.

18. Eine dünne, gleichförmige Röhre balanciert horizontal um ihren festen Mittelpunkt. Ein gleichförmiger Stab, welcher gerade in die Höhlung der Röhre passt, ist Ende an Ende in eine Linie mit der Röhre gelegt und dann mit einer solchen horizontalen Geschwindigkeit in sie hinein geworfen, dass sein Mittelpunkt eben nur denjenigen der Röhre erreicht. Wenn die Wurfgeschwindigkeit bekannt ist, zu finden die Winkelgeschwindigkeit der Röhre und des Stabes in dem Momente des Zusammenfallens ihrer Mittelpunkte.

Ist v die Wurfgeschwindigkeit des Stabes, m seine Masse, m_1 diejenige der Röhre, $2a$ die Länge des Stabes, $2a'$ diejenige der Röhre und ω die verlangte Winkelgeschwindigkeit, so wird gefunden werden

$$\omega^2 = \frac{3mv^2}{m a^2 - m_1 a_1^2}.$$

19. Ein kreisförmiger Drahtring, welcher eine Perle trägt, liegt auf einer glatten, horizontalen Tafel; ein Ende eines elastischen Drahtes mit kleinerer natürlicher Länge als derjenigen des Ringdurchmessers ist an der Perle und sein anderes Ende ist an einer gewissen Stelle des Ringes befestigt. Die Perle liegt anfangs so, dass der elastische Draht sehr nahe mit einem Durchmesser des Ringes zusammenfällt. Welches ist die lebendige Kraft des Systemes, wenn sich der Draht auf seine natürliche Länge zusammengezogen hat?

Ist c der Durchmesser des Ringes, a die natürliche Länge des Drahtes, λ sein Elastizitätsmodulus, dann ist die verlangte lebendige Kraft gleich $\frac{\lambda}{a}(c-a)^2$.

17—19. Walton, p. 536.

Zweite Abteilung.

Lebendige Kraft und Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

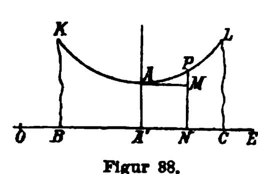
Das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes ist in seiner allgemeinsten Form durch den Satz gegeben:

„Die Bewegung des Schwerpunktes eines freien Systemes von Körpern, welche in irgend einer denkbaren Weise relativ zu einander geordnet sind, ist dieselbe als wenn die Körper sämtlich in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte vereinigt wären und jeder denselben beschleunigenden Kräften unterworfen wäre, welche in seiner wahren Lage auf ihn wirken."

Die Entdeckung dieses Prinzipes ist Newton zu verdanken (Principia, Axiomata sive leges Motus, Cor., 4), welcher es für den besonderen Fall erläuterte, dass das System keiner äusseren Kraft unterworfen ist, wenn der Schwerpunkt entweder in Ruhe bleibt oder sich in einer geraden Linie mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. D'Alembert (Traîté de Dynamique, Seconde Partie, Cap. II) dehnte später dieses Prinzip auf den Fall aus, in welchem auf jeden Körper eine konstante beschleunigende Kraft wirkt, wobei die Kraftrichtungen entweder parallel sind oder durch einen festen Punkt gehen, und die Kräfte direkt proportional den Distanzen sind. Endlich stellte Lagrange das Prinzip unter seiner allgemeinsten Gestalt, nämlich für jedes Kraftgesetz, welchem die Körper unterworfen sein können, dar (Mécanique Analytique, Tom. I, p. 257 & c.).

1. Eine glatte Rinne KAL (Fig. 88) ist in einer vertikalen Ebene in den Körper $KBCL$ eingegraben, welcher sich auf einer glatten, horizontalen Ebene OE befindet; entlang dieser Ebene kann der Körper frei gleiten. Die Gestalt der Rinne soll so bestimmt werden, dass ein vollkommen glatter, materieller Punkt in ihr tautochron schwingen kann, wenn die Zeit einer Schwingung gegeben ist.

Es sei P der Ort des materiellen Punktes in der Rinne zu einer beliebigen Zeit t. Ziehe PN vertikal, die horizontale Ebene im Punkte N treffend, welcher Punkt in der Linie OE, dem Schnitte der vertikalen Ebene durch die Rinne mit der horizontalen Ebene, liegt. Ziehe durch den tiefsten Punkt A der Rinne eine horizontale Linie AM, AA' vertikal. Lasse sein O einen festen Punkt in OE, $OA' = x'$, $ON = x_1$, $PN = y_1$, $AM = x$, $PM = y$, k_1, k die Anfangswerte von y_1, y, $m =$ der Masse des materiellen Punktes, $m' =$ derjenigen des Körpers.



Figur 88.

Damit ist zufolge des Prinzipes der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, weil keine Kräfte auf den materiellen Punkt und den Körper parallel zu OE wirken,

$$m' \frac{dx'}{dt} + m \frac{dx_1}{dt} = 0. \tag{1}$$

Ferner ist durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$m'\left(\frac{d x'}{d t}\right)^2 + m\left\{\left(\frac{d x_1}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y_1}{d t}\right)^2\right\} = 2 m g (k_1 - y_1). \tag{2}$$

Die geometrischen Nebenbedingungen sind

$$\frac{d x_1}{d t} = \frac{d x'}{d t} + \frac{d x}{d t}, \quad (3) \qquad \text{und} \quad k_1 - y_1 = k - y, \quad \text{d. i.} \quad \frac{d y_1}{d t} = \frac{d y}{d t}. \tag{4}$$

Mit (1) und (3) erhalten wir

$$\frac{d x_1}{d t} = \frac{m'}{m + m'}\frac{d x}{d t}, \qquad \frac{d x'}{d t} = -\frac{m}{m + m'}\frac{d x}{d t}. \tag{5}$$

Folglich sehen wir mit (2), (4), (5), dass

$$\frac{m'}{m + m'}\left(\frac{d x}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d t}\right)^2 = 2 g (k - y),$$

und daher ist, wenn τ die Zeit einer Halbschwingung bedeutet,

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{2 g}} \int_k^0 \frac{\sqrt{\frac{m'}{m + m'}\left(\frac{d x}{d y}\right)^2 + 1}}{\sqrt{k - y}}\, d y. \tag{6}$$

Dieser Wert von τ muss von k unabhängig sein, damit der materielle Punkt tautochron schwingen kann, und daher müssen wir haben, weil es nötig ist, dass der Coëfficient von dy von der ersten Dimension in y und k ist,

$$\sqrt{\frac{m'}{m + m'}\left(\frac{d x}{d y}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{\alpha}{y}}, \tag{7}$$

wo α eine konstante Grösse bedeutet, folglich

$$\frac{d x}{d y} = \sqrt{\frac{m + m'}{m}}\sqrt{\frac{\alpha - y}{y}},$$

und demnach, durch Integration,

$$x = \sqrt{\frac{m + m'}{m'}}\left\{(\alpha y - y^2) + \frac{1}{2}\alpha \, arc\left(vers = \frac{2 y}{\alpha^2}\right)\right\}. \tag{8}$$

Aber aus (6) und (7) bekommen wir

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{2 g}}\int_k^0 \frac{\sqrt{\alpha}\, d y}{\sqrt{k y - y^2}} = \pi\sqrt{\frac{\alpha}{2 g}}, \qquad \alpha = \frac{2 g \tau^2}{\pi^2}.$$

Mithin ergiebt sich mit (8) als Gleichung der Rinne

$$x = \sqrt{\frac{m + m'}{m'}}\left\{\sqrt{\frac{2 g \tau^2}{\pi^2} y - y^2} + \frac{g \tau^2}{\pi^2}\, arc\left(vers = \frac{\pi^2 y}{g \tau^2}\right)\right\}.$$

Clairaut, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1742, p. 41.
Euler, Opuscula, de motu corporum tubis mobilibus inclusorum, p. 48.

2. In einer glatten, kreisförmigen Röhre befinden sich zwei gleiche materielle, durch einen elastischen Faden miteinander verbundene Punkte,

die natürliche Länge des Fadens ist gleich $\frac{2}{3}$ der Länge des Umfanges der Röhre. Der Faden wird so weit gedehnt, bis die materiellen Punkte in Berührung sind, und sodann die Röhre auf einem glatten, horizontalen Tische sich selbst überlassen. Welches ist das Verhältnis der kinetischen Energie der zwei materiellen Punkte zu der auf das Strecken des Fadens verwendeten Arbeit, wenn der Faden seine natürliche Länge wieder einnimmt?

Es sei m die Masse eines jeden der zwei materiellen Punkte, m' diejenige der Röhre, OX die Bewegungslinie des Schwerpunktes der Röhre, O ein fester Punkt, C die Lage des Mittelpunktes der Röhre zu einer beliebigen Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung, P die entsprechende Lage eines der materiellen Punkte, $OC = x$, $\sphericalangle PCX = \vartheta$, $CP = a$.

Vermöge des Prinzipes der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes haben wir hier

$$2m\frac{d}{dt}(x + a\cos\vartheta) + m'\frac{dx}{dt} = 0,$$

woher

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{d\vartheta}{dt}} = \frac{2ma\sin\vartheta}{2m + m'}. \tag{1}$$

Ferner ist zufolge des Prinzipes der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$2m\left\{\frac{d}{dt}(x + a\cos\vartheta)\right\}^2 + 2m\left\{\frac{d}{dt}(a\sin\vartheta)\right\}^2 + m'\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4a\int_\vartheta^\pi T\,d\vartheta.$$

Die kinetische Energie der zwei Punkte, das ist die halbe lebendige Kraft, ist gleich

$$m\left\{\frac{d}{dt}(x + a\cos\vartheta)\right\}^2 + m\left\{\frac{d}{dt}(a\sin\vartheta)\right\}^2.$$

Folglich ist das Verhältnis der kinetischen Energie der beiden materiellen Punkte zu der beim Dehnen des Fadens gethanen Arbeit, nämlich $2a\int_\vartheta^\pi Td\vartheta$,

gleich
$$\frac{2m\left\{\frac{d}{dt}(x + a\cos\vartheta)\right\}^2 + 2m\left\{\frac{d}{dt}(a\sin\vartheta)\right\}^2}{2m\left\{\frac{d}{dt}(x + a\cos\vartheta)\right\}^2 + 2m\left\{\frac{d}{dt}(a\sin\vartheta)\right\}^2 + m'\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

welches durch (1) gleich ist

$$\frac{2m(am'\sin\vartheta)^2 + 2m\left\{a\cos\vartheta(2m + m')\right\}^2}{2m\left\{(am'\sin\vartheta)\right\}^2 + 2m\left\{a\cos\vartheta(2m + m')\right\} + m'(2ma\sin\vartheta)^2}$$

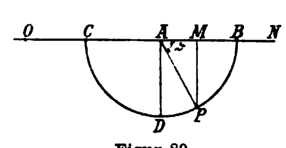
und daher, weil $\vartheta = \frac{2}{3}\pi$, ist dies gleich

$$\frac{2(m^2 + m m' + m'^2)}{(2m + m')(2m' + m)}.$$

1 und 2. Walton, p. 537—540.

3. Eine starre, ruhende, materielle Curve von der Gestalt eines Halbkreises ist mit ihren Enden mittelst Ringen an einem glatten, horizontalen, festen Stabe aufgehangen, entlang welchem eine Bewegung stattfinden kann. Eine kleine Kugel ist auf dieser Curve beweglich, sie befindet sich anfangs in einem der Endpunkte des Halbkreises und sinkt unter der Wirkung der Schwerkraft. Welches ist die Geschwindigkeit der Kugel, relativ zu der Curve, in einem beliebigen Bahnpunkte, während ihres Sinkens?

Es sei (Fig. 89) ON der feste horizontale Stab, BDC die in den Punkten B, C an dem Stabe aufgehangene materielle Curve, P die Lage der Kugel zu einer beliebigen Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung an, A der Mittelpunkt des Halbkreises, $PM \perp ON$, O ein fester Punkt in dem Stabe, m die Masse der Kugel, m' diejenige des Halbkreises, $OM = x_1$, $OA = x'$, $AM = x$, $MP = y_1 = y$, $\measuredangle NAP = \vartheta$, $AB = a = AC =$ dem Radius des Halbkreises.



Figur 89.

Durch das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes und das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft haben wir hier die zwei Bedingungen

$$m'\frac{dx'}{dt} + m\frac{dx_1}{dt} = 0, \tag{1}$$

$$m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + m\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right\} = 2mgy. \tag{2}$$

Die geometrischen Nebenbedingungen sind

$$y^2 = a^2 - x^2, \qquad x = a\cos\vartheta, \qquad y = a\sin\vartheta, \qquad x_1 = x' + x, \tag{3}$$

welche die Relationen geben

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{dx}{dt}, \quad (4) \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\cdot\frac{dx}{dt}. \quad (5)$$

Durch (1) und (4) erhalten wir

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{m}{m+m'}\cdot\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{m'}{m+m'}\cdot\frac{dx}{dt}, \tag{6}$$

sowie durch (2) und (6)

$$\frac{m'}{m+m'}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2gy,$$

welche Gleichung mit (5) und (3) übergeht in

$$\left\{\frac{m'}{m+m'}+\frac{x^2}{a^2-x^2}\right\}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2gy,\ \left\{\frac{m'+m\cos^2\vartheta}{(m+m')\sin^2\vartheta}\right\}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2ag\sin\vartheta,$$

so dass $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{2ag(m+m')\sin^3\vartheta}{m'+m\cos^2\vartheta}$ oder $\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\sin^2\vartheta}=\frac{2ag(m+m')\sin\vartheta}{m'+m\cos^2\vartheta}$.

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber das Quadrat der Geschwindigkeit v der Kugel auf der Curve, wodurch wir endlich bekommen

$$v=\sqrt{\frac{2ag(m+m')\sin\vartheta}{m'+m\cos^2\vartheta}},$$

als den für die relative Geschwindigkeit der Kugel verlangten Wert.

Die horizontale Geschwindigkeit des ganzen Systemes ist

$$\frac{dx'}{dt}=-\frac{m}{m+m'}\left(\frac{dx}{dt}\right)=-m\sin\vartheta\sqrt{\frac{2ag\sin\vartheta}{(m+m')(m'+m\cos^2\vartheta)}}.$$

4. Zwei gleiche, vollkommen rauhe Kugeln berühren sich im unstabilen Gleichgewichte, es stützt sich die untere auf eine vollkommen glatte horizontale Ebene und wird dem Systeme eine kleine Verschiebung erteilt. Welches ist die daraus folgende Bewegung, wenn wir voraussetzen, dass die Mittelpunkte der Kugeln sich in einer Ebene bewegen?

Es seien C, C' die Mittelpunkte der unteren und der oberen Kugel, welche sich in einem Punkte P berühren. Zufolge des Prinzipes der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes bewegt sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt P der beiden Kugeln in einer geraden Linie. Diese Linie wählen wir als Axe der y und die vertikale Ebene, in welcher die Schwerpunkte der Kugeln sich bewegen, als Ebene der xy mit dem Ursprunge in der festen horizontalen Ebene. Nun seien x, a die Coordinaten von C, x', y' diejenigen von C', ϑ bezeichne den spitzen Winkel, welchen CC' mit der Vertikalen macht, $CA, C'A'$ seien jene Radien der Kugeln, welche anfangs in derselben geraden Linie liegen. Die Winkel ACP und $A'C'P$ sind, weil die eine Kugel auf der anderen rollt, einander gleich und mögen mit φ bezeichnet werden, auch sei F die Reibung zwischen den Kugeln und M die Masse einer jeden Kugel.

Nun ist die lebendige Kraft der Kugel C gleich der lebendigen Kraft, welche zu verdanken der Translation, plus der lebendigen Kraft, welche hervorgeht aus der Rotation. Der erste Teil ist $M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, der zweite $Mk^2\left(\frac{d(\vartheta-\varphi)}{dt}\right)^2$, weil $\vartheta-\varphi$ der Winkel ist, den eine feste Linie CA in dem Körper mit der Vertikalen einschliesst, so dass die lebendige Kraft der Kugel C gleich

$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + Mk^2\left(\frac{d(\vartheta-\varphi)}{dt}\right)^2.$$

Gleicherweise ist die lebendige Kraft der Kugel C', da hier noch die Vertikalbewegung hinzukommt,

$$M\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + M\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + Mk^2\left(\frac{d(\vartheta+\varphi)}{dt}\right)^2.$$

Die einzige bewegende Kraft ist hier die Schwere, daher die Kräftefunktion

$$-M\int g\,dy' = M.C - Mgy'.$$

Mithin haben wir durch das Prinzip der lebendigen Kraft

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d(\vartheta-\varphi)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d(\vartheta+\varphi)}{dt}\right)^2 = 2C - 2gy'. \quad (1)$$

Indem wir weiter Momente um den Schwerpunkt einer jeden Kugel nehmen, erhalten wir

$$k^2\frac{d^2(\vartheta-\varphi)}{dt^2} = \frac{Fa}{M}, \quad (2) \qquad k^2\frac{d^2(\vartheta+\varphi)}{dt^2} = \frac{Fa}{M}. \quad (3)$$

Die geometrischen Nebenbedingungen sind

$$x = -a\sin\vartheta, \quad (4) \qquad x' = a\sin\vartheta, \quad (5) \qquad y' = a + 2a\cos\vartheta. \quad (6)$$

Damit ist die Bewegung des Systemes vollständig bestimmt.

Subtrahieren wir (2) von (3), so wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \quad \text{folglich} \quad \frac{d\varphi}{dt} = C.$$

Weil die Bewegung vom Ruhezustande aus beginnt, so ist $C = 0$, mithin $\frac{d\varphi}{dt}$ immer gleich Null, d. h. die zwei Kugeln bewegen sich so, als wenn sie fest mit einander verbunden wären.

Die Substitution der Werte von x, x', y' aus (4), (5), (6) in die Gleichung (1) liefert

$$(k^2 + a^2 + a^2\sin^2\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = ga(C - \cos\vartheta).$$

Der Anfangswert von ϑ ist Null, ebenso derjenige von $\frac{d\vartheta}{dt}$, folglich ist die Konstante $C = 1$ und mithin

$$(k^2 + a^2 + a^2\sin^2\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = ga(1 - \cos\vartheta).$$

Diese Gleichung bestimmt die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ und erhalten wir mit $k^2 = \frac{2}{5}a^2$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{5g(1-\cos\vartheta)}{a(7+5\sin^2\vartheta)}}.$$

In dem Augenblicke, wo die obere Kugel die horizontale Ebene erreicht, ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, folglich die Winkelgeschwindigkeit in diesem Momente

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{a g}{k^2 + 2a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}\frac{g}{a}}.$$

5. Das höchste Ende eines gleichförmigen Stabes ist an einen Ring gefesselt, welcher entlang einem glatten, horizontalen, festen Stab beweglich ist. Der erste Stab ruht anfangs in einer vertikalen Lage und es wird ihm eine Winkelgeschwindigkeit in der vertikalen Ebene erteilt, welche den festen Stab enthält. Es soll die Winkelgeschwindigkeit dieses Stabes für irgend eine daraus folgende Lage bestimmt werden.

$2a$ sei die Länge des beweglichen Stabes, ω die anfängliche Winkelgeschwindigkeit, ω' seine Winkelgeschwindigkeit, wenn er unter einem Winkel ϑ zu der Vertikalen geneigt ist, dann wird gefunden werden

$$\omega'^2 = \frac{a\omega^2 - 12\, g \sin^2\frac{\vartheta}{2}}{a(1 + 3\sin^2\vartheta)}.$$

6. Eine dünne, sphärische Schale vom Halbmesser a stützt sich auf eine glatte horizontale Ebene, ein materieller Punkt von einer Masse gleich derjenigen der Schale befindet sich in dem tiefsten Punkte ihrer inneren Fläche, welche glatt ist. Zu welcher Höhe kann der materielle Punkt aufsteigen, wenn der Schale eine horizontale Geschwindigkeit $2\sqrt{ag}$ erteilt wird?

Der materielle Punkt wird bis zur Höhe des Mittelpunktes der Schale aufsteigen und dann wieder sinken.

7. Eine enge Röhre von der Gestalt einer gemeinen Helix (Schraubenlinie) läuft rund um einen aufrechten Kreiscylinder, welcher anfangs in Ruhe ist. Der Cylinder wird von zwei glatten festen Stäben durchbohrt, die parallel zu einander und horizontal laufen. Ein materieller Punkt befindet sich innerhalb der Röhre in einem Abstande von der Cylinderaxe, welcher parallel zu den Stäben ist. Beweise, dass die Geschwindigkeiten, welche der Cylinder erlangt hat, bei zwei aufeinander folgenden Ankünften des materiellen Punktes in Punkten grössten Abstandes von der Ebene, in welcher die Axe des Cylinders sich bewegt, ihre Maximalwerte besitzen werden, wenn die Neigung der Helix gegen den Horizont gleich ist

$$arc\left(tg = \sqrt{\frac{m'}{m + m'}}\right),$$

wo m die Masse des materiellen Punktes, m' diejenige des Cylinders bezeichnet.

5—7. Walton, p. 540—541.

Dritte Abteilung.

Das Prinzip der Momente der Bewegungsgrössen.

I. Ein materielles System bewegt zu irgend einer Zeit t_0 unter gegebenen Verhältnissen und zu der Zeit t_1 bewegt sich dasselbe unter anderen Verhältnissen, wobei nicht in Betracht kommt, in welcher Weise die

Änderung dieser Verhältnisse durch die Kräfte hervorgebracht wird. Welche Relationen bestehen zwischen diesen zwei Bewegungen?

Wir haben hier zu ermitteln die Änderungen, welche in der Zeit $t_1 - t_0$ hervorgebracht werden. Wenn diese Zeit $t_1 - t_0$ sehr klein ist und die Kräfte sehr gross sind, so gelangen wir zu dem allgemeinen Probleme des Stosses.

Sind (x, y, z) die Coordinaten eines materiellen Punktes des auf ein beliebig im Raume gelegenes, festes, rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogenen beweglichen Systemes, X, Y, Z die Componentensummen der an dem Punkte wirkenden Kräfte parallel zu den Coordinatenaxen, dann ist nach dem Prinzipe von D'Alembert

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} - \Sigma X = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} - \Sigma Y = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} - \Sigma Z = 0. \quad (1)$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(yZ - zY), \quad \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(zX - xZ), \\ &\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt}\right) = \Sigma(xY - yX). \end{aligned}\right\} (2)$$

Diese Gleichungen werden gewöhnlich in den bequemeren Formen geschrieben

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dx}{dt} = \Sigma X, \quad \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dy}{dt} = \Sigma Y, \quad \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dz}{dt} = \Sigma Z, \quad (1')$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \Sigma(yZ - zY), \quad \frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \Sigma(zX - xZ), \\ &\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma(xY - yX). \end{aligned}\right\} (2')$$

Die Integration der Gleichungen (1') und (2') von $t = t_0$ bis $t = t_1$ giebt

$$\left[\Sigma m\frac{dx}{dt}\right]_{t_0}^{t_1} = \Sigma\int_{t_0}^{t_1} X\,dt, \quad \left[\Sigma m\frac{dy}{dt}\right]_{t_0}^{t_1} = \Sigma\int_{t_0}^{t_1} Y\,dt, \quad \left[\Sigma m\frac{dz}{dt}\right]_{t_0}^{t_1} = \Sigma\int_{t_0}^{t_1} Z\,dt.$$

$$\left[\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right]_{t_0}^{t_1} = \Sigma\int_{t_0}^{t_1}(yZ - zY)\,dt; \quad \left[\Sigma m\left(Z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\right]_{t_0}^{t_1}$$

$$= \Sigma\int_{t_0}^{t_1}(zX - xZ)\,dt, \quad \left[\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right]_{t_0}^{t_1} = \Sigma\int_{t_0}^{t_1}(xY - yX)\,dt.$$

Denken wir uns eine Kraft P wirke an einem der sich bewegenden materiellen Punkte m während irgend einer Zeit $t_1 - t_0$ parallel zur Axe der z, diese Zeit in die gleichen Intervalle dt geteilt, von dem Mittelpunkte eines jeden dieser Intervalle aus, d. i. von der Lage des Punktes m in diesem Augenblicke, eine gerade Linie gezogen, welche den Wert von Pdt in diesem Augenblicke nach Richtung und Grösse darstellt, dann ist die nach den Regeln der Statik konstruierte Resultante dieser Kräfte

die ganze in der Zeit $t_1 - t_0$ aufgewendete Kraft. Daher sind $\int_{t_0}^{t_1} X\,dt$, $\int_{t_0}^{t_1} Y\,dt$, $\int_{t_0}^{t_1} Z\,dt$ die ganzen Kräfte parallel zu den Coordinatenaxen.

Durch diese Gleichungen gelangen wir zu den Sätzen:

„Die durch irgend welche Kräfte in den Componenten des Bewegungsmomentes irgend eines Systemes in irgend einer Zeit hervorgebrachte Änderung ist gleich den entsprechenden Kraftcomponenten in diesen Richtungen."

„Die durch irgend welche Kräfte in dem Momente der Bewegungsgrösse des Systemes um irgend eine gerade Linie in einer beliebigen Zeit hervorgebrachte Änderung ist gleich dem ganzen Momente dieser Kräfte um diese gerade Linie."

Es ist nicht nötig diese zwei Sätze von den Bewegungsgleichungen abzuleiten. Mit Hilfe des Prinzipes von D'Alembert können wir leicht zu folgendem allgemeinen Theoreme gelangen.

„Wenn das Bewegungsmoment irgend eines materiellen Punktes eines in Bewegung begriffenen Systemes nach den Regeln der Statik zusammengesetzt und zerlegt wird, wie wenn es eine an dem materiellen Punkte in seiner augenblicklichen Lage wirkende Kraft wäre, dann sind die Bewegungsmomente aller materiellen Punkte zu einer beliebigen Zeit t_1 zusammen äquivalent den Bewegungsmomenten zu irgend einer vorausgegangenen Zeit t_0 plus den ganzen Kräften, welche während dieser Zeit gewirkt haben."

1. Ein einzelner materieller Punkt von der Masse m beschreibe eine Bahn um ein Kraftcentrum O. v, v' seien seine Geschwindigkeiten in zwei beliebigen Punkten seines Kurses. Wird angenommen, dass mv, mv' entlang den Tangenten an die Bahn in den Punkten P, P' wirken, dann würde die entgegengesetzte Grösse von mv' im Gleichgewichte sein mit mv und der ganzen von P bis P' wirkenden Centralkraft. Sind p, p' die Längen der Perpendikel von O auf die Tangenten in P, P', dann ist, indem wir Momente um O nehmen, $vp = v'p'$, d. h. vp ist während der ganzen Bewegung konstant. Schneiden sich die Tangenten im Punkte T, so muss die ganze aufgewendete Centralkraft entlang der Linie TO wirken und es kann dieselbe durch v, v' mit Hilfe der Regeln für die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten ausgedrückt werden.

2. Drei materielle Punkte bewegen sich aus dem Ruhezustande, einander anziehend, unter der Wirkung keiner äusseren Kraft.

Die Bewegungsmomente der drei materiellen Punkte in irgend einem Zeitmomente sind zusammen äquivalent den drei anfänglichen Bewegungsmomenten. Folglich müssen sich die Tangenten ihrer Bahnen in irgend

einem Zeitmomente in einem gewissen Punkte O schneiden, und wenn Parallellinien so zu ihren Bewegungsrichtungen gezogen werden, dass sie ein Dreieck bilden, so sind die Bewegungsmomente der drei materiellen Punkte proportional zu den Seiten dieses Dreieckes. Wenn sich n materielle Punkte gegenseitig anziehen, kann auf demselben Wege gezeigt werden, dass die n durch mv, $m'v'$, $m''v''$,... dargestellten Kräfte im Gleichgewichte sind, und wenn, von einem beliebigen Punkte beginnend, Parallele zu den Bewegungsrichtungen gezogen werden, die den Bewegungsmomenten der materiellen Punkte proportional sind, so werden diese ein geschlossenes Polygon bilden.

Sind F, F', F'' die resultierenden Attraktionen auf die drei materiellen Punkte, dann schneiden sich die Richtungen, in welchen die Kräfte F, F', F'' wirken, auch in einem Punkte. Bezeichnen nämlich X, Y, Z die Wirkungen zwischen den materiellen Punkten m', m''; m'', m; m', m resp., so ist F die Resultante von $-Y$ und Z, F' diejenige von $-Z$ und X, F'' diejenige von $-X$ und Y. Folglich sind die drei Kräfte F, F', F'' im Gleichgewichte, es müssen sich daher ihre Richtungslinien in einem Punkte O' schneiden, und ist die Grösse einer jeden proportional dem Sinus des Winkels zwischen den zwei anderen Kräften. Im allgemeinen ist dieser Punkt nicht fest und fällt nicht mit dem Punkte O zusammen. Wenn die Attraktion proportional der Distanz ist, dann fallen die beiden Punkte O, O' mit dem Schwerpunkte S des Systemes zusammen und sind während seiner ganzen Bewegung im Raume fest. Nach einem Satze der Statik ist nämlich mit diesem Attraktionsgesetze die ganze Attraktion eines Systemes materieller Punkte auf einen dieser Punkte dieselbe, als wenn das ganze System in seinem Schwerpunkte vereinigt wäre. Folglich fällt O' mit S zusammen. Weil jeder materielle Punkt anfangs keine Geschwindigkeit besitzt, so ist die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes gleich Null, es ist daher S während der ganzen Bewegung ein fester Punkt. Weil ferner jeder materielle Punkt seine Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnt und nach einem festen Punkte S getrieben wird, so wird er sich in derjenigen geraden Linie bewegen, welche seine Anfangslage mit dem Schwerpunkte S des Systemes verbindet. Folglich fällt O mit S zusammen. Wenn die Attraktion proportional der Distanz ist, so beweist die Lehre von der Bewegung eines Punktes, dass die Fallzeit eines Punktes aus der Ruhelage nach dem Centrum unabhängig von dem Anfangsabstande des Punktes vom Centrum ist. Daher werden alle materiellen Punkte des Systemes gleichzeitig in S ankommen und sich daselbst treffen. Bezeichnet Σm die Summe der Massen, gemessen durch ihre Attraktionen in der gebräuchlichen Weise, so ist diese Zeit $\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{\Sigma m}}$.

3. Drei materielle Punkte von den Massen m, m', m'' ziehen sich gleichzeitig einander an und sind so geworfen, dass das Dreieck, welches durch die geradlinige Verbindung ihrer Lagen in einem beliebigen Zeitmomente der Bewegung entsteht, stets ähnlich ist dem Dreiecke, dessen Eckpunkte die Anfangslagen dieser Punkte sind. Welches sind die Wurfbedingungen?

Der Schwerpunkt des Systemes wird hier entweder in Ruhe bleiben, oder sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit in einer geraden Linie bewegen. Wir nehmen deshalb an, dass der Schwerpunkt in Ruhe bleibt, und können sodann die Wurfbedingungen dadurch verallgemeinern, dass wir an jedem materiellen Punkte noch eine Geschwindigkeit anbringen, welche parallel zu der Richtung ist, in welcher wir den Schwerpunkt sich zu bewegen wünschen. Es sei O der Schwerpunkt, P, P', P'' seien die Lagen der materiellen Punkte zu einer beliebigen Zeit t. Hier sind die Längen OP, OP', OP'' stets proportional und ihre Winkelgeschwindigkeiten einander gleich infolge der Bedingungen der Aufgabe. Bezeichnen wir die Distanzen OP, OP', OP'' mit r, r', r'', ihre gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit mit n, so haben wir, weil das Moment der Bewegungsgrössen des Systemes um O immer dasselbe bleibt,

$$m r^2 n + m' r'^2 n + m'' r''^2 n = C.$$

Weil die Verhältnisse $r : r' : r''$ konstant sind, so folgt aus dieser Gleichung, dass $m r^2 n$ eine konstante Grösse ist, daher durchfährt OP in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Die resultierende Kraft am Punkte P ist mithin nach O gerichtet.

Bezeichnen $\varrho, \varrho', \varrho''$ die Seiten $P'P''$, $P''P$, PP' des durch die materiellen Punkte gebildeten Dreieckes und ist das Attraktionsgesetz $\frac{\text{Masse}}{(\text{Abstand})^k}$, dann haben wir, weil die resultierende Attraktion von m', m'' auf m durch den Punkt O geht,

$$\frac{m'}{\varrho''^k} \sin P'PO = \frac{m''}{\varrho'^k} \sin P''PO,$$

und weil O der Schwerpunkt des Systemes ist

$$m' \varrho'' \sin P'PO = m'' \varrho' \sin P''PO.$$

Folglich liegen die drei materiellen Punkte entweder in einer geraden Linie, oder es ist $\varrho''^{k+1} = \varrho'^{k+1}$. Mit $k = -1$ ist das Attraktionsgesetz dasjenige der Distanz. Ist k nicht $= -1$, so haben wir $\varrho' = \varrho''$, d. h. es muss dann das Dreieck gleichseitig sein.

Wird umgekehrt angenommen, dass die materiellen Punkte in Richtungen geworfen werden, welche gleiche Winkel mit ihren Entfernungen von dem Schwerpunkte machen, mit diesen Distanzen proportionalen Geschwindigkeiten, und dass auch die resultierenden Attraktionen nach dem

Schwerpunkte proportional den Abständen sind, dann werden in allen drei Fällen dieselben Bedingungen am Ende einer Zeit dt genügen und so fort. Die drei materiellen Punkte werden daher ähnliche Bahnen um den Schwerpunkt in einer ähnlichen Weise beschreiben.

Es werde zuerst angenommen, dass die drei materiellen Punkte in einer geraden Linie sich befinden, wobei m' zwischen m und m'', O zwischen m und m' liegen mag. Weil die Attraktion auf irgend einen materiellen Punkt proportional seinem Abstande von O sein muss, so müssen die Attraktionen

$$\frac{m'}{(PP')^k}+\frac{m''}{(PP'')^k},\quad \frac{m''}{(P'P')^k}-\frac{m}{(PP')^k},\quad -\frac{m}{(PP'')^k}-\frac{m'}{(P'P'')^k}$$

proportional den Distanzen OP, OP', OP'' sein. Weil $\Sigma m OP = 0$, so machen diese zwei Gleichungen eine im ganzen aus. Nun haben wir

$$(m+m'+m'')OP = m'PP'+m''PP'+m''P'P'' = \left\{m'+m''\left(1+\frac{P'P''}{PP'}\right)\right\}PP',$$

$$(m+m'+m'')\,OP' = -m\,PP'+m''P'P'' = \left(-m+m''\frac{P'P''}{PP'}\right)PP',$$

oder, mit $\dfrac{P'P''}{PP'}=z$,

$$\frac{OP}{PP'}=\frac{m'+m''(1+z)}{m+m'+m''},\quad \frac{OP'}{PP'}=\frac{-m+m''z}{m+m'+m''}.$$

Daraus folgt

$$\frac{OP}{OP'}=\frac{m'+m''(1+z)}{-m+m''z}=\frac{\dfrac{m'}{(PP')^k}+\dfrac{m''}{(PP'')^k}}{\dfrac{m''}{(P'P')^k}-\dfrac{m}{(PP')^k}}=\frac{m'+\dfrac{m''}{\left(\dfrac{PP''}{PP'}\right)^k}}{\dfrac{m''}{\left(\dfrac{P'P'}{PP'}\right)^k}-m}=\frac{m'-\dfrac{m''}{(1+z)^k}}{\dfrac{m''}{z^k}-m},$$

so dass

$$\left(m'-\frac{m''}{(1+z)^k}\right)(-m+m''z)=\left(\frac{m''}{z^k}-m\right)\left\{m'+m''(1+z)\right\}.$$

Das erhaltene Resultat stimmt mit dem durch Laplace gegebenen überein, derselbe betrachtete zuerst dieses Problem.

In dem Falle, in welchem die Attraktion dem Naturgesetze folgt, ist $k=2$ und die Gleichung wird

$$mz^2\{(1+z)^3-1\}-m'(1+z)^2(1-z^3)-m''\{(1+z)^3-z^3\}=0.$$

Dieses ist eine Gleichung des fünften Grades und sie hat daher immer eine reelle Wurzel. Die linke Seite der Gleichung hat entgegengesetzte Zeichen, wenn $z=0$ und $z=\infty$, folglich ist diese reelle Wurzel positiv. Es ist daher immer möglich, die drei Massen so zu werfen, dass sie in einer geraden Linie bleiben können. Laplace bemerkt, dass wenn m die

Sonne, m' die Erde und m'' der Mond ist, sehr nahe $z = \sqrt[3]{\frac{m'+m''}{3m}} = \frac{1}{100}$ ist. Wenn ursprünglich die Erde und der Mond sich in derselben geraden Linie mit der Sonne in Abständen von der Sonne proportional zu 1 und $1 + \frac{1}{100}$ befunden haben würden, und wenn ihre Anfangsgeschwindigkeiten parallel und proportional zu jenen Distanzen gewesen wären, so würde der Mond stets in Opposition zu der Sonne sein. Der Mond würde dann für ein Stadium continuierlicher Verfinsterung zu weit entfernt gewesen sein, so dass er sich jede Nacht als Vollmond gezeigt hätte.

Liouville hat in den Additions à la Connaissance des Temps, 1845, gezeigt, dass eine solche Bewegung unstabil sein würde.

Die Bahnen der materiellen Punkte werden ähnliche Ellipsen sein, ihr Schwerpunkt wird mit einem gemeinsamen Brennpunkte zusammenfallen.

Ferner sei das Attraktionsgesetz dasjenige der Distanz. In diesem Falle ist die Attraktion auf jeden materiellen Punkt dieselbe, als wenn alle drei materiellen Punkte in dem Schwerpunkte vereinigt wären. Jeder materielle Punkt wird eine Ellipse beschreiben, diesen Punkt zum Centrum in derselben Zeit habend. Die materiellen Punkte sind so zu werfen, dass die Wurfgeschwindigkeiten proportional den Anfangsabständen vom Schwerpunkte sind und die Wurfrichtungen gleiche Winkel mit jenen Distanzen machen.

Drittens werde angenommen, dass die materiellen Punkte die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreieckes seien. Die resultierende Kraft an dem materiellen Punkte m ist

$$\frac{m'}{\varrho''^k} \cos P'PO + \frac{m''}{\varrho'^k} \cos P''PO.$$

Die Bedingung, dass die an den materiellen Punkten wirkenden Kräfte proportional ihren Distanzen von O sind, zeigt, dass das Verhältnis der Kraft zu dem Abstande OP für alle Punkte dasselbe ist. Weil

$$m' \varrho'' \cos P'PO + m'' \varrho' \cos P''PO = (m + m' + m'')\, OP$$

ist, so ist es klar, dass der Bedingung anfangs genügt wird, wenn $\varrho = \varrho' = \varrho''$. Folglich werden, durch denselben Schluss wie vorhin, die materiellen Punkte immer in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreieckes bleiben, wenn sie mit gleichen Geschwindigkeiten in Richtungen geworfen werden, die gleiche Winkel mit OP, OP', OP'' resp. machen.

4. Eine Platte von beliebiger Gestalt bewegt sich in ihrer eigenen Ebene in irgend einer Weise und es wird plötzlich ein beliebiger Punkt O in ihr fest. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit der Platte um O?

Es bewege sich in dem Augenblicke vorher, ehe der Punkt O fest wurde, der Schwerpunkt S der Platte mit der Geschwindigkeit v; p sei die Länge des Perpendikels von O auf die Bewegungsrichtung, ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um seinen Schwerpunkt, ω' diejenige um O in dem Augenblicke darauf, wo der Punkt O fest geworden ist, Mk^2 das Trägheitsmoment der Platte um den Schwerpunkt S, $OS = r$.

Die Änderung in der Bewegung der Platte wird durch Impulsivkräfte hervorgebracht, welche während einer kurzen Zeit $t_1 - t_0$ wirken, und besitzen diese Kräfte kein Moment um O, so dass das Moment der Bewegungsgrösse gerade vor und gerade nach dem Zeitmomente, in welchem der Punkt O fest wird, dasselbe ist. In dem Augenblicke vorher, ehe O fest wird, ist das Moment der Bewegungsgrösse um S $Mk^2\omega$ und das Moment der Bewegungsgrösse der ganzen im Schwerpunkte vereinigten Masse der Platte Mvp, folglich ist das ganze Moment der Bewegungsgrösse gleich $Mk^2\omega + Mvp$. In dem Augenblicke darauf, wo O fest geworden ist, ist das Moment der Bewegungsgrösse um O $M(k^2 + r^2)\omega'$. Mithin erhalten wir die Gleichung

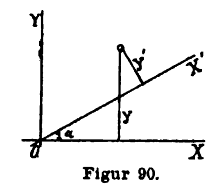
$$M(k^2 + r^2)\omega' = M(k^2\omega + Mvp),$$

woraus sich für die verlangte Winkelgeschwindigkeit ergiebt

$$\omega' = \frac{k^2\omega + vp}{k^2 + r^2}$$

5. Eine Platte von beliebiger Gestalt dreht sich um eine in ihrer Ebene gelegene Axe OX mit einer Winkelgeschwindigkeit ω. Plötzlich wird diese Axe frei und eine andere ebenfalls in ihrer Ebene gelegene Axe OX' fest. Welches ist die neue Winkelgeschwindigkeit ω' um OX'?

Die Änderung in der Bewegung der Platte wird durch die Wirkung von Impulsivkräften hervorgebracht, welche dadurch hervorgehen, dass die Axe OX' plötzlich fest wird. Diese wirken an Punkten, welche in OX' gelegen sind und haben daher kein Moment um diese Axe. Bezeichnet $d\sigma$ ein beliebiges Element der Fläche der Platte, y seinen Abstand von OX, y' denjenigen von OX' (Fig. 90), dann sind ωy, $\omega' y'$ die Geschwindigkeiten von $d\sigma$ gerade vor und augenblicklich nach dem Stosse. Die Momente der Bewegungsgrösse um OX' gerade von und eben nach dem Stosse sind daher $yy'\omega\, d\sigma$ und $y'^2\omega'\, d\sigma$.



Figur 90.

Summieren wir nun für die ganze Fläche, so bekommen wir die Gleichung

$$\omega' \Sigma y'^2\, d\sigma = \omega \Sigma y y'\, d\sigma. \tag{1}$$

Sind die Axen OX, OX' parallel, so liegt ihr Schnittpunkt im Unendlichen, und ergiebt sich, wenn h den Abstand der beiden Axen bezeichnet, da dann $y' = y - h$ ist, in diesem Falle

$$\omega' \Sigma y'^2 d\sigma = \omega \left\{ \Sigma y^2 d\sigma - h \Sigma y d\sigma \right\}.$$

Bezeichnen A, A' die Trägheitsmomente der Platte für die Axen OX, OX' resp. ist $\bar{y}$ der Abstand des Schwerpunktes der Platte von OX und M ihre Masse, so erhalten wir

$$A'\omega' = \omega(A - Mh\bar{y}),$$

folglich
$$\omega' = \omega \cdot \frac{A - Mh\bar{y}}{A'}.$$

Schneiden sich die zwei Axen OX, OX' in einem endlichen Punkte O unter einem Winkel α, dann ist $y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha$, folglich, wenn wir in (1) substituieren,

$$\omega' \Sigma y'^2 d\sigma = \omega \cos\alpha \Sigma y^2 d\sigma - \omega \sin\alpha \Sigma xy d\sigma,$$

und noch $\Sigma mxy d\sigma = F$ setzen,

$$A'\omega' = \omega(A\cos\alpha - F\sin\alpha),$$

womit
$$\omega' = \omega \frac{A\cos\alpha - F\sin\alpha}{A}.$$

6. Ein Körper bewegt sich frei im Raume in einer bekannten Weise. Plötzlich wird eine gerade Linie oder ein Punkt in dem Körper fest. Welches ist die daraus folgende anfängliche Bewegung?

Es ist augenscheinlich, dass alle impulsiven Wirkungen auf den Körper durch die feste gerade Linie oder durch den festen Punkt gehen. Folglich werden die Momente der Bewegungsgrösse des Körpers um die feste Axe in dem ersten Falle, oder um irgend eine Axe durch den festen Punkt in dem zweiten Falle durch die Impulsivkräfte nicht alteriert.

Erstens. Es werde eine gerade Linie plötzlich fest. Diese Linie wollen wir als Axe der z nehmen. Es sei Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers um die Axe der z, Ω seine Winkelgeschwindigkeit um diese Axe in dem Augenblicke, nachdem sie fest geworden ist. Der freie Körper drehe sich mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_x, ω_y, ω_z um die drei Axen SX', SY', SZ' durch den Schwerpunkt S des Körpers, parallel zu den Coordinatenaxen, und es seien $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Coordinaten des Schwerpunktes. Dann ist, wenn C' das Trägheitsmoment des Körpers um SZ', die Grössen $\Sigma mz'x'$, $\Sigma mz'y'$ sich beziehen auf die Axen SX', SY', SZ',

$$C'\omega_z - (\Sigma mz'x')\omega_x - (\Sigma mz'y')\omega_y + M\left(\bar{x}\frac{d\bar{y}}{dt} - \bar{y}\frac{d\bar{x}}{dt}\right) = Mk^2\Omega.$$

Zweitens. Es werde ein Punkt O in dem sich bewegenden Körper plötzlich im Raume fest. Wir wählen irgend drei rechtwinkelige Axen OX, OY, OZ und drei parallele Axen SX', SY', SZ' durch den Schwerpunkt S des Körpers. Es seien ω_x, ω_y, ω_z die bekannten Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen SX', SY', SZ', ehe der

Punkt O fest wird, Ω_x, Ω_y, Ω_z die unbekannten Winkelgeschwindigkeiten um OX, OY, OZ, nachdem der Punkt O fest geworden ist. Dann haben wir die Relationen

$$A'\omega_x - (\Sigma\, m\, x'y')\,\omega_y - (\Sigma\, m\, x'z')\,\omega_z + \Sigma\, m\left(\bar{y}\frac{d\,\bar{z}}{d\,t} - \bar{z}\frac{d\,\bar{y}}{d\,t}\right)$$
$$= A\,\Omega_x - \Sigma\,(m\,x\,y)\,\Omega_y - \Sigma\,(m\,x\,z)\,\Omega_z,$$
$$B'\omega_y - (\Sigma\, m\,y'z')\,\omega_z - (\Sigma\, m\,y'x')\,\omega_x + \Sigma\, m\left(\bar{z}\frac{d\,\bar{x}}{d\,t} - \bar{x}\frac{d\,\bar{z}}{d\,t}\right)$$
$$= B\,\Omega_y - (\Sigma\, m\,y\,z)\,\Omega_y - (\Sigma\, m\,y\,x)\,\Omega_x,$$
$$C'\omega_z - (\Sigma\, m\,z'x')\,\omega_x - (\Sigma\, m\,z'y')\,\omega_y + \Sigma\, m\left(\bar{x}\frac{d\,\bar{y}}{d\,t} - \bar{y}\frac{d\,\bar{x}}{d\,t}\right)$$
$$= C\,\Omega_z - (\Sigma\, m\,z\,x)\,\Omega_x - (\Sigma\, m\,z\,y)\,\Omega_y.$$

Diese Gleichungen bestimmen Ω_x, Ω_y, Ω_z. Es ist augenscheinlich, dass dieselben stufenweise vereinfacht werden können, indem wir die Axen so wählen, dass eine der zwei Folgen OX, OY, OZ, oder OX', OY', OZ' zu Hauptaxen wird.

Wenn der Körper sich um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe SJ dreht, in dem Augenblicke bevor der Punkt O fest wird, so verschwinden die Glieder, welche die Coordinaten des Schwerpunktes enthalten, aus den Gleichungen. Die Gleichungen lassen dann leicht eine geometrische Interpretation zu. Die Gleichung des Momentalellipsoides für den Schwerpunkt ist

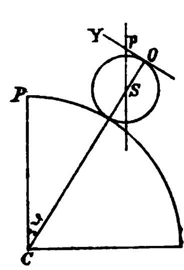
$$A'X^2 + B'Y^2 + C'Z^2 - 2\Sigma m y'z'YZ - 2\Sigma m z'x'ZX - 2\Sigma m x'y'XY = M\varepsilon^4.$$

Es ist daher klar, dass die linken Seiten dieser Gleichungen proportional den Richtungscosinus der Diametralebene einer geraden Linie sind, deren Richtungscosinus proportional zu ω_x, ω_y, ω_z sind. In derselben Weise sind, wenn wir das Momentalellipsoid für O konstruieren, die rechten Seiten proportional den Richtungscosinus der Axe (Ω_x, Ω_y, Ω_z). Also stehen die momentanen Rotationsaxen, gerade bevor und eben nachdem O fest geworden ist, in einer solchen Relation zu einander, dass ihre Diametralebenen bezüglich der Momentalellipsoide in S und O resp. parallel sind.

7. Eine Kugel ist in der Breite ϑ mit einem Punkte O ihrer Oberfläche aufgehangen und unter der Wirkung der Schwerkraft im Gleichgewichte. Plötzlich stockt die Rotation der Erde. Welches ist die Bewegung der Kugel?

Es sei (Fig. 91, S. 255) S der Schwerpunkt der Kugel, O ihr Aufhängepunkt, a ihr Halbmesser, C der Mittelpunkt der Erde. Die Figur denken wir uns so gezeichnet, dass die Kugel sich von dem Beobachter hinwegbewegt. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde, $CS = \mu\,a$,

dann ist, weil sich die Kugel um eine zu CP parallele Axe Sp dreht, die Winkelgeschwindigkeit der Erdaxe gleich ω, während der Schwerpunkt sich mit einer Geschwindigkeit $\mu a \sin\vartheta . \omega$ bewegt. Wir wählen OC, Op und das Perpendikel zu der Ebene OC, Op als Axen der x, y, z resp. und bezeichnen mit Ω_x, Ω_y, Ω_z die Winkelgeschwindigkeiten um dieselben gerade nach dem Augenblicke, wo die Rotation der Erde stockt. Die Winkelbewegungsmomente um OX für den Augenblick vor und diejenigen nach dem Stocken der Rotation der Erde sind einander gleich, so dass, wenn Mk^2 das Trägheitsmoment der Kugel um einen Diameter bezeichnet,



Figur 91.

$$Mk^2 \omega \cos\vartheta = Mk^2 \Omega_x.$$

Ferner sind auch die Winkelbewegungsmomente um OY gleich, weshalb

$$-Mk^2 \omega \sin\vartheta + M\mu a^2 \omega \sin\vartheta = M(k^2 + a^2)\Omega_y;$$

und schliesslich sind die Momente um OZ einander gleich, wodurch

$$0 = Mk^2 \Omega_z.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$\Omega_x = \omega \cos\vartheta, \qquad \Omega_y = \omega \sin\vartheta \frac{\mu a^2 - k^2}{a^2 + k^2} = \omega \sin\vartheta \frac{5\mu - 2}{7}, \qquad \Omega_z = 0.$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Kugel um ihre Momentanaxe ist daher

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_x{}^2 + \Omega_y{}^2 + \Omega_z{}^2)} = \omega \sqrt{\cos^2\vartheta + \left(\frac{5\mu - 2}{7}\right)^2 \sin^2\vartheta}.$$

Die invariable Ebene.

Ein bewegliches System, an dem keine äusseren Kräfte wirken, werde auf drei zu einander rechtwinkelige Coordinatenebenen bezogen und durch den gemeinschaftlichen Punkt dieser Ebenen werde eine weitere Ebene in beliebiger Richtung gelegt. Die von dem Fahrstrahle eines beliebigen Punktes des Systemes während der Zeit t beschriebene Fläche werde auf diese vier Ebenen projiziert und so werde für jeden materiellen Punkt des Systemes verfahren. Sind A_x, A_y, A_z die Projektionen der von dem Fahrstrahle eines beliebigen materiellen Punktes m des Systemes während der Zeit t durchfahrenen Fläche auf die Coordinatenebenen YZ, XZ, XY, dann bestehen zufolge des Prinzipes der Flächen für das ganze System die Relationen

$$c_1 t = 2\Sigma(mA_x), \qquad c_2 t = 2\Sigma(mA_y), \qquad c_3 t = 2\Sigma(mA_z).$$

Nun seien die Winkel, welche die vierte Ebene mit den Coordinatenebenen einschliesst, λ, μ, ν, so dass

$$\cos\lambda = \frac{\Sigma(m A_x)}{\Sigma(m A)}, \qquad \cos\beta = \frac{\Sigma(m A_y)}{\Sigma(m A)}, \qquad \cos\gamma = \frac{\Sigma(m A_z)}{\Sigma(m A)},$$

wo $$\left\{\Sigma(m A)\right\}^2 = \left\{\Sigma(m A_x)\right\}^2 + \left\{\Sigma(m A_y)\right\}^2 + \left\{\Sigma(m A_z)\right\}^2,$$

und es sei $$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = c^2,$$

dann ist $$2\,\Sigma(m A) = c\,t,$$

$$\cos\lambda = \frac{\Sigma(m A_x)}{\Sigma(m A)} = \frac{\frac{1}{2} c_1 t}{\frac{1}{2} c t} = \frac{c_1}{c}, \qquad \cos\mu = \frac{c_2}{c}, \qquad \cos\nu = \frac{c_3}{c}.$$

Unter diesen Verhältnissen haben die Winkel λ, μ, ν daher zu allen Zeiten dieselben Werte, so dass die Lage der vierten Ebene unveränderlich sein wird. Diese Ebene führt den Namen „invariable Ebene" und die durch den Coordinatenursprung gehende zu ihr senkrechte gerade Linie „invariable Linie" des Systemes.

Zu dem Begriffe der „invariablen Ebene" können wir auch auf eine etwas andere Weise gelangen. Denken wir uns wieder das materielle System auf rechtwinkelige, räumliche Coordinatenaxen bezogen, von dem Coordinatenursprunge nach den einzelnen materiellen Punkten des Systemes gerade Linien gezogen, so beschreiben diese Fahrstrahlen in einer Zeit t gewisse Flächen und es seien die Summen der Projektionen dieser Flächen auf die Coordinatenebenen c_1, c_2, c_3. Alsdann ist die Summe der Projektionen der von den Fahrstrahlen durchfegten Flächen auf irgend eine andere Ebene gleich der Summe der Projektionen dieser Flächen auf die Coordinatenebene. Ist C die dieser beliebigen Ebene entsprechende Polarfläche, sind L, M, N die Richtungscosinus der Ebene, so haben wir

$$C = L c_1 + M c_2 + N c_3.$$

Mit $c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ ist es klar, dass die Fläche auf der Ebene, deren Richtungscosinus sind $l = \frac{c_1}{c}$, $m = \frac{c_2}{c}$, $n = \frac{c_3}{c}$, gleich c ist, womit

$$C = c(L l + M m + N n).$$

Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen diesen zwei Ebenen, so haben wir

$$\cos\vartheta = L l + M m + N n. \qquad C = c\cos\vartheta.$$

C wird mit $\vartheta = 0$ zu einem Maximum und wir erhalten den Satz: Mit einem gegebenen Punkte als Pol ist hier eine bestimmte Ebene, auf welcher die Summe der Projektionen der von den Fahrstrahlen der einzelnen Systempunkte beschriebenen Flächen ein Maximum wird, die Richtungscosinus dieser Ebene sind Konstanten, so dass diese Ebene während der ganzen Bewegung des Systemes von unveränderlicher Lage bleibt. Die auf irgend einer Ebene erhaltene Fläche ist gleich der entsprechenden

Fläche auf der invariablen Ebene, multipliziert mit dem Cosinus des Neigungswinkels zwischen beiden Ebenen.

1. Bestimmung der invariablen Ebene für den Schwerpunkt des Sonnensystemes.

Wir wählen den Schwerpunkt S des Sonnensystemes als Coordinatenursprung und beziehen dasselbe auf irgend welche rechtwinkelige Axen OX, OY, OZ. Es sei ω die Winkelgeschwindigkeit irgend eines der Planeten um seine Axe und Mk^2 sein Trägheitsmoment für diese Axe mit den Richtungswinkeln α, β, γ. Die Umdrehungsaxe und zwei senkrechte Axen bilden ein System von Prinzipalaxen in dem Schwerpunkte. Das Moment der Bewegungsgrösse um die Rotationsaxe ist $Mk^2\omega$, folglich dasselbe Moment um eine Axe parallel zu der Axe der x $Mk^2\omega\cos\alpha$. Das Moment der Bewegungsgrösse der ganz in dem Schwerpunkte vereinigt gedachten Masse um die Axe der x ist $M\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$, so dass wir, da für die übrigen Axen ähnliches gilt, die Gleichungen erhalten

$$C_1 = \Sigma Mk^2\omega\cos\alpha + \Sigma M\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),$$

$$C_2 = \Sigma Mk^2\omega\cos\beta + \Sigma M\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right),$$

$$C_3 = \Sigma Mk^2\omega\cos\gamma + \Sigma M\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Mittelst dieser drei Gleichungen ist die Lage der invariablen Ebene zu berechnen. Wir haben einfach mit $C_1{}^2 + C_2{}^2 + C_3{}^2 = C^2$

$$\cos\lambda = \frac{C_1}{C}, \qquad \cos\beta = \frac{C_2}{C}, \qquad \cos\gamma = \frac{C_3}{C}.$$

2. Zu vergleichen die Lagen der invariablen Ebene in verschiedenen Punkten eines sich bewegenden materiellen Systemes, auf welches keine äusseren Kräfte wirken.

Wenn der Schwerpunkt des Systemes anfangs in Ruhe ist, so bleibt er es während der ganzen Bewegung und die von ihm um irgend einen Punkt beschriebene Fläche ist gleich Null. Folglich sind die um alle Pole in irgend einer Ebene beschriebenen Flächen dieselben und gleich denjenigen auf einer parallelen Ebene durch den Schwerpunkt. Es folgt auch, dass die invariable Ebene, welche irgend einem Pole entspricht, parallel zu der invariablen Ebene des Schwerpunktes ist.

Wenn der Schwerpunkt sich in Bewegung befindet, so bewegt er sich in einer geraden Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Diese

gerade Linie wollen wir als Axe der x und die Ebene der xz so wählen, dass sie die invariable Linie für den Schwerpunkt enthält. Es sei V die gleichförmige Geschwindigkeit des Schwerpunktes, M die Masse des Körpers, c_1, c_3 seien die um die Axen der x, z beschriebenen Flächen, x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P, dann sind die um parallele Axen durch P beschriebene Flächen resp.

$$C_1 = c_1, \qquad C_2 = -MVz, \qquad C_3 = c_3 + MVy,$$

folglich sind die Richtungscosinus der invariablen Ebene durch P

$$l = \frac{c_1}{C}, \qquad m = -\frac{MVz}{C}, \qquad n = \frac{c_3 + MVy}{C},$$

wo

$$C^2 = c_1{}^2 + M^2 V^2 z^2 + (c_3 + MVy)^2.$$

Nun sind l, m, n und C Konstante, wenn y und z konstant sind, folglich ist die Lage der invariablen Ebene und die auf ihr erhaltene Fläche konstant für alle Pole, welche in irgend einer geraden, zur Bewegungsrichtung des Schwerpunktes parallelen Linie liegen. Ferner ist C ein Minimum, wenn $z = 0$ und $c_3 + MVy = 0$. In diesem Falle ist $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$, oder die invariable Ebene ist senkrecht zu der Bewegungsrichtung des Schwerpunktes.

Die auf der invariablen Ebene für irgend einen anderen Punkt Q mit den Coordinaten x', y', z' sich projizierende Fläche ist gegeben durch

$$C'^2 = c_1{}^2 + (MVz')^2 + (c_3 + MVy')^2.$$

Aber es ist $C^2 = c_1{}^2$ und $c_3 + MVy = 0$, daher

$$C'^2 = C^2 + M^2 V^2 \left\{ z'^2 + (y - y')^2 \right\}.$$

Legen wir durch den Punkt, für welchen die auf der invariablen Ebene erhaltene Fläche ein Minimum ist, eine gerade Linie parallel zu der Bewegungsrichtung des Schwerpunktes, dann ist die auf der invariablen Ebene zu Q erhaltene Fläche gegeben durch

$$C'^2 = C^2 + V^2 r^2.$$

Die invariable Ebene kann in der Astronomie als eine solche Ebene gebraucht werden, auf welche die Lage der einzelnen Körper des Sonnensystemes bezogen wird, denn diese Ebene kann jederzeit wiedergefunden werden. Wir können die Lagen der Himmelskörper mit der grössten Sorgfalt beobachten und die Coordinaten eines jeden bezüglich irgend welcher Axen bestimmen. Es ist indessen klar, dass, wenn nicht diese Axen fest sind, oder wenn nicht die Bewegung der Axen bekannt ist, wir keine Mittel besitzen, unsere Kenntnisse der Nachwelt zu überliefern. Die Ebenen der Ecliptic und des Äquators sind allgemein zu Hauptbezugsebenen gemacht worden. Diese zwei Ebenen sind in Bewegung, ihre Bewegungen sind in einem Grade naher Annäherung bekannt und werden hiernach wahrscheinlich noch genauer bekannt werden. Es mag daher in einer zukünftigen Zeit möglich sein zu berechnen, welches ihre Lagen im Raume sein werden, wenn eine Reihe von schätzbaren Beobachtungen gemacht worden ist. Aber in sehr langer Zeit können sich von Jahr zu Jahr Fehler anhäufen und

diese schliesslich beträchtlich werden. Die gegenwärtigen Lagen dieser Ebenen im Raume können durch Vornahme von Beobachtungen an Fixsternen der Nachwelt überliefert werden. Diese Körper sind indessen nicht absolut fest und mit der Zeit würden die Referenzebenen mit weniger und weniger Genauigkeit durch diese Beobachtungen bestimmt werden können. Eine dritte, von Laplace vorgeschlagene Methode, ist die von der invariablen Ebene, nach welchem diese Ebene ihren Namen führt, Gebrauch zu machen. Wenn wir annehmen, dass die Körper, welche unser Sonnensystem bilden, nämlich die Sonne, Planeten, Satelliten, Kometen etc. nur ihren gegenseitigen Attraktionen unterworfen sind, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass die invariable Ebene durch den Schwerpunkt des Systemes im Raume absolut fest ist. Auch ist der Schwerpunkt entweder in Ruhe oder er bewegt sich gleichförmig in einer geraden Linie. Wir haben hier die Attraktionen der Sterne vernachlässigt. Diese sind indessen zu klein, um bei dem gegenwärtigen Stande unserer astronomischen Kenntnisse in Rechnung genommen zu werden. Wir können daher bis zu einem gewissen Grade die Lagen unserer Coordinatenebenen im Raume bestimmen, indem wir dieselben auf die invariable Ebene als eine Ebene beziehen, welche sicherer annähernd festgelegt ist, als jede andere Ebene des Sonnensystemes. Die Lage dieser Ebene kann in der gegenwärtigen Zeit aus dem Zustande des Sonnensystemes abgeleitet, in irgend einer zukünftigen Zeit kann eine Berechnung gemacht werden, welche sich auf den Zustand des Sonnensystemes zu dieser Zeit gründet. Also kann eine Kenntnis ihrer Lage nie verloren gehen. Es ist indessen eine Kenntnis der Coordinaten der invariablen Ebene nicht genügend, um umgekehrt die Lage unserer Referenzebenen zu bestimmen. Wir müssen auch die Coordinaten einer gewissen Linie in der invariablen Ebene kennen, deren Richtung ebenfalls fest im Raume ist. Diese wird, wie Poisson vorgeschlagen hat, durch die Projektion der Bewegungsrichtung des Schwerpunktes des Systemes auf die invariable Ebene erlangt. Wenn der Schwerpunkt des Sonnensystemes in Ruhe wäre oder sich senkrecht zu der invariablen Ebene bewegte, so würde dieses misslingen. In keinem Falle ist unsere Kenntnis der Bewegung des Schwerpunktes gegenwärtig genügend, um uns in den Stand zu setzen, viel Gebrauch von dieser festen Richtung im Raume zu machen.

Wenn die Planeten und Körper, welche unser Sonnensystem bilden, als Kugeln betrachtet werden, deren Schichten von gleicher Dichtigkeit koncentrische Kugelschalen sind, so wirken ihre gegenseitigen Attraktionen entlang den ihre Mittelpunkte verbindenden geraden Linien. In diesem Falle werden die Bewegungen ihrer Mittelpunkte dieselben sein, als wenn jede Masse in ihrem Schwerpunkte vereinigt wäre, während die Bewegung eines jeden Körpers um seinen Schwerpunkt für immer unveränderlich sein würde. Wir können daher eine andere, feste Ebene finden, indem wir diese letzteren Bewegungen weglassen. Dieses hat Laplace gethan; in seinen Formeln sind die Glieder, welche von der Rotation der Körper abhängen, in den obigen Werten von C_1, C_2, C_3 weggelassen. Die dadurch erhaltene invariable Ebene wird die „astronomische invariable Ebene" genannt, um sie von der wahren dynamischen invariablen Ebene zu unterscheiden. Die erstere ist senkrecht zu der Axe des Momentenpaares, welches den Translationsbewegungen der verschiedenen Körper zu verdanken ist, die letztere senkrecht zu der Axe des Momentenpaares, welches aus den Translations- und Rotationsbewegungen der Körper des Systemes hervorgeht. Die astronomische invariable Ebene ist nicht vollkommen fest im Raume, weil die gegenseitigen Attraktionen der Körper nicht genau in den ihre Schwerpunkte verbindenden geraden Linien wirken, so dass die in den Ausdrücken für C_1, C_2, C_3 weggelassenen Glieder nicht absolut konstant sind. Der Verrückungseffekt ist der, dass die Rotationsaxe eines jeden Körpers einen Kegel im Raume beschreibt, so dass, wenn selbst die Winkelgeschwindigkeit sich nicht

ändert, die Lage der astronomischen invariablen Ebene ein wenig sich verändern muss. Eine Collision zwischen zwei Körpern des Systemes, wenn so etwas möglich wäre, oder eine Explosion auf einem Planeten, ähnlich derjenigen, durch welche nach Olbers die Planeten Pallas, Ceres, Juno und Vesta u. s. w. entstanden sein sollen, könnte eine beträchtliche Änderung in der Summe der weggelassenen Glieder hervorbringen. In diesem Falle würde eine Änderung in der Lage der astronomischen invariablen Ebene stattfinden, aber die dynamische invariable Ebene würde im ganzen davon unberührt bleiben. Es könnte gedacht werden, dass es vorzuziehen sein würde, in der Astronomie die wahre invariable Ebene zu gebrauchen. Aber dieses ist nicht notwendig der Fall, denn die Winkelgeschwindigkeiten und Trägheitsmomente der Körper, welche unser Sonnensystem bilden, sind nicht alle bekannt, so dass die Lage der dynamischen invariablen Ebene nicht bis auf einen genügenden Annäherungsgrad berechnet werden kann, während wir wissen, dass die Glieder, welche in diesen unbekannten Grössen enthalten, alle sehr klein oder annähernd konstant sind. Alle weggeworfenen Glieder sind klein im Vergleich mit den zurückbehaltenen, die astronomische invariable Ebene kann daher nur einen kleinen Winkel mit der dynamischen invariablen Ebene machen, Obgleich die Ebene sehr nahe fest im Raume ist, so kann dennoch ihr Schnitt mit der dynamischen invariablen Ebene zufolge der Kleinheit der Neigung im Laufe der Zeit beträchtliche Änderungen erfahren.

In der Mécanique Céleste berechnete Laplace die Lage der astronomischen invariablen Ebene für zwei Epochen, 1750 und 1950, unter der Annahme, dass seine Formeln für die Anderungen der Excentricitäten, Neigungen und Knoten der Planetenbahnen während dieser Periode korrekt seien. Für die erste Epoche fand sich als Neigung dieser Ebene zu der Ecliptic $1^0 \cdot 7698$ und als Länge des aufsteigenden Knotens $114^0 \cdot 3979$, für die zweite Epoche ergab sich dieselbe Neigung, und die Länge des Knotens war $114^0 \cdot 3934$.

Dieser Abschnitt wurde entlehnt dem ausgezeichneten Werke: „The Dynamics of a System of Rigid Bodies“, by Ed. John Routh, Third Edition, London 1877.

Vierte Abteilung.

Lebendige Kraft und Erhaltung der Flächen.

Das Prinzip der Erhaltung der Flächen ist durch den folgenden Satz ausgesprochen. „Ist ein in Bewegung begriffenes System materieller Punkte nur gegenseitigen Wirkungen unterworfen, so ist die Summe der Produkte der Masse eines jeden materiellen Punktes in die Projektion der durch seinen Radiusvektor um irgend einen bestimmten Punkt beschriebenen Fläche, auf irgend eine vorausgesetzte Ebene, proportional der Zeit.“

Dasselbe Prinzip gilt auch dann, wenn das System äusseren Kräften unterworfen ist, deren algebraische Momentensumme für eine durch den bestimmten Punkt gehende und zu der angenommenen Ebene senkrechte Linie gleich Null ist.

Dieses Prinzip, welches in der That eine Verallgemeinerung von Newton's Theorie ist, betreffend die von dem Fahrstrahle eines einzelnen Körpers um ein Kraftcentrum beschriebenen Flächen, wurde um dieselbe Zeit entdeckt von Daniel Bernoulli (Mémoires de l'Acad. des Sciences de Berlin, 1745, p. 54), Euler (Opuscula, de motu corporum tubis mobilibus inclusorum p. 48, 1746) und D'Arcy (Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris, 1747, p. 348). Die von D'Arcy gegebene Weise der Erklärung des Prinzipes ist die jetzt allgemein gebräuchliche, von ihr weichen die Erläuterungen

Bernoulli's und Euler's etwas ab. Auf die Entdeckung dieses Prinzipes wurden diese drei Mathematiker durch die Betrachtung des Problemes der Bewegung mehrerer Körper innerhalb einer Röhre von gegebener Gestalt, welche sich selbst um einen festen Punkt bewegt, geführt.

1. P und Π sind zwei materielle, an die starre gerade Linie $PO\Pi$ gefesselte Punkte und es kann sich diese Gerade um einen festen Punkt O in einer horizontalen Ebene drehen. Der materielle Punkt Π ist an der starren Geraden fest, der Punkt P kann auf ihr gleiten. Welches ist die von dem Punkte P beschriebene Bahn, wenn die Punkte irgend welche Anfangsgeschwindigkeiten besitzen?

Es sei (Fig. 92) OE eine beliebige, in der Ebene der Bewegung liegende feste Linie, $PO = r$, $\Pi O = a$, $m =$ der Masse von P, $\mu =$ derjenigen von Π, $\measuredangle POE = \vartheta$. Weil die einzige Kraft, welcher das System unterworfen, die Reaktion des festen Punktes O ist, so haben wir zufolge des Prinzipes der Erhaltung der Flächen

Figur 92.

$$(m r^2 + \mu a^2)\frac{d\vartheta}{dt} = C, \tag{1}$$

wo C eine gewisse Konstante bedeutet, und durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$\left.\begin{aligned} m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} + \mu a^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C', \\ m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (m r^2 + \mu a^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C', \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wenn C' ebenfalls eine gewisse Konstante bedeutet.

Die Elimination von dt aus (1) und (2) giebt

$$m\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = \left\{\frac{C'}{C^2}(m r^2 + \mu a^2) - 1\right\}(m r^2 + \mu a^2),$$

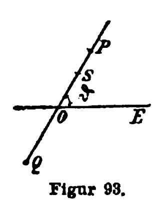
wobei die Differentialgleichung der Bahn bereits gefunden ist.

Um die Konstanten C und C' zu bestimmen, wollen wir annehmen, dass b, ω, u die Anfangswerte von $r, \frac{d\vartheta}{dt}, \frac{dr}{dt}$ resp. sind, durch welche Bedingung wir mit (1) und (2) erhalten

$$C = (m b^2 + \mu a^2)\,\omega, \qquad C' = m u^2 + (m b^2 + \mu a^2)\,\omega^2.$$

Clairaut, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1742, p. 22.
D'Arcy, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1747, p. 351.
D'Alembert, Traité de Dynamique, p. 104, seconde edit.

2. Ein der Bedingung unterworfener gerader Stab PQ, dass er stets durch einen kleinen festen Ring O geht, bewegt sich auf einer horizontalen Ebene. Welches ist die Bahn seines Schwerpunktes S?



Figur 93.

Zu einer beliebigen Zeit t der Bewegung sei (Fig. 93) $OS = r$, $\sphericalangle SOE = \vartheta$, OE eine feste Linie in der Bewegungsebene vorstellend, m die Masse eines Stabelementes in einem beliebigen Abstande ϱ von O, μ die Masse des ganzen Stabes, k sein Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt S.

Die einzige wirkende Kraft ist die Reaktion des Ringes auf dem Stab, daher giebt hier das Prinzip der Erhaltung der Flächen die Gleichung

$$C = \Sigma\left(m\varrho^2 \frac{d\vartheta}{dt}\right) = \Sigma(m\varrho^2)\frac{d\vartheta}{dt} = \mu(r^2 + k^2)\frac{d\vartheta}{dt}. \qquad (1)$$

Ferner bekommen wir durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft, den Ring als vollkommen glatt ansehend, die Gleichung

$$C' = \mu\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} + \mu k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu(r^2 + k^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2. \qquad (2)$$

Durch die Elimination der Zeit aus (1) und (2) folgt

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2 + k^2 = \frac{\mu C'}{C^2}(r^2 + k^2)^2,$$

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = \left\{\frac{\mu C'}{C^2}(r^2 + k^2) - 1\right\}(r^2 + k^2). \qquad (3)$$

Sind a, u, ω die Anfangswerte von $r, \frac{dr}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}$ resp., dann ergiebt sich durch (1) und (2)

$$C = \mu(a^2 + k^2)\omega, \qquad C' = \mu u^2 + \mu(a^2 + k^2)\omega^2.$$

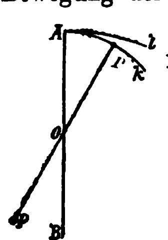
Damit wird die Gleichung (3) zu

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{r^2 + k^2}{\omega^2(a^2 + k^2)}\left\{(r^2 + k^2)u^2 + \omega^2(a^2 + k^2)(r^2 - a^2)\right\},$$

welches die Differentialgleichung der Bahn von S ist.

Clairaut, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1742, p. 38—41.

3. Zwei gleiche materielle Punkte P, P sind an die Enden eines Stabes PP (Fig. 94) ohne Masse und mit dem festen Mittelpunkte O gefesselt. Welches ist die irgend welchen Anfangszuständen entsprechende Bewegung der materiellen Punkte?



Figur 94.

Durch den Punkt O ziehe eine gerade Linie AOB, mit O als Mittelpunkt und OP als Halbmesser beschreibe die zwei Kreisbögen APk und Al, von denen der letztere in einer bestimmten Ebene liegt. Es sei $OP = a$, $\sphericalangle AOP = \varphi$, $\sphericalangle kAl = \vartheta$, $m =$ der Masse eines jeden der zwei materiellen Punkte, $t =$ der entsprechenden Zeit.

Durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft haben wir, gleichviel ob die materiellen Punkte der Wirkung der Schwerkraft unterworfen sind oder nicht,

$$2\,m\,a^2\left\{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin^2\varphi\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} = C, \text{ oder } \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin^2\varphi\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = c, \quad (1)$$

wo C, c konstante Grössen sind.

Ferner ist zufolge des Prinzipes der Erhaltung der Flächen

$$2\,m\,a^2 \sin^2\varphi \frac{d\vartheta}{dt} = C_1, \quad \text{oder} \quad \sin^2\varphi \frac{d\vartheta}{dt} = c_1, \quad (2)$$

wo C_1, c_1 ebenfalls konstante Grössen bedeuten.

Die Elimination von $\frac{d\vartheta}{dt}$ aus (1) und (2) giebt

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{c_1^{\,2}}{\sin^2\varphi} = c,$$

und daher

$$\sin\varphi\, d\varphi = (c\sin^2\varphi - c_1^{\,2})^{\frac{1}{2}} dt, \quad (c - c_1^{\,2} - c\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}} dt = -d.\cos\varphi,$$

integrierend und die willkürliche Konstante c_2 addierend

$$t + c_2 = \frac{1}{\sqrt{c}}\, arc\left(\cos = \frac{\sqrt{c}.\cos\varphi}{\sqrt{c - c_1^{\,2}}}\right), \quad (3)$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{c - c_1^{\,2}}}{\sqrt{c}} \cos\left\{\sqrt{c}(t + c_2)\right\}. \quad (4)$$

Nehmen wir an, dass mit $t = 0$, $\varphi = \beta$, $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega'$, dann ist durch (1) und (2)

$$c = \omega'^2 + \omega^2 \sin^2\beta, \qquad c_1 = \omega \sin^2\beta,$$

und mithin durch (3)

$$c_2 = \frac{1}{(\omega'^2 + \omega^2 \sin^2\beta)^{\frac{1}{2}}}\, arc\left(\cos = \frac{(\omega'^2 + \omega^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}}\cos\beta}{(\omega'^2 + \omega^2 \sin^2\beta\cos^2\beta)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Der Wert von $\cos\varphi$ ist durch (4) gegeben und wir können mit Hilfe von (2) einen Ausdruck für ϑ als Funktion der Zeit erhalten.

4. Eine sphärische Schale, deren innerer Halbmesser gleich dem n^{ten} Teile des äusseren ist, ist mit einem Fluidum von einer Dichtigkeit gleich derjenigen der Schale gefüllt. Es sollen die Wege verglichen werden, welche diese Schale und eine solide Kugel von derselben Grösse und demselben Gewichte auf gleichen, gleichgeneigten, vollkommen rauhen Ebenen in der Zeit t zurücklegen, wenn dieselben ohne Anfangsgeschwindigkeit herabrollen.

Lasse bezeichnen m, m' die Massen der Schale und des Fluidums resp. a, a' den äusseren und inneren Halbmesser der Schale, k, k' die Trägheitsradien der Schale und der Flüssigkeit für einen Durchmesser der Kugel, ϑ, ϑ' die Winkel, durch welche sich die Schale und die Flüssig-

keit um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt vom Beginn der Bewegung an gedreht haben, x den von dem Schwerpunkte der Kugel beschriebenen Weg.

Das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft giebt die Gleichung

$$m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} + m'\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k'^2\left(\frac{d\vartheta'}{dt}\right)^2\right\} = C + 2(m+m')gx\sin\alpha.$$

Weil aber die Resultante aller Kräfte, welche auf die Flüssigkeitskugel wirken, durch deren Schwerpunkt geht, haben wir zufolge des Prinzipes der Flächen, die Flüssigkeit besitzt anfangs keine Geschwindigkeit,

$$m' k'^2 \frac{d\vartheta'}{dt} = 0.$$

Aus diesen zwei Gleichungen ergiebt sich

$$m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} + m'\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C + 2(m+m')gx\sin\alpha.$$

Weil die Schale rollt, ist $x = a\vartheta$, so dass, wenn wir $m + m' = \mu$ setzen,

$$(\mu a^2 + m k^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C a^2 + 2\mu a^2 g x \sin\alpha.$$

Diese Gleichung nach t differentiierend und sodann durch $2\frac{dx}{dt}$ theilend, bekommen wir

$$(\mu a^2 + m k^2)\frac{d^2x}{dt^2} = \mu a^2 g \sin\alpha. \qquad (1)$$

Nun ist $m k^2 = \frac{2}{5}\mu a^2 - \frac{2}{5}m'a'^2 = \frac{2}{5}(\mu a^2 - m'a'^2)$, oder, weil $m' = \frac{\mu}{n^3}$ und $a' = \frac{a}{n}$, $m k^2 = \frac{2}{5}\mu a^2 \frac{n^5 - 1}{n^5}$, so dass die Substitution dieses Wertes von $m k^2$ in (1) giebt

$$\left(1 + \frac{2}{5}\frac{n^5 - 1}{n^5}\right)\frac{d^2x}{dt^2} = g\sin\alpha, \qquad (7n^5 - 2)\frac{d^2x}{dt^2} = 5n^5 g\sin\alpha.$$

Durch Integration dieser Gleichung, wobei zu beachten, dass $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, wenn $t = 0$, bekommen wir

$$(7n^5 - 2)x = \frac{5}{2}n^5 g t^2 \sin\alpha.$$

Für die homogene Kugel von der Masse μ erhalten wir in einer ähnlichen Weise, wenn x' den von ihrem Schwerpunkte in derselben Zeit t parallel zu der Ebene zurückgelegten Weg bezeichnet,

$$7x' = \frac{5}{2}g t^2 \sin\alpha.$$

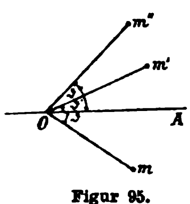
Mithin ist das gesuchte Verhältnis

$$\frac{x}{x'} = \frac{7n^5}{7n^5 - 2}.$$

Wenn z. B. $n = 2$ ist, so erhalten wir $\frac{x}{x'} = \frac{112}{111}$.

Lady's and Gentleman's Diary, 1842, p. 51.

5. Der materielle Punkt m (Fig. 95) ist mit den materiellen Punkten m', m'' mittelst zweier feiner unausdehnbarer Fäden mOm', mOm'' verbunden, welche durch einen kleinen glatten Ring O laufen; m, m', m'' liegen alle auf einer glatten, durch O gehenden horizontalen Ebene. Die Spannungen der zwei Fäden und die Bewegungen der materiellen Punkte sollen unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass die materiellen Punkte irgend welche Anfangsimpulse empfangen haben, die wenigstens genügen, die Fäden in voller Straffheit zu erhalten.



Figur 95.

Ziehe durch O in der Ebene der Bewegung eine gerade Linie OA, lasse sein $Om = r$, $Om' = r'$, $Om'' = r''$, $\sphericalangle mOA = \vartheta$, $\sphericalangle m'OA = \vartheta'$, $\sphericalangle m''OA = \vartheta''$ zu einer beliebigen Zeit t, $T' =$ der Spannung des Fadens mOm', $T'' =$ derjenigen des Fadens mOm''.

Weil alle auf die materiellen Punkte wirkenden Kräfte durch den Punkt O gehen, so ist nach einer Formel in der Theorie der Centralbewegung

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r'}{dt^2} = r'\left(\frac{d\vartheta'}{dt}\right)^2 - \frac{T'}{m'}, \quad \frac{d^2r''}{dt^2} = r''\left(\frac{d\vartheta''}{dt}\right)^2 - \frac{T''}{m''}, \\ \frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{T'+T''}{m}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Weil wir vorausgesetzt haben, dass sich die Fäden in vollkommener Streckung befinden sollen, so muss auch sein

$$r + r' = c', \qquad r + r'' = c'', \qquad (2)$$

wo c', c'' die Längen der Fäden mOm', mOm'' bezeichnen. mithin

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d^2r'}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d^2r''}{dt^2} = 0.$$

Folglich ist mittelst der ersten und der dritten der Formeln (1)

$$\frac{T'}{m'} + \frac{T'+T''}{m} = r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r'\left(\frac{d\vartheta'}{dt}\right)^2 \qquad (3)$$

und durch die zweite und dritte

$$\frac{T''}{m''} + \frac{T'+T''}{m} = r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r''\left(\frac{d\vartheta''}{dt}\right)^2. \qquad (4)$$

Ferner haben wir, weil die auf die drei materiellen Punkte wirkenden Kräfte durch den Punkt O gehen, zufolge des Prinzipes der Erhaltung der Flächen

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = e, \quad r'^2 \frac{d\vartheta'}{dt} = e', \quad r''^2 \frac{d\vartheta''}{dt} = e'', \tag{5}$$

wo e, e', e'' invariable Grössen sind. Mit (3), (4), (5) bekommen wir daher

$$\frac{T'}{m'} + \frac{T' + T''}{m} = \frac{e^2}{r^3} + \frac{e'^2}{r'^3}, \quad \frac{T''}{m''} + \frac{T' + T''}{m} = \frac{e^2}{r^3} + \frac{e''^2}{r''^3}.$$

Aus diesen zwei Gleichungen können wir leicht bestimmen, dass

$$\left.\begin{aligned}
(m + m' + m'')\frac{T'}{m'} &= \frac{me^2}{r^3} + \frac{(m + m'')e'^2}{r'^3} - \frac{m''e''^2}{r''^3},\\
(m + m' + m'')\frac{T''}{m''} &= \frac{me^2}{r^3} + \frac{(m + m')e''^2}{r''^3} - \frac{m'e'^2}{r'^3},\\
(m + m' + m'')\frac{T' + T''}{m} &= \frac{(m' + m'')e^2}{r^3} + \frac{m'e'^2}{r'^3} + \frac{m''e''^2}{r''^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Diese Relationen geben die Spannungen der zwei Fäden mOm', mOm'' und des Doppelfadens Om. Es ist wichtig, zu beachten, dass diese Werte für die Spannungen nur so lange gültig sind, als die beiden Fäden sich in voller Streckung befinden; wenn der eine oder der andere der Fäden während irgend einer Epoche der Bewegung schlaff wird, dann sind diese Formeln nicht mehr anwendbar. Dieses wird klar werden, wenn wir beachten, dass zur Erlangung derselben wir von den Gleichungen (2) Gebrauch machen, welche sich auf die Voraussetzung gründen, dass sich die Fäden in voller Straffheit befinden. Die Formeln selbst werden die Epoche, von wo ab ihre Unanwendbarkeit beginnt, dadurch anzeigen, dass entweder der Wert von T' oder derjenige von T'' durch Null geht.

Ferner ist durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$m\left\{r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} + m'\left\{r'^2\left(\frac{d\vartheta'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr'}{dt}\right)^2\right\}$$
$$+ m''\left\{r''^2\left(\frac{d\vartheta''}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr''}{dt}\right)^2\right\} = C,$$

wo C eine konstante Grösse bedeutet. Folglich bekommen wir mit Rücksicht darauf, dass vermöge der Gleichungen (2) $-\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr''}{dt}$ ist,

$$mr^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + m'r'^2\left(\frac{d\vartheta'}{dt}\right)^2 + m''r''^2\left(\frac{d\vartheta''}{dt}\right)^2 + (m + m' + m'')\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C,$$

und daher, durch die Gleichungen (5)

$$\frac{me^2}{r^2} + \frac{m'e'^2}{r'^2} + \frac{m''e''^2}{r''^2} + (m + m' + m'')\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\frac{e^2}{r^4} = C, \tag{7}$$

mithin, durch die Gleichungen (2) und $(m + m' + m'') = \mu$ setzend,

$$\frac{me^2}{r^2} + \frac{m'e'^2}{(c' - r)^2} + \frac{m''e''^2}{(c'' - r)^2} + \frac{\mu e^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = C. \tag{8}$$

Dieses ist die Differentialgleichung der Bahn des Punktes m. In gleicher Weise ergeben sich die Differentialgleichungen der Bahnen von m', m''.

Diese Gleichungen hören offenbar dann auf, die Wege der materiellen Punkte zu geben, wenn zu irgend einer Zeit einer der Fäden schlaff wird, d. i. wenn entweder T' oder T'' in Null übergeht. Wenn einer der Fäden zu irgend einer Zeit schlaff wird, so werden wir die Bewegung der beiden materiellen Punkte zu untersuchen haben, deren verbindender Faden gespannt ist; der materielle Punkt, welcher dem losen Faden angehört, bewegt sich dann für eine Zeit lang ohne Zwang. Die Gleichung (7) zeigt uns, dass keine der Grössen r, r', r'' jemals gleich Null werden kann, dass mithin keiner der materiellen Punkte, so lange die Fäden gespannt sind, in dem Punkte O ankommt.

Nehmen wir an, dass $\omega, \omega', \omega'', a, \beta$ die Anfangswerte von $\frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\vartheta'}{dt}, \frac{d\vartheta''}{dt}, r, \frac{dr}{dt}$ sind, dann ergiebt sich durch die Gleichungen (5)

$$e = a^2\omega, \qquad e' = (c-a)^2\omega', \qquad e'' = (c''-a)^2\omega'',$$

welche Gleichungen die Werte von e, e', e'' geben. Ferner ist durch (8)

$$C = m a^2\omega^2 + m'(c'-a)^2\omega'^2 + m''(c''-a)^2\omega''^2 + \mu\beta^2.$$

Wenn an dem Punkte m nicht zwei Punkte m', m'', sondern eine beliebige Zahl von Punkten durch Fäden befestigt gewesen wären, so würde die Lösung der Aufgabe von keiner grösseren Schwierigkeit gewesen sein.

Riccati, Comment. Bonon., Tom. V, P. I. p. 150, anno 1767.

6. Die Linse eines Pendels ist eine im Inneren glatte Hohlkugel, welche mit einem Fluidum oder einer soliden Kugel gefüllt ist, letztere an der Linse fest und von derselben Dichtigkeit wie die Flüssigkeit. Welches ist die Länge des äquivalenten einfachen Pendels, 1) wenn die Höhlung mit der Kugel, 2) wenn sie mit der Flüssigkeit gefüllt ist, vorausgesetzt, dass der Stab und die Hohlkugel starr und gewichtslos seien?

Es sei mk^2 das Trägheitsmoment der soliden oder der Flüssigkeitskugel für einen Durchmesser, $a =$ dem Abstande des Schwerpunktes der Kugel von dem Aufhängepunkte, $r =$ dem Halbmesser der Kugel, $\vartheta =$ der Neigung der Pendelstange zu der Vertikalen am Ende einer beliebigen Zeit t, $\omega =$ der Winkelgeschwindigkeit der Kugel um einen zur Aufhängeaxe parallelen Durchmesser.

Zufolge des Prinzipes der Erhaltung der lebendigen Kraft haben wir hier

$$m a^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + m k^2\omega^2 = 2 m g a \cos\vartheta + C.$$

Nun ist im Falle einer soliden Kugel $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$, so dass, wenn β der Wert von ϑ in dem Augenblicke, wo $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ ist,

$$(a^2 + k^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2ag(\cos\vartheta - \cos\beta).$$

In dem Falle einer Flüssigkeitskugel ist durch das Prinzip der Erhaltung der Flächen $\omega =$ einer Konstanten, daher

$$a^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2ag(\cos\vartheta - \cos\beta).$$

Folglich ist in dem ersteren Falle die Länge des äquivalenten einfachen Pendels gleich $\frac{a^2+k^2}{a}$, in dem letzteren gleich a.

7. Ein Stab ist mit dem einen seiner Enden so befestigt, dass er sich um dasselbe nach jeder Richtung hin frei drehen kann. Wenn er ohne Bewegung zu dem Horizonte unter einem gegebenen Winkel geneigt ist, wird seinem freien Ende eine gegebene horizontale Geschwindigkeit erteilt. Welches ist die Geschwindigkeit und die Bewegungsrichtung des freien Endes in dem Augenblicke, in welchem der Stab horizontal wird?

Es sei $2a$ die Länge des Stabes, α seine anfängliche Horizontalneigung, u_0 die Anfangsgeschwindigkeit des freien Endes, u die horizontale, v die vertikale Componente der Geschwindigkeit des freien Endes in dem Augenblicke, wo der Stab horizontal wird.

Weil die Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen materiellen Punkte des Stabes um eine Vertikale durch das befestigte Stabende in der Anfangs- und Endlage des Stabes $\frac{u_0}{2a\cos\alpha}$ und $\frac{u}{2a}$ sind, weil ferner der Anfangs- und Endabstand irgend eines materiellen Punktes des Stabes von der Vertikalen sich verhalten wie $\cos\alpha : 1$, so haben wir vermöge des Prinzipes der Erhaltung der Flächen

$$\frac{u_0}{2a\cos\alpha}\cos^2\alpha = \frac{u}{2a}, \qquad \text{womit} \qquad u = u_0\cos\alpha. \tag{1}$$

Ferner ist, wenn m die Masse des Stabes bezeichnet, die anfängliche lebendige Kraft gleich

$$\int_0^{2a}\frac{m\,dr}{2a}(r\cos\alpha)^2\left(\frac{u_0}{2a\cos\alpha}\right)^2 = \frac{1}{3}m u_0^2.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich als lebendige Kraft in dem Endzustande des Stabes, welche der Horizontalbewegung des Endes des Stabes zu verdanken ist, $\frac{1}{3}mu^2$. Für die lebendige Kraft in dem Endzustande des Stabes, welche der Vertikalbewegung seines freien Endes zu verdanken ist, erhalten wir den Ausdruck

$$\int_0^{2a}\frac{m\,dr}{2a}\left(\frac{rv}{2a}\right)^2 = \frac{1}{3}m v^2.$$

Folglich ist in dem Endstatium des Stabes die ganze lebendige Kraft gleich

$$\frac{1}{3} m (u^2 + v^2).$$

Aber nach dem Prinzipe der lebendigen Kraft ist die während der Bewegung erzeugte lebendige Kraft gleich $2\, m g a \sin \alpha$, folglich

$$\frac{1}{3} m (u^2 + v^2) = \frac{1}{3} m u_0{}^2 + 2\, m g a \sin \alpha,$$

und daher, durch (1),

$$v^2 = u_0{}^2 \sin^2 \alpha + 6\, g a \sin \alpha. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen die Geschwindigkeit und die Richtung der Bewegung des freien Stabendes, wenn der Stab horizontal wird.

8. Ein gleichförmiger Stab ist in einer horizontalen Ebene beweglich, seine Enden sind durch kleine Ringe mit einem festen, glatten, kreisförmigen Drahte verbunden, dessen Durchmesser gleich der dreifachen Länge des Stabes ist. Der Stab verlängert sich um das $1\frac{1}{2}$fache seiner ursprünglichen Länge. Zu vergleichen die durch die inneren Kräfte des Stabes gethane Arbeit mit der während der Bewegung des Stabes gethanen Arbeit.

Es sei m die Masse, $2\,a$ die ursprüngliche Länge, ω die anfängliche, ω_1 die endliche Winkelgeschwindigkeit des Stabes, p seine anfängliche, p_1 seine endliche Entfernung von dem Mittelpunkte des Kreises, k sein Anfangs-, k_1 sein Endträgheitshalbmesser für seinen Schwerpunkt.

Die anfängliche lebendige Kraft des Stabes ist gleich

$$m p^2 \omega^2 + m k^2 \omega^2 = m \omega^2 \left(8\, a^2 + \frac{1}{3} a^2\right) = \frac{25}{3} m \omega^2 a^2,$$

seine lebendige Kraft in seiner Endlage ist gleich

$$m p_1{}^2 \omega_1{}^2 + m k_1{}^2 \omega_1{}^2 = m \omega_1{}^2 \left(\frac{27}{4} a^2 + \frac{3}{4} a^2\right) = \frac{15}{2} m \omega_1{}^2 a^2.$$

Aber durch das Prinzip der Erhaltung der Flächen haben wir, weil die äusseren Kräfte, welche an dem Stabe wirken, durch den Mittelpunkt des Ringes gehen,

$$m (p^2 + k^2) \omega = m (p_1{}^2 + k_1{}^2) \omega_1, \qquad \frac{25}{3} \omega = \frac{15}{2} \omega_1, \qquad \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{10}{9}.$$

Nun ist die in irgend einer Zeit gethane Arbeit gleich der halben lebendigen Kraft in dieser Zeit, das Verhältnis der durch die inneren Kräfte des Stabes verrichteten Arbeit zu der während der Bewegung des Stabes verrichteten Arbeit also gleich

$$\frac{\frac{15}{2} m a^2 \omega_1{}^2 - \frac{25}{3} m a^2 \omega^2}{\frac{25}{3} m a^2 \omega^2} = \frac{9 \omega_1{}^2 - 10 \omega^2}{10 \omega^2}$$

$$= \frac{9 \times 10^2 - 10 \times 9^2}{10 \times 9^2} = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}.$$

9. Ein materieller Punkt wird in horizontaler Richtung entlang der inneren Fläche einer festen, hohlen Halbkugel mit vertikaler Axe und abwärts gelegenem Scheitel geworfen. Der Wurfpunkt ist gegeben und es soll die Grösse der Wurfgeschwindigkeit so bestimmt werden, dass der materielle Punkt genau bis zum Kranze der Schale steigen kann.

Wenn $a =$ dem Halbmesser der Kugelschale und $\beta =$ der Vertikalneigung der die Anfangslage des materiellen Punktes mit dem Mittelpunkte der Schale verbindenden Geraden ist, so ist die verlangte Geschwindigkeit gleich

$$\sqrt{\frac{2 a g}{\cos \beta}}.$$

10. Eine glatte Fläche ist durch die Rotation des Teiles der Curve $x^2 y = a^3$ um die Axe der y erzeugt, welcher unter dem Ursprunge bei vertikaler Ordinatenaxe liegt. Ein materieller Punkt wird mit einer Geschwindigkeit entlang der Fläche geworfen, welche zu verdanken ist seiner Fallhöhe gleich der Tiefe desselben unter der Horizontalebene durch den Ursprung. Welches ist der von dem materiellen Punkte dadurch verfolgte Lauf?

Wenn c das Doppelte der von dem Radiusvektor des Punktes um die Axe der y beschriebenen Fläche ist, so wird die Bahn des Punktes alle Meridiane der Fläche unter einem Winkel φ schneiden, welcher durch die Gleichung gegeben ist

$$\sin^2 \varphi = \frac{c^2}{2 a^3 g}.$$

11. Zwei materielle Punkte P, P' sind miteinander durch einen starren, trägheitslosen Stab verbunden, welcher durch einen kleinen Ring O läuft; der Stab ruht auf einer horizontalen Ebene. Den materiellen Punkten werde ein beliebiger Impuls mitgeteilt. Welches sind die von den Punkten beschriebenen Bahnen?

Es sei OE eine feste Linie in der Ebene der Bewegung, $OP = r$, $OP' = l$, $\measuredangle POE = \vartheta$. Ferner seien a, a' die Anfangswerte von OP, OP', m, m' die Massen von P, P', ω, β die Anfangswerte von $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$. Damit ist die Differentialgleichung der Bahn von P

$$\left\{ m r^2 + m' (l - r)^2 \right\} \left\{ A \left[m r^2 + m' (l - r)^2 \right] - 1 \right\} = (m + m') \left(\frac{dr}{d\vartheta} \right)^2,$$

wo

$$A = \frac{(m + m') \beta^2 + (m a^2 + m' a'^2) \omega^2}{(m a^2 + m' a'^2)^2 \omega^2}$$

und ähnlich diejenige für die Bahn von P'.

Clairaut, Mém. Acad. de Paris, 1742, p. 38. D'Arcy, Ib. 1747, p. 352.

12. Ein Kegel dreht sich mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit um seine geometrische Axe. Die Länge der Axe beginnt sich gleichförmig zu verkürzen und

der Winkel in der Spitze wächst so, dass das Volumen des Kegels unverändert bleibt. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit des Kegels zu einer beliebigen Zeit und die Zahl der von ihm gemachten Umdrehungen, ehe die Bewegung aufhört?

Es sei $\omega =$ der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit, $h =$ der anfänglichen Länge und $v =$ der Geschwindigkeitsabnahme der Axe des Kegels, dann ist die Winkelgeschwindigkeit am Ende einer beliebigen Zeit t gleich $\omega\left(1 - \frac{vt}{h}\right)$, und die verlangte Zahl der Umdrehungen ist gleich $\frac{h\omega}{4\pi v}$.

13. Eine unendlich grosse Anzahl unendlich dünner, cylindrischer Schalen, von denen eine in die andere passt, dreht sich so um eine gemeinsame Axe, dass die Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Schalen verschieden und von demselben Richtungswinkel sind; die Winkelgeschwindigkeit einer jeden Schale ist proportional einer positiven Potenz ihres Halbmessers. Wenn das System plötzlich zu einem soliden Cylinder vereinigt wird, zu finden die Winkelgeschwindigkeit dieses Cylinders um seine Axe.

Es sei ω die Winkelgeschwindigkeit der äussersten Schale und n die genannte Potenz, dann ist die verlangte Winkelgeschwindigkeit gleich $\frac{4\omega}{n+4}$.

Ferrers and Jackson, Solutions of the Cambridge Problems, 1848—1851, p. 308.

14. Eine Reihe rauher, koncentrischer, sphärischer Schalen passt schliessend in einander. Rotationen von gegebener Grösse sind denselben um gegebene Durchmesser mitgeteilt und keine äussere Kraft wirkt auf das System. Welches ist das letzte Statium der Bewegung?

Lasse sein OX, OY, OZ die im Raume festen Coordinatenaxen mit dem Ursprunge in dem Mittelpunkte O einer jeden Schale, A das Trägheitsmoment einer Schale um einen Durchmesser, ω ihre anfängliche Winkelgeschwindigkeit, l, m, n die Richtungscosinus ihrer anfänglichen Rotationsaxe, dann wird zuletzt das ganze System sich wie eine solide Kugel um eine Axe drehen, deren Gleichungen sind

$$\frac{x}{\Sigma(A\omega l)} = \frac{y}{\Sigma(A\omega m)} = \frac{z}{\Sigma(A\omega n)}.$$

Griffin, Solutions of the Examples on the Motion of a Rigid Body, p. 70.

15. Die die Mittelpunkte zweier gleicher, fester Ringe verbindende Linie ist senkrecht zu ihren beiden Ebenen. Zwei kleine Ringe von den Massen m, m', welche aufeinander in einem wechselseitigen Abstande r eine gegenseitige Attraktion $mm'f(r)$ ausüben, befinden sich etwas ausserhalb einer stabilen Gleichgewichtslage. Welches ist die Zeit einer kleinen Schwingung?

Wenn c die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der festen Ringe bedeutet, so ist die verlangte Zeit gleich

$$\frac{\pi\sqrt{c}}{\sqrt{(m+m')f(c)}}.$$

16. Ein gleichförmiger Stab kann sich frei um einen seiner Endpunkte drehen. In seiner Anfangslage ist er horizontal und wird er mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit horizontal geworfen. Welches ist der kleinste Winkel, den er mit der Vertikalen während der Bewegung machen wird?

Es sei $2a$ die Länge des Stabes, ω die anfängliche Winkelgeschwindigkeit, ϑ die verlangte Neigung, so besteht für die letztere die Gleichung

$$2\,a\,\omega^2 \cos\vartheta = 3\,g\,\sin^2\vartheta.$$

17. Das eine Ende eines Fadens ist an einen gewichtslosen Ring, welcher entlang einer vertikalen Axe gleitet, gefesselt, sein anderes Ende ist an einem materiellen Punkte von gleicher Masse befestigt, welcher sich auf einer horizontalen Ebene bewegt. Der materielle Punkt wird in einer Richtung senkrecht zu der durch den Faden und die Axe gehenden Ebene geworfen. Welches ist die Lage des Fadens, wenn er sich durch einen horizontalen Winkel von 90° gedreht hat?

Der Faden wird horizontal sein, welches auch die anfängliche Geschwindigkeit des materiellen Punktes oder Lage des Ringes ist.

18. Ein gleichförmiger Stab bewegt sich auf einem horizontalen Tische um einen seiner Endpunkte und treibt vor sich her einen materiellen Punkt von gleicher Masse, welcher von einem Punkte, sehr nahe dem festen Ende, ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgeht. Welches ist die Neigung des Stabes zu der Bewegungsrichtung des materiellen Punktes, wenn der materielle Punkt irgend eine vorausgesetzte Distanz entlang dem Stabe beschrieben hat?

Es sei k der Trägheitsradius des Stabes um seinen festen Endpunkt, r der von dem materiellen Punkte entlang dem Stabe beschriebene Weg nach einer beliebigen Zeit t, dann ist der verlangte Winkel gleich

$$arc\left(tg = \frac{k}{\sqrt{r^2+k^2}}\right).$$

19. Eine archimetische Schraube kann sich frei um ihre in einer vertikalen Lage feste Axe drehen. Ein schwerer Punkt befindet sich auf dem Gipfel der Röhre und fällt durch sie herunter. Welches ist die ganze der Schraube mitgeteilte Winkelgeschwindigkeit?

Es sei $h =$ der Höhe der Schraube, $a =$ dem Halbmesser des zugehörigen Cylinders, $\alpha =$ dem Winkel, welchen ein Längenelement der Schraube mit der Vertikalen macht, $\omega =$ der verlangten Winkelgeschwindigkeit, dann ist, wenn m, m' die Massen der Schraube und des materiellen Punktes resp. darstellen,

$$\omega^2 = \frac{2\,m'^2\,g\,h\,\sin^2\alpha}{a^2\,(m+m')\,(m+m'\cos^2\alpha)}.$$

20. Ein aus vier ähnlichen, gleichförmigen Stäben, welche mit ihren Enden frei verbunden sind, gebildetes Viereck, ist auf einen horizontalen Tisch gelegt und einer seiner Eckpunkte ist fest. Den zwei den festen Punkt bestimmenden Seiten werden gegebene Winkelgeschwindigkeiten in der Ebene des Tisches mitgeteilt. Welches ist der grösste Wert des zwischen diesen Seiten enthaltenen Winkels während der daraus folgenden Bewegung?

Wenn ω, ω' die gegebenen Winkelgeschwindigkeiten sind und ϑ den verlangten Winkel bezeichnet, so ist

$$\cos 2\vartheta = -\frac{5\,(\omega-\omega')^2}{6\,(\omega^2+\omega'^2)}.$$

Frost, Quartely Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 8, p. 82.

21. Vier gleiche, sich nicht attraktierende Punkte bewegen sich in einer Ellipse um ein Kraftcentrum in ihrem Mittelpunkte; beim Beginne der Bewegung befanden

sie sich in den Endpunkten der grossen und kleinen Axe. Wenn sie zu einer beliebigen Zeit plötzlich zu der Form eines starren Systemes verbunden werden, zu finden die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um den Mittelpunkt der Ellipse.

Wenn μ die absolute Kraft, $2a$ die grosse, $2b$ die kleine Axe bezeichnet, so wird sich das System um den Mittelpunkt mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit bewegen, welche gleich ist

$$\frac{2ab\sqrt{\mu}}{a^2+b^2}.$$

O'Brien and Ellis, Solutions of the Senate-House Problems for 1844.

22. AB, AC sind zwei gleiche Stäbe, welche sich um einen festen Punkt A bewegen können, BC ist ein Stab, dessen Länge zuerst gleich der Summe der Längen der Stäbe AB, AC, deren Enden B und C er lose verbindet, so dass das Dreieck ABC entsteht. In diesem Zustande ist den Stäben eine Winkelgeschwindigkeit um eine vertikale Axe durch A erteilt worden. Der Stab BC zieht sich sodann zusammen, wobei sein Mittelpunkt vertikal aufsteigt bis das Dreieck ABC gleichseitig wird. Welches ist die durch das Sichzusammenziehen von BC gethane Arbeit?

Die verlangte Arbeit ist gleich dem dreifachen derjenigen Arbeit, welche sich ergiebt durch die ursprüngliche Rotation zusammen mit der Arbeit, welche verrichtet werden würde durch das Sicherheben von BC und eines der Stäbe AB, AC bis zu der Höhe des Dreieckes.

1—22. Walton, p. 542—559.

Fünftes Kapitel.

Rotation unveränderlicher, materieller Systeme um feste Axen.

Erster Abschnitt.

Verschiedene Probleme.

Bezeichnet F die Componente der an irgend einem materiellen Punkte des Systemes wirkenden Kraft parallel zu einer auf der Rotationsaxe senkrechten Ebene, r den senkrechten Abstand der Richtung dieser Componente F von der Rotationsaxe, dann ist Fr das Moment von F um diese Axe und $\Sigma(Fr)$ die Summe der Momente aller an den einzelnen materiellen Punkten des Systemes wirkenden Kräfte F für die feste Drehaxe. Bedeutet ferner ω die Winkelgeschwindigkeit des Systemes nach einer Zeit t und Mk^2 sein Trägheitsmoment um die feste Axe, so besteht für die Bewegung des Systemes um die feste Axe nach den Lehren der analytischen Mechanik die Generalformel

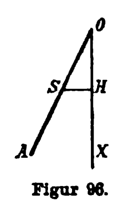
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma(Fr)}{Mk^2},$$

welche, wenn ϑ den Winkel bezeichnet, durch den sich das System innerhalb der Zeit t dreht, gewöhnlich geschrieben wird

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{\text{Kraftmoment um die Rotationsaxe}}{\text{Trägheitsmoment um die Rotationsaxe}}$$

und die Winkelbeschleunigung des Systemes um die feste Axe darstellt.

1. Ein gerader, gleichförmiger Stab, welcher um sein oberes Ende drehbar ist, hängt vertikal. Mit welcher kleinsten Winkelgeschwindigkeit muss er beginnen sich zu bewegen, damit er vollständige Umdrehungen in einer vertikalen Ebene durch den Aufhängepunkt ausführen kann?



Figur 96.

Es sei OA (Fig. 96) eine beliebige Lage des Stabes, ϑ = seiner Neigung zu der vertikalen Linie OX am Ende der Zeit t, S der Schwerpunkt des Stabes, $SH \perp OX$, $OA = a$, M = der Masse des Stabes. Damit ist die Bewegungsgleichung

$$Mk^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -SH.Mg = -\frac{1}{2} a Mg \sin\vartheta,$$

oder, weil $k^2 = \frac{1}{3}a^2$ ist,

$$2a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -3g\sin\vartheta, \qquad a\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C + 3g\cos\vartheta.$$

Ist ω = der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit des Stabes, so haben wir zur Bestimmung der Integrationskonstanten die Relation $a\omega^2 = C + 3g$, mithin

$$a\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = a\omega^2 - 3g(1 - \cos\vartheta).$$

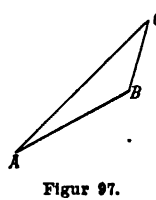
Nun verlangt die Bedingung der Aufgabe, dass $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, wenn $\vartheta = \pi$ wird, folglich muss sein

$$0 = a\omega^2 - 6g,$$

womit sich als geforderte Winkelgeschwindigkeit ergiebt

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{a}}.$$

2. Ein gerader Stab AB (Fig. 97) ist um sein festes tieferes Ende A frei beweglich, während das andere Ende B mittelst eines feinen, unausdehnbaren Fadens BC in dem Punkte C aufgehangen ist. Das System wird aus seiner Gleichgewichtslage ein wenig so verschoben, dass der Faden in voller Spannung bleibt. Welches ist dann die Zeit einer kleinen Schwingung?



Figur 97.

Wir ziehen die Gerade AC und es sei $AB = a$, α = der Horizontalneigung von CA, $\angle BAC = \varepsilon$, ϑ = der Neigung der Ebene BAC zu der vertikalen Ebene durch AC, Mk^2 = dem Trägheitsmomente von AB um AC. Die Componente des Stabgewichtes Mg senkrecht zu AC ist $Mg\cos\alpha$, der Arm des Momentes dieser Componente

um AC ist $\frac{1}{2} a \sin \varepsilon \sin \vartheta$, folglich ist die Differentialgleichung der Bewegung

$$M k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = - M g \cos \alpha \frac{1}{2} a \sin \vartheta \sin \varepsilon.$$

Aber das Quadrat des Trägheitshalbmessers ist hier $k^2 = \frac{1}{3} a^2 \sin^2 \varepsilon$ und ϑ ist ein kleiner Winkel, so dass wir annähernd schreiben können

$$\frac{d^2 \vartheta}{d t^2} + \frac{3 g \cos \alpha}{2 a \sin \varepsilon} \vartheta = 0.$$

Mithin ist die Zeit einer Schwingung

$$T = \pi \sqrt{\frac{2 a \sin \varepsilon}{3 g \cos \alpha}}.$$

3. Die Kraft, welche auf die Kurbel einer Dampfmaschine wirkt, sei vertikal und ändere sich wie der Sinus des Winkels, durch welchen sich die Kurbel in einer beliebigen Zeit t dreht, gerechnet von einer vertikalen Stellung der Kurbel an. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel für eine beliebige ihrer Lagen, wenn das Moment des Widerstandes immer gleich der Hälfte des grössten Momentes der Kraft ist und das Moment des Kurbelgewichtes als unbedeutend angenommen wird?

Figur 98.

Es sei (Fig. 98) OA die Kurbel, O ihr Drehpunkt, OX vertikal, $\sphericalangle AOX = \vartheta$ zu einer beliebigen Zeit t, $F =$ der an dem Kurbelzapfen A wirkenden Kraft, $OA = a$, $F = \mu \sin \vartheta$, $Mk^2 =$ dem Trägheitsmomente der Kurbel um O.

Das Moment des Widerstandes um O ist gleich $\frac{1}{2} \mu a$, so dass die Differentialgleichung der Bewegung für die Kurbel

$$M k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = \mu \sin \vartheta \, a \sin \vartheta - \frac{1}{2} \mu a = - \frac{1}{2} \mu a \cos 2 \vartheta.$$

Indem wir hier mit $2 \frac{d \vartheta}{d t}$ multiplizieren und integrieren, bekommen wir

$$M k^2 \left(\frac{d \vartheta}{d t}\right)^2 = C - \frac{1}{2} \mu a \sin 2 \vartheta.$$

Ist noch ω die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel, wenn $\vartheta = 0$, so kommt dazu die Relation

$$M k^2 \omega^2 = C,$$

folglich ist die Winkelgeschwindigkeit ω' für eine beliebige Kurbellage gegeben durch die Gleichung

$$\omega'^2 = \left(\frac{d \vartheta}{d t}\right)^2 = \omega^2 - \frac{\mu a \sin 2 \vartheta}{2 M k^2}.$$

Daraus erkennen wir, dass die Winkelgeschwindigkeit stets gleich ω ist, wenn die Kurbel sich in einer horizontalen oder vertikalen Stellung befindet.

1—3. Walton, p. 421—423.

4. Eine vollkommen rauhe, kreisförmige, horizontale Platte kann sich frei um eine vertikale, feste Axe durch ihren Mittelpunkt drehen. Ein Mann von dem Gewichte gleich demjenigen der Platte geht an ihrem Umfange rund herum. Welches wird sein Ort im Raume sein, wenn er einen Umlauf vollendet hat?

Es sei a der Halbmesser der Platte, Mk^2 ihr Trägheitsmoment um die vertikale Axe, ω die Winkelgeschwindigkeit der Platte, ω' diejenige des Mannes um die vertikale Axe zu einer beliebigen Zeit t, F die Wirkung zwischen den Füssen des Mannes und der Platte. Die Gleichung für die Bewegung der Platte ist

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = -Fa, \tag{1}$$

und diejenige für die Bewegung des Mannes

$$Ma \frac{d\omega'}{dt} = F. \tag{2}$$

Indem wir F aus diesen zwei Gleichungen ausscheiden, wird

$$k^2 \frac{d\omega}{dt} = -a^2 \frac{d\omega'}{dt}, \qquad k^2 d\omega = -a^2 d\omega',$$

und giebt die Integration dieser Relation

$$k^2\omega + a^2\omega' = 0. \tag{3}$$

Die Integrationskonstante ist hier gleich Null, weil Mann und Platte ihre Bewegung vom Ruhezustande aus beginnen. Sind nun ϑ und ϑ' die Winkel, welche von der Platte und dem Manne in der Zeit t um die vertikale Axe durchlaufen werden, so ist $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$, $\omega' = \frac{d\vartheta'}{dt}$, also mit (3)

$$k^2 \frac{d\vartheta}{dt} + a^2 \frac{d\vartheta'}{dt} = 0, \qquad \text{oder} \qquad k^2\vartheta + a^2\vartheta' = 0.$$

Folglich erhalten wir, wenn $\vartheta' - \vartheta = 2\pi$ ist

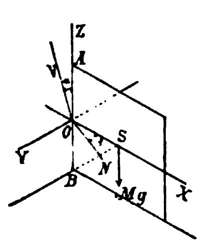
$$\vartheta' = \frac{k^2}{a^2 + k^2} 2\pi.$$

Dieses ist der von dem Manne im Raume während eines Umlaufes zu beschreibende Winkel.

Mit $k^2 = \frac{a^2}{2}$ ist $\vartheta' = \frac{2}{3}\pi$. Bezeichnet noch v die mittlere relative Geschwindigkeit, mit welcher der Mann die Platte entlang geht, dann ist $\omega' - \omega = \frac{v}{a}$, folglich $\omega = -\frac{va}{a^2 + k^2} = -\frac{2}{3}\frac{v}{a}$. Dieses giebt die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Platte.

5. Eine Thüre hängt in zwei Angeln mittelst einer an ihr festen Axe, welche einen Winkel α mit der Vertikalen einschliesst. Welches sind die Bewegung der Thüre und die Pressungen auf die Angeln?

Weil die feste Axe offenbar eine Hauptaxe für ihren Mittelpunkt ist, so nehmen wir diesen Punkt O zum Ursprunge der Coordinaten, die Ebene der xz legen wir so, dass sie den Schwerpunkt S der Thüre in dem betrachteten Momente enthält (Fig. 99). Die einzige an dem Systeme thätige Kraft ist die Schwerkraft, welche in dem Schwerpunkte S vertikal abwärts wirken mag, und haben wir zunächst diese Kraft parallel zu den Coordinatenaxen zu zerlegen. Es sei φ der Winkel, welchen die Ebene der Thüre mit einer vertikalen Ebene durch die Aufhängeaxe einschliesst.



Figur 99.

Wenn wir eine Ebene ZON so legen, dass ihre Spur ON auf der Ebene XOY einen Winkel φ mit der Axe der x einschliesst, so wird diese die vertikale Ebene durch die Axe sein, und wenn OV in dieser Ebene mit OZ einen Winkel $ZOV = \alpha$ einschliesst, so wird OV vertikal sein. Folglich sind die Componenten der Beschleunigung der Schwere

$$\varphi_x = g \sin\alpha \cos\varphi, \qquad \varphi_y = g \sin\alpha \sin\varphi, \qquad \varphi_z = -g\cos\alpha.$$

Sind nun die Componenten der Reaktionen in den Aufhängepunkten A und B parallel zu den Coordinatenaxen F, G, H und F', G', H', ist M die Masse der Thüre, f die Winkelbeschleunigung $\left(f = \frac{d\omega}{dt}\right)$, dann sind die sechs hier nötigen Bewegungsgleichungen, weil die Componenten der Effektivkräfte dieselben sind, als wenn die ganze Masse in dem Schwerpunkte vereinigt wäre,

$$Mg \sin\alpha \cos\varphi + F + F' = -\omega^2 M\bar{x}, \tag{1}$$

$$Mg \sin\alpha \sin\varphi + G + G' = f \, . \, M\bar{x}, \tag{2}$$

$$-Mg\cos\alpha + H + H' = 0, \quad (3) \qquad Ga + G'a = 0, \tag{4}$$

$$Mg\cos\alpha \, . \, \bar{x} + Fa - F'a = 0, \tag{5}$$

und, weil die feste Axe eine Hauptaxe für den Ursprung ist,

$$-Mg \sin\alpha \sin\varphi \, . \, \bar{x} = Mk'^2 \, . \, \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{6}$$

Die Integration der letzten Gleichung giebt

$$C + 2g \sin\alpha \cos\varphi \, . \, \bar{x} = k'^2 \omega^2.$$

Nehmen wir an, dass anfangs die Thüre sich in Ruhe befindet, einen Winkel β mit der vertikalen Ebene durch die Axe einschliessend, dann ist, wenn $\varphi = \beta$, $\omega = 0$, also $C = -2g \sin\alpha \cos\beta \, \bar{x}$, mithin

$$k'^2 \omega^2 = 2g\bar{x} \sin\alpha (\cos\varphi - \cos\beta), \qquad \text{und} \qquad k'^2 f = -g\bar{x} \sin\alpha \sin\varphi,$$

wobei die letztere Gleichung sich durch die Differentiation der vorhergehenden ergiebt.

Jetzt können die Reaktionen F, F', G, G' gefunden werden, die Reaktionen H, H' bleiben dagegen unbestimmt, weil sie in derselben Geraden wirken, denn die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung f ist als Funktion des Winkels φ bekannt. Die Durchführung dieser einfachen Rechnung bleibt dem Leser überlassen.

Routh, Dynamics & c. p. 89.

6. Die Endpunkte eines homogenen Stabes von gleichförmiger Dicke, welcher sich um seinen Mittelpunkt drehen kann, sind mit einem festen Punkte durch elastische Fäden verbunden. Die natürliche Länge eines jeden Fadens ist gleich dem Abstande des festen Punktes von dem Mittelpunkte des Stabes. Welches ist die Periode der Schwingungen des Stabes, wenn er ein wenig aus seiner Gleichgewichtslage in der Ebene durch den Stab und den festen Punkt verschoben wird?

Es sei b der Abstand des festen Punktes von einem Stabende in der Gleichgewichtslage, c die Entfernung zwischen dem festen Punkte und dem Mittelpunkte des Stabes, M seine Masse, λ der Elastizitätsmodulus eines der Fäden, dann ist die verlangte Schwingungszeit gleich

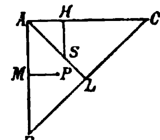
$$\frac{\pi b}{c}\sqrt{\frac{m b}{6 \lambda}}.$$

Walton, p. 423.

Zweiter Abschnitt.

Gleichförmige Rotation.

1. Ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck ABC (Fig. 100) ist mit der Spitze des rechten Winkels A aufgehangen und seine Seite AB wird durch einen glatten Ring bei B in einer vertikalen Lage erhalten. Dem Dreiecke ist eine konstante Winkelgeschwindigkeit ω um AB erteilt worden. Wie gross muss ω sein, damit kein Druck bei B stattfinden kann?



Figur 100.

Mit $BL = CL = \frac{1}{2} BC$, $LS = \frac{1}{3} AL$ ist S der Schwerpunkt des Dreieckes. Mache $SH \perp AC$, wähle einen beliebigen Punkt P in der Ebene des Dreieckes, ziehe $PM \perp AB$. Lasse sein $AM = x$, $PM = y$, $AC = a = AB$, $m =$ der Masse der Flächeneinheit des Dreieckes ABC.

Zufolge der Geometrie ist zunächst $AH = AS \cos\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} AL \cos\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} a \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} a$; auch ist der Flächeninhalt des Dreieckes $= \frac{1}{2} a^2$

und demnach seine Masse $= \frac{1}{2} m a^2$. Mithin ist das Moment des Dreieckes um eine Axe durch A, rechtwinkelig zu seiner Ebene, in irgend einem Augenblicke zufolge der Wirkung der Schwere

$$\frac{1}{2} m a^2 g \,.\, \frac{1}{3} a = \frac{1}{6} m a^3 g.$$

Ferner ist das Moment, welches um dieselbe Axe durch die Centrifugalkraft hervorgebracht wird, gleich

$$\iint m \omega^2 y \, dx \, dy \,.\, x = \frac{1}{2} m \omega^2 \int y^2 x \, dx = \frac{1}{2} m \omega^2 \int_0^a (a - x)^2 x \, dx$$
$$= \frac{1}{24} m \omega^2 a^4.$$

Weil nun kein Druck auf den Ring bei B stattfinden soll, so müssen die Momente der Schwere und der Centrifugalkraft um die Axe durch A einander gleich sein, folglich haben wir

$$\frac{1}{6} m a^3 g = \frac{1}{24} m \omega^2 a^4,$$

daher
$$\omega^2 = \frac{4g}{a}, \qquad \omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Walton, p. 424.

2. Eine quadratische Platte dreht sich um eine ihrer Kanten, welche in einer vertikalen Lage fest ist. Wie gross muss ihre konstante Winkelgeschwindigkeit ω sein, damit der resultierende Druck auf die Drehaxe durch den höchsten Punkt gehen kann?

Bezeichnet m die Masse der Flächeneinheit der Platte, $2a$ die Länge einer ihrer Seiten, so ist das statische Moment ihres Gewichtes für eine durch den höchsten Punkt der Drehaxe gehende, zur Ebene des Quadrates senkrechte Gerade $4 m a^3 g$ und das Moment der Centrifugalkraft für dieselbe Axe

$$\iint m \omega^2 y \, dx \, dy \,.\, x = \frac{1}{2} m \omega^2 \int y^2 x \, dx = 2 m \omega^2 a^2 \int_0^{2a} x \, dx = 4 m \omega^2 a^4.$$

Daher ist die Bedingung für den verlangten Zustand

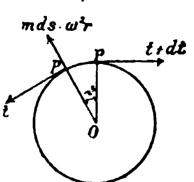
$$4 m a^3 g = 4 m \omega^2 a^4,$$

woraus folgt
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

3. Ein Faden liegt in der Gestalt eines Kreises auf einem glatten Tische und dreht sich wie ein Rad. Welches ist die Spannung des Fadens?

Es sei (Fig. 101, S. 280) m die Masse einer Längeneinheit des

Fadens, $m\,d\,s$ diejenige eines Elementes $P\,p$. Die durch die Rotation hervorgebrachte, an dem Elemente $P\,p$ wirkende Kraft ist gleich $m\,d\,s\,.\,\omega^2 r$, wenn ω die konstante Winkelgeschwindigkeit und r den Halbmesser des Kreises bezeichnet. Ist nun t die Spannung bei P, folglich $(t + d\,t)$ diejenige bei p, $\measuredangle\, P\,O\,p = \vartheta$, so haben wir, wenn wir die Spannung $(t + d\,t)$ parallel und senkrecht zu der Richtung der Spannung t zerlegen, für das Gleichgewicht von $P\,p$



Figur 101.

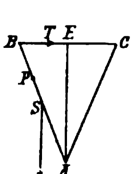
$t = (t + d\,t)\,cos\,\vartheta$, oder $d\,t = 0$, d. i. $t =$ einer konstanten Grösse.
Um diesen konstanten Wert zu finden, haben wir die algebraische Summe der normalen Componenten gleich Null zu setzen, was giebt

$$m\,d\,s\,.\,\omega^2 r = (t + d\,t)\,sin\,\vartheta = t\,\vartheta \text{ in der Grenze,}$$

so dass
$$t = m\,r\,\omega^2 \frac{d\,s}{\vartheta} = m\,r^2\,\omega^2,$$

d. h. die Spannung ist dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit direkt proportional.

4. Zwei gleiche, gleichförmige Stäbe $A\,B$, $A\,C$ (Fig. 102) sind mit ihren Enden A durch ein festes Charnier verbunden, während an die anderen Enden B, C ein feiner Faden gefesselt ist. Das System dreht sich mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit so, dass die Axe des von dem Faden und den Stäben gebildeten Dreieckes stets vertikal ist. Wie gross ist die Spannung des Fadens?



Figur 102.

Es sei $A\,B = 2\,a$, $T =$ der Spannung des Fadens, $G =$ dem Gewichte eines jeden Stabes, $\omega =$ der Winkelgeschwindigkeit um die vertikale Axe $A\,E$ des Dreieckes $A\,B\,C$, $\measuredangle\, B\,A\,E = \alpha$, P ein beliebiger Punkt in $A\,B$ und $A\,P = r$.

Während der Rotation muss die algebraische Summe der Momente der auf $A\,B$ wirkenden Kräfte um den Punkt A gleich Null sein, so dass

$$T\,.\,2\,a\,cos\,\alpha - G\,a\,sin\,\alpha - \int_0^{2a} \omega^2 r\,sin\,\alpha \frac{G}{2\,a\,g}\,d\,r\,.\,r\,cos\,\alpha = 0,$$

$$2\,T\,a\,cos\,\alpha = G\,a\,sin\,\alpha + \frac{\omega^2\,G\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}{2\,a\,g}\int_0^{2a} r^2\,d\,r$$

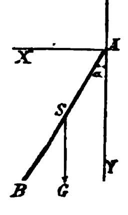
$$= G\,a\,sin\,\alpha + \frac{\omega^2\,G\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}{2\,a\,g}\cdot\frac{8}{3}\,a^3$$

$$= G\,a\,sin\,\alpha\left(1 + \frac{4\,a\,\omega^2\,cos\,\alpha}{3\,g}\right),$$

$$T = \frac{1}{2}\,G\,.\,tg\,\alpha\left(1 + \frac{4\,a\,\omega^2\,cos\,\alpha}{3\,g}\right).$$

Walton, p. 425.

5. Ein gleichförmiger Stab AB (Fig. 103) ist mit seinem Ende A durch ein Charnier an einer vertikalen Axe befestigt und dreht sich so mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um diese Axe AY, dass er stets mit ihr einen gegebenen Winkel $BAY = \alpha$ einschliesst. Welches ist diese Winkelgeschwindigkeit und die Richtung des Druckes auf das Charnier in der vertikalen Ebene durch den Stab und die Axe?



Figur 103.

Es sei die Länge des Stabes $AB = 2a$, G sein Gewicht, r der Abstand eines beliebigen Punktes des Stabes von A, A der Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten mit der vertikalen Ordinatenaxe AY. Indem wir Momente um A nehmen, erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung für das Gewicht G und die Centrifugalkraft P

$$G a \sin\alpha - \omega^2 \int x y \, dm = 0, \quad G a \sin\alpha - \omega^2 \frac{G}{2ag} \sin\alpha \cos\alpha \int_0^{2a} r^2 dr = 0,$$

$$G a \sin\alpha - \frac{4}{3} \omega^2 \frac{G a^3}{a g} \sin\alpha \cos\alpha = 0, \qquad 1 - \frac{4}{3} \omega^2 \frac{a}{g} \cos\alpha = 0,$$

woraus

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3g}{a \cos\alpha}}. \tag{1}$$

Die an dem Stabe in horizontaler Richtung wirkende Centrifugalkraft ist

$$P = \omega^2 \frac{G}{2ag} \sin\alpha \int_0^{2a} r \, dr = \omega^2 \frac{G}{g} a \sin\alpha = \frac{3}{4} G \, tg\, \alpha, \text{ mit (1).}$$

Das Charnier A hat den beiden Kräften G und P Widerstand zu leisten, ihre Resultante R ist

$$R = \sqrt{G^2 + \left(\frac{3}{4} G \, tg\, \alpha\right)^2} = \frac{G}{4} \sqrt{16 - 9\, tg^2 \alpha},$$

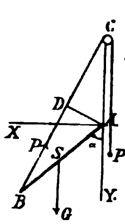
und wenn ψ den Winkel bezeichnet, welchen die Reaktion R mit der Vertikalen einschliesst, erhalten wir für die Richtung des Druckes auf das Charnier A

$$tg\, \psi = \frac{P}{G} = \frac{\frac{3}{4} G \, tg\, \alpha}{G} = \frac{3}{4} tg\, \alpha.$$

Griffin, Solutions of the Examples on the motion of a rigid body, p. 35.

6. Ein Ende A eines Stabes AB (Fig. 104, S. 282) ist mittelst eines Charniers an einer vertikalen Axe befestigt; das andere Ende ist mit einem Gewichte P durch einen feinen Faden verbunden, welcher durch ein kleines Loch C in der Axe, in einem Abstande $= AB$ von A läuft. Der Stab rotiert um die Axe mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit, dass er während der ganzen Bewegung mit der Axe den konstanten Winkel $BAY = \frac{\pi}{4}$ einschliesst. Wie gross ist diese Winkelgeschwindigkeit?

Es sei $AB = 2a = AC$, S der Schwerpunkt des gleichförmigen Stabes, an welchem sein ganzes Gewicht G vertikal abwärts wirken mag, A der Ursprung des Coordinatensystemes mit der horizontalen Axe AX und der vertikalen Axe AY, r der Abstand eines beliebigen Punktes des Stabes von A, $\sphericalangle BAY = \alpha$, ω die gesuchte Winkelgeschwindigkeit, $AD \perp BC$. An dem Stabe wirken die Kräfte G, die Centrifugalkraft und die Spannung P des Fadens BC, für welche rotatorisches Gleichgewicht stattfinden muss. Indem wir Momente um A nehmen und beachten, dass das Moment der Centrifugalkraft in demselben Sinne wie dasjenige der Spannung P wirkt, bekommen wir die Gleichgewichtsbedingung



Figur 104.

$$P.\overline{AD} - G a \sin\alpha + \omega^2 \int x y \, dm = 0.$$

Nun ist im vorliegenden Falle $AD = 2a\cos\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$

$= 2a\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $x = r\sin\alpha$, $y = r\cos\alpha$, $dm = \frac{G}{2ag}dr$, folglich

$$P.2a\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} - G a \sin\alpha + \omega^2 \frac{G}{2ag}\sin\alpha\cos\alpha\int_0^{2a} r^2\, dr = 0,$$

$$P.2a\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} - G a \sin\alpha + \omega^2 \frac{G}{2ag}\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{8}{3}a^3.$$

$$\omega^2 . \frac{4 G a \sin\alpha\cos\alpha}{3g} = G a \sin\alpha - P.2a\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Im vorliegenden Falle ist aber $\alpha = \frac{\pi}{4}$, also $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, mithin

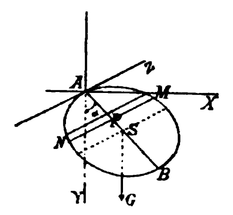
$$\omega^2\frac{2Ga^2}{3g} = Ga\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} - P.2a\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\omega^2\frac{2Ga}{3g} = \frac{G}{\sqrt{2}} - \frac{P}{\sqrt{2}}\sqrt{4-\sqrt{8}},$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{2a\sqrt{2}}\left\{1 - \frac{P}{G}\sqrt{4-\sqrt{8}}\right\},$$

womit die verlangte Winkelgeschwindigkeit bestimmt ist.

7. Eine kreisförmige Platte kann sich um eine horizontale Tangente drehen, welche sich mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω um eine vertikale Axe durch den Berührungspunkt von Tangente und Kreisumfang bewegt. Wie gross muss die Winkelgeschwindigkeit sein, damit die Platte mit der Vertikalen einen gegebenen Winkel α einschliessen kann?



Figur 105.

Es sei AB die Platte vom Halbmesser a (Fig. 105), A ihr Berührungspunkt mit der horizontalen Tangente AZ, die vertikale AY die Rotationsaxe, $AX \perp AY$ und AZ, so dass AZ, AX, AY die Axen eines räumlichen, rechtwinkeligen Coordinatensystemes vorstellen. Ein beliebiger Punkt P der Platte besitzt dann die Coordinaten x, y, z, sein Abstand von der Tangente sei $= r$ und m bedeute die Masse der Flächeneinheit der Platte.

Im vorliegenden Falle muss Gleichgewicht sein zwischen dem Plattengewichte G, welches im Schwerpunkt S der Platte vertikal abwärts wirkend gedacht wird, und der horizontal arbeitenden Centrifugalkraft P. Nehmen wir daher Momente um A, so erhalten wir die Bedingung

$$G a \sin\alpha - \omega^2 \int x y\, dm = 0. \tag{1}$$

Nun ist der Inhalt eines unendlich schmalen Flächenstreifens MN der Platte parallel zu der Axe der z $2z\,dr$, folglich seine Masse $2mz\,dr$. Weil aber die Gleichung des Kreises in r und z $z^2 + r^2 - 2ar = 0$, so ist auch $dm = 2m\sqrt{r^2 - 2ar}\,dr$. Ferner haben wir $x = r\sin\alpha$, $y = r\cos\alpha$, $G = mga^2\pi$, wodurch die Gleichung (1) übergeht in

$$m g a^2 \pi\, a \sin\alpha - \omega^2 \int_{\varrho}^{2a} r^2 \sin\alpha \cos\alpha \,.\, 2m\sqrt{r^2 - 2ar}\,.\,dr = 0.$$

$$m g a^3 \pi \sin\alpha - 2\omega^2 m \sin\alpha \cos\alpha \int_0^{2a} r^2 \sqrt{r^2 - 2ar}\,.\,dr = 0.$$

$$g a^3 \pi - \frac{5}{4} a^4 \omega^2 \pi \cos\alpha = 0 \qquad g - \frac{5}{4}\omega^2 a \cos\alpha = 0,$$

woraus schliesslich als die verlangte Geschwindigkeit sich ergiebt

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{g}{a\cos\alpha}}.$$

Soll die Geschwindigkeit ω eine solche sein, dass die Platte eine horizontale Lage annimmt, dann haben wir in der vorstehenden Formel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, womit sich ergiebt $\omega = \infty$, d. h. nur bei einer unendlich grossen Winkelgeschwindigkeit kann die Platte horizontal werden, so dass mit wachsendem ω α nie grösser als $\frac{\pi}{2}$ werden kann.

8. Um welche Höhe h muss der äussere Schienenstrang in einer Curve vom Halbmesser ϱ eines Eisenbahnfahrgeleises über den inneren Schienenstrang dieser Curve erhöht werden, damit bei einem mit der Geschwindigkeit v hindurchfahrenden Zuge gegen die Schienen kein Seitendruck stattfindet?

Es sei die Entfernung der beiden Schienenstränge von Mitte zu Mitte $= 2b$, Q das in dem Schwerpunkte S des Zuges vereinigt gedachte Totalgewicht des Zuges (Fig. 106), α die Neigung der in dem Vertikalschnitt durch den Schwerpunkt an die beiden Schienenköpfe gezogenen Tangente zum Horizont, $SS' \perp AB$ und $= a$, P die resultierende Centrifugalkraft, in horizontaler Richtung wirkend, BC horizontal, AC vertikal und $= h$. Der Krümmungshalbmesser ϱ der Curve ist parallel zum Horizonte.

Figur 106.

Für das Gleichgewicht des Systemes haben wir die Bedingung, indem wir die Kräfte P und Q parallel und senkrecht zu AB zerlegen und Momente um A nehmen,

$$Q\,a \sin\alpha + Q\,b\cos\alpha - P\,a\cos\alpha + P\,b\sin\alpha = 0,$$

oder

$$(Q\,a + P\,b)\sin\alpha = (P\,a - Q\,b)\cos\alpha,$$

so dass

$$tg\,\alpha = \frac{P\,a - Q\,b}{P\,b + Q\,a},$$

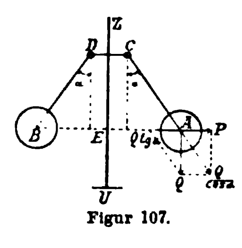
weil aber $P = Q\dfrac{v^2}{g\varrho}$, folgt

$$tg\,\alpha = \frac{\dfrac{v^2 a}{g\varrho} - b}{\dfrac{v^2 b}{g\varrho} + a} = \frac{a v^2 - b g\varrho}{b v^2 + a g \varrho},$$

$$h = 2b\cos\alpha = \frac{2b}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{2b}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{a v^2 - b g\varrho}{b v^2 + a g\varrho}\right)^2}} = \frac{2b(b v^2 + a g\varrho)}{\sqrt{(a^2+b^2)(v^4 + g^2\varrho^2)}}.$$

Da die Überhöhung h von der Geschwindigkeit v abhängig ist und die Züge die Curven mit verschiedenen Geschwindigkeiten passieren, so wird gewöhnlich h grösser gewählt als diese Formel es angiebt, um für alle Fälle gesichert zu sein.

9. Ein einfacher Schwungkugelregulator einer Dampfmaschine dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Axe UZ (Fig. 107). Welche Winkel α schliessen die um Bolzen C, D in einer vertikalen Ebene durch die Axe und die Aufhängepunkte C, D drehbaren Arme AC, BD des Regulators mit der Vertikalen ein?



Figur 107.

Es sei $AC = BD = l$, $CD = 2b$, das Gewicht einer jeden der Metallkugeln A, B gleich Q, und es werde das Gewicht der Arme vernachlässigt. Der Abstand des Mittelpunktes einer Kugel von der Drehaxe ist $AE = b + l\sin\alpha$, daher ihre Centrifugalkraft $\omega^2\dfrac{Q}{g}(b + l\sin\alpha)$. Die Com-

ponenten des Kugelgewichtes in den Richtungen CA und AE sind $Q\,sec\,\alpha$ und $Q\,tg\,\alpha$, von welchen nur die letztere auf die Lage der Kugel Einfluss hat, so dass für den Zustand des Gleichgewichtes die Bedingung besteht

$$Q\,tg\,\alpha - \omega^2\frac{Q}{g}(b + l\,sin\,\alpha) = 0, \quad \text{oder} \quad g\,tg\,\alpha - \omega^2 l\,sin\,\alpha = \omega^2 b,$$

aus welcher Gleichung der Winkel α zu bestimmen ist.

Wenn $b = 0$ ist, so haben wir einfach $cos\,\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$.

Die Zeit, welche der Regulator zu einer Umdrehung nötig hat, ist

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l\,sin\,\alpha + b}{g\,tg\,\alpha}}; \quad \text{mit } b = 0, \quad t = 2\pi\sqrt{\frac{l\,cos\,\alpha}{g}}.$$

10. Ein elastischer Faden, dessen Gewicht pro Einheit seiner natürlichen Länge gleich w ist, befindet sich innerhalb einer kreisförmigen, mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{g}{a}}$ um ihren vertikalen Durchmesser rotierenden Röhre vom Halbmesser a, der Elastizitätsmodulus ist wa. Welches ist die natürliche Länge des Fadens, wenn er die obere Hälfte der Röhre einnimmt?

Die natürliche Länge ist gleich der Länge des Röhrendurchmessers.

11. Ein dünnes Buch liegt auf einer der Flächen eines Pultes. Welches ist die grösste Winkelgeschwindigkeit, die dem Pulte um eine vertikale Axe gegeben werden kann, ohne dass das Buch abgeworfen wird?

Es sei $\alpha =$ der Neigung des Pultes zu dem Horizonte, $a =$ der Länge des Buches, welches symmetrisch auf die Fläche des Pultes gelegt gedacht ist, $c =$ dem Abstande der tiefsten Kante von der Drehaxe, $\omega =$ der verlangten Winkelgeschwindigkeit. Indem wir annehmen, dass das Buch um seine tiefere Kante, welche durch die Pultleiste gehalten wird, beweglich ist, erhalten wir für die gesuchte Geschwindigkeit die Relation

$$\omega^2 = \frac{3\,g\,cotg\,\alpha}{3c - 2a\,cos\,\alpha}.$$

12. Ein Ring, welcher einen Planeten umgiebt, dreht sich gleichförmig um einen Durchmesser durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt des Ringes und des Planeten. Die Gestalt des Ringes soll so bestimmt werden, dass die Tangentialkraft in allen Punkten des Ringes dieselbe sein kann.

Bezeichnet ω die Winkelgeschwindigkeit, μ die Attraktion des Planeten in der Einheit der Distanz, $2a$ die Länge des Umwälzungsdurchmessers, dann ist, wenn der Primradiusvektor mit dem Umwälzungsdurchmesser zusammenfällt, die Gleichung des Ringes

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{r} = \frac{\omega^2}{2\mu} r^2 sin^2 \vartheta.$$

10—12. Walton, p. 427, 428.

Dritter Abschnitt.

Schwingungsmittelpunkt.

Macht ein Körper von beliebiger Gestalt um eine feste horizontale Axe Schwingungen, bezeichnen wir den Abstand seines Schwerpunktes S von dieser Axe mit h, sein Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt S gehende, zur Aufhängeaxe parallele Axe mit $M k^2$, die Neigung des Schwerpunktsabstandes von der Suspensionsaxe gegen die Vertikale zu einer beliebigen Zeit t mit ϑ, so ist

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = -\frac{M g h \sin\vartheta}{M(k^2+h^2)} = -\frac{g h}{k^2+h^2}\sin\vartheta,$$

oder

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g h}{k^2+h^2}\sin\vartheta = 0.$$

Sind die Schwingungen klein, dann können wir die dritten und höheren Potenzen von ϑ vernachlässigen, so dass in diesem Falle annähernd

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g h}{k^2+h^2}\vartheta = 0$$

und die Zeit einer vollständigen Schwingung gleich $2\pi\sqrt{\frac{k^2+h^2}{g h}}$ ist.

Mit $k = 0$ erhalten wir die Bewegungsgleichung für ein mathematisches Pendel, nämlich

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0,$$

wo l für h gesetzt wurde. Daher werden die Schwingungen des mathematischen Pendels und des Körpers unter denselben Anfangsbedingungen dieselben sein, wenn

$$l = \frac{k^2+h^2}{h},$$

und wird l die Länge des einfachen äquivalenten Pendels genannt. Der Körper wird aber auch dieselben Schwingungen unter sonst gleichen Verhältnissen machen, wenn seine ganze Masse in einem Punkte koncentriert wäre, welcher einen Abstand gleich der Länge des äquivalenten einfachen Pendels von der Aufhängeaxe besitzt, dieser Punkt wird „Schwingungsmittelpunkt", „Oscillationscentrum", „Unruhepunkt" genannt.

Die Theorie des Schwingungsmittelpunktes von Körpern entsprang aus der um das Jahr 1646 von Mersenne den Mathematikern seiner Zeit vorgelegten Frage nach der Zeit der Schwingungen von Körpern um horizontale Axen, wodurch dieselben aufgefordert wurden, ihre geistige Begabung zur Entdeckung dieser Oscillationsdauer zu verwerten. Es ist etwas sonderbar, dass alle jene, welche zuerst die Lösung dieses Problemes versuchten, unter welche Mersenne (Mersenni, Reflexiones Physico-Mathematicae, Cap. XI. et XII.) selbst zu zählen ist, wie Descartes (Lettres de Descartes, Tom. III, p. 487 &c.), Roberval (Lettres de Descartes, ib.), Wallis (Mechanica, sive De Motu), und Fabri (Tract. de Motu, Append. Physico-Math. De Centro Percussionis) schweigend annahmen, dass der Schwingungsmittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Stosses zusammenfalle; obgleich diese Meinung wahr ist, so ist dennoch ihre Richtigkeit ohne eine strenge wissenschaftliche Erklärung keineswegs einleuchtend. Indessen wurde kraft dieser Annahme der Schwingungsmittelpunkt gewisser Figuren korrekt bestimmt. Descartes gab eine richtige Lösung in dem Falle, wo eine ebene Fläche in ihrer Ebene schwingt, aber er fehlt in dem Falle, in welchem solide Körper und ebene Flächen seitliche Schwingungen machen. Roberval bestimmte die Lage des Schwingungsmittelpunktes richtig für ebene, in ihrer Ebene und seitlich schwingende Flächen, während

es ihm, zusammen mit Descartes, nicht gelang, eine korrekte Lösung des Problemes in dem Falle zu geben, wo es sich um Körper handelte. Die Arbeiten eines Huyghens, dessen Bemühungen, eine Lösung von Mersennes Problem zu erhalten, anfangs ohne Resultat blieben, wurden im Laufe der Zeit mit Erfolg gekrönt. Dieser Mathematiker veröffentlichte in dem vierten Teile seines Horologium Oscillatorium, welcher in dem Jahre 1673 erschien, die erste strenge und allgemeine Untersuchung des Schwingungsmittelpunktes. Die zwei folgenden Grundsätze machen die Basis seiner Betrachtungen aus. 1) Der Schwerpunkt eines Systemes materieller Körper kann sich nicht selbst zu einer Höhe erheben, die grösser als diejenige, aus welcher er gefallen ist, wie auch immer die gegenseitige Lage der Körper veränderlich gemacht werden mag. 2) Ein zusammengesetztes Pendel wird immer bis zu derjenigen Höhe aufsteigen, aus welcher es frei herabgefallen ist. Einige Jahre nach der Veröffentlichung des Horologium Oscillatorium wurde die Richtigkeit dieser Fundamentalsätze, welche wohl wahr, aber nicht genügend einfach genug sind, durch den Abbé Catelan (Journal des Sçavans, 1682 et 1684) in Frage gestellt, welcher gewisse gebrechliche Theorien seiner eigenen Art an Stelle der wertvollen Untersuchungen von Huyghens substituierte. Die Aufmerksamkeit der Mathematiker jener Zeit wurde sehr anhaltend auf diesen Gegenstand durch den Streit, welcher zwischen Huyghens und Catelan ausbrach, gerichtet. Die Ansicht von Huyghens erhielt volle Bestätigung durch die mehr elementaren Arbeiten eines L'Hôpital, eines Jacob Bernoulli und anderer Mathematiker. Weitere geschichtliche Notizen über diesen Gegenstand befinden sich zu Anfang des Kapitels über das Prinzip von D'Alembert.

1. Zu bestimmen, in welchem Punkte der Stange eines vollkommenen Pendels ein gegebenes Gewicht von unendlich kleinem Volumen befestigt werden muss, damit dasselbe die grösste Wirkung auf die Beschleunigung des Pendels hervorbringen kann.

Es sei m die Masse der Linse, a die Länge des vollkommenen Pendels, m' die Masse des gegebenen Gewichtes, a' der Abstand seines Befestigungspunktes vom Aufhängepunkte, l der Abstand des Schwingungsmittelpunktes des vollständigen Pendels vom Aufhängepunkte. Indem wir die Volumina von m und m' als unendlich klein voraussetzen, haben wir für die Lage des Schwingungsmittelpunktes die Relation

$$l = \frac{m a^2 + m' a'^2}{m a + m' a}.$$

Je kürzer die Stange eines vollkommenen Pendels ist, um so kleiner fällt die Schwingungszeit aus, folglich muss im vorliegenden Falle l ein Minimum sein. Indem wir daher bezüglich a' differentiieren, muss die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{d l}{d a'} = \frac{2 m' a' (m a + m' a') - m' (m a^2 + m' a'^2)}{(m a + m' a')^2} = 0,$$

folglich: $m' a'^2 + 2 m a m' a' = m a^2, \quad a' = \frac{a}{m'} \left\{ \sqrt{m^2 + m m'} - m \right\},$

womit der verlangte Befestigungspunkt gefunden ist.

Lady's and Gentleman's Diary, 1742. Diarian Repository, p. 394.
Euler, De Motu Corp. Solid. Prob. 48. Cor. I, p. 216.

2. Eine kreisförmige Platte schwingt das einemal um eine horizontale Tangente, das anderemal um eine horizontale Axe durch den Berührungspunkt von Tangente und Umfang, welche senkrecht zur Tangente ist. Wie verhalten sich die Schwingungszeiten?

Es seien l, l' die Längen der isochronen Pendel in dem ersteren und dem letzteren Falle resp., k, k' die Trägheitsradien der Platte um Axen durch ihren Mittelpunkt, parallel zu der Schwingungsaxe in jedem Falle. Ferner bezeichne a den Radius der Platte, A ihre Fläche, r den Abstand eines beliebigen Punktes in ihr vom Centrum, ϑ die Horizontalneigung dieses Abstandes, wenn die Platte in Ruhe hängt.

Die Längen der isochronen Pendel sind

$$l = \frac{a^2 + k^2}{a}, \quad l' = \frac{a^2 + k'^2}{a}.$$

Für die Trägheitsmomente Ak^2, Ak'^2 erhalten wir

$$Ak^2 = \iint r\,d\vartheta\,dr\,r^2 \sin^2\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3 \sin^2\vartheta\,d\vartheta\,dr = \frac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\,d\vartheta,$$

$$Ak^2 = \frac{1}{4}\pi a^4.$$

$$Ak'^2 = \iint r\,d\vartheta\,dr\,r^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\,d\vartheta\,dr = \frac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi} d\vartheta, \quad Ak'^2 = \frac{1}{2}\pi a^4.$$

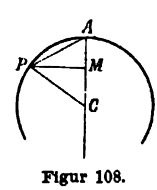
Weil aber $A = \pi a^2$ ist, so folgt $k^2 = \frac{1}{4}a^2$, $k'^2 = \frac{1}{2}a^2$, mithin ist

$$l = a + \frac{1}{4}a = \frac{5}{4}a, \qquad l' = a + \frac{1}{2}a = \frac{6}{4}a.$$

Sind nun t und t' die Schwingungszeiten, so ergiebt sich

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{l}{l'}} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

3. Welches ist die Länge eines einfachen Pendels, das in derselben Zeit wie der Bogen eines gegebenen Kreises schwingt, wenn die Schwingungsaxe horizontal durch den Mittelpunkt des Bogens und rechtwinkelig zu seiner Ebene läuft?



Figur 108.

Es sei (Fig. 108) C der Mittelpunkt des Kreises, A der Mittelpunkt des Bogens, P ein beliebiger Punkt in dem Bogen, $PM \perp AC$, $AM = x$, $AC = a$, $\delta m =$ der Masse eines Bogenelementes bei P, $l =$ der Länge des verlangten Pendels, dann ist offenbar

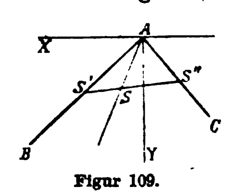
$$l = \frac{\Sigma(r^2\,\delta m)}{\Sigma(x\,\delta m)} = \frac{\Sigma(2\,a\,x\,\delta m)}{\Sigma(x\,\delta m)} = 2\,a.$$

ein Resultat, welches zeigt, dass die Länge des einfachen Pendels nur von

dem Halbmesser des Kreises und nicht von der Länge des Bogens abhängig ist.

Lady's Diary, 1841. 1—3. Walton, p. 430—432.

4. Ein Winkelhebel mit den Armlängen a und b und dem Winkel ϑ zwischen den Armen macht kleine Schwingungen in seiner eigenen Ebene um den Aufhängepunkt, welcher mit der Spitze seines Winkels zusammenfällt. Wie gross ist die Länge des isochronen einfachen Pendels?



Figur 109.

Es sei (Fig. 109) BAC eine beliebige Lage des Hebels in seiner Ebene, A sein Aufhängepunkt, $AB = a$, $AC = b$, $\measuredangle BAC = \vartheta$, m die Masse der Längeneinheit eines Armes, A Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes mit den Axen AX, AY in der Ebene der Bewegung, AY vertikal abwärts, $\measuredangle BAY = \alpha$, $\measuredangle CAY = \beta$, S der Schwerpunkt des Hebels mit den Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}$.

Das Trägheitsmoment des Hebels um die Axe A ist offenbar $\frac{1}{3}m(a^3+b^3)$.

Für die Coordinaten des Schwerpunktes S haben wir die Gleichungen

$$m(a+b)\bar{x} = m\frac{a^2}{2}\sin\alpha - m\frac{b^2}{2}\sin\beta, \quad \text{oder} \quad (a+b)\bar{x} = \frac{a^2}{2}\sin\alpha - \frac{b^2}{2}\sin\beta,$$

$$m(a+b)\bar{y} = m\frac{a^2}{2}\cos\alpha + m\frac{b^2}{2}\cos\beta, \quad \text{oder} \quad (a+b)\bar{y} = \frac{a^2}{2}\cos\alpha + \frac{b^2}{2}\cos\beta.$$

Die Quadratur dieser Gleichungen und die Addition der Resultate giebt

$$(a+b)^2(\bar{x}^2+\bar{y}^2) = \frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4} + \frac{1}{2}a^2b^2\cos(\alpha+\beta),$$

und weil $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \overline{AS}^2 = \bar{r}^2$, $\alpha + \beta = \vartheta$, so kommt

$$\bar{r} = \frac{1}{2(a+b)}\sqrt{a^4 + 2a^2b^2\cos\vartheta + b^4}.$$

Folglich ist das Moment der Masse $m(a+b)$ des Hebels um die Axe A

$$m(a+b)\bar{r} = \frac{m}{2}\sqrt{a^4 + 2a^2b^2\cos\vartheta + b^4}.$$

Mithin ist die Länge l des äquivalenten einfachen Pendels

$$\therefore l = \frac{\frac{1}{3}m(a^3+b^3)}{\frac{m}{2}\sqrt{a^4+2a^2b^2\cos\vartheta+b^4}} = \frac{2}{3}\frac{a^3+b^3}{\sqrt{a^4+2a^2b^2\cos\vartheta+b^4}}.$$

In dem besonderen Falle, wo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist, bekommen wir

$$l = \frac{2}{3}\frac{a^3+b^3}{\sqrt{a^4+b^4}}.$$

Sind die beiden Hebelarme einander gleich, dann wird

$$l = \frac{2}{3} a \sec \frac{\vartheta}{2},$$

und wenn hier $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist, erhalten wir

$$l = \frac{2}{3} a \sqrt{2}.$$

Nun ist aber $a\sqrt{2}$ der Durchmesser desjenigen Kreises, welcher durch die drei Punkte A, B, C geht, so dass wir den Satz aufstellen können: Macht ein gleicharmiger, winkelrechter Hebel mit homogenen Armen gleicher Dicke Schwingungen um seinen Winkelpunkt in seiner Ebene, so ist die Länge des isochronen einfachen Pendels gleich $\frac{2}{3}$ vom Durchmesser desjenigen Kreises, welchem die Arme als Sehnen angehören.

5. Zu bestimmen, in welchem Punkte seiner Länge ein gleichförmiger gerader Stab von geringer Dicke aufgehangen werden muss, damit er isochron mit einem gegebenen einfachen Pendel schwingen kann.

Es sei $2a =$ der Länge des Stabes, $l =$ der Länge des gegebenen Pendels, $h =$ dem Abstande des verlangten Aufhängepunktes von dem Schwerpunkte des Stabes, $k =$ seinem Trägheitsradius für eine zur Aufhängeaxe parallele Axe durch den Schwerpunkt.

Die Gleichung $l = \frac{k^2 + h^2}{h}$ giebt mit $k^2 = \frac{1}{3} a^2$, $h^2 - hl = -\frac{1}{3} a^2$,

oder
$$h = \frac{1}{2} l \pm \sqrt{\frac{1}{4} l^2 - \frac{1}{3} a^2}.$$

Daraus geht hervor, dass $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ der kleinste zulässige Wert von l ist.

6. Ein Quadrat schwingt um eine horizontale, zu seiner Ebene senkrechte Axe. Wo muss die Aufhängeaxe die Fläche des Quadrates schneiden, damit die Schwingungszeit ein Minimum sein kann?

Es sei a die Länge einer Quadratseite, k^2 der Trägheitsradius der Fläche für eine Axe parallel zur Aufhängeaxe durch ihren Schwerpunkt, h der Abstand des Aufhängepunktes von dem Schwerpunkte, l die Länge des entsprechenden einfachen Pendels.

Zunächst ist
$$l = \frac{k^2 + h^2}{h}.$$

Nun haben wir im vorliegenden Falle $k^2 = \frac{1}{6} a^2$, folglich

$$l = \frac{\frac{1}{6} a^2 + h^2}{h} \quad \text{d. i.} \quad h^2 - lh = -\frac{1}{6} a^2, \tag{1}$$

womit $$h = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{1}{6}a^2}.$$

Damit die Schwingungszeit ein Minimum werde, muss l ein Minimum sein, wofür aus (1) die Bedingung folgt, da

$$2h\,dh - l\,dh - h\,dl = 0 \text{ ist}, \qquad \frac{dl}{dh} = \frac{2h - l}{h} = 0,$$

mithin muss $h = \frac{1}{2}l$ sein, was giebt

$$h = h \pm \sqrt{h^2 - \frac{1}{6}a^2}, \qquad h = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Der Ort des verlangten Punktes ist demnach ein Kreis vom Halbmesser $\frac{a}{\sqrt{6}}$, dessen Centrum mit dem Mittelpunkte des Quadrates zusammenfällt.

7. Welches ist die Gestalt einer gleichschenkeligen Dreiecksfläche, wenn ihre Schwingungen dieselbe Amplitude und Periode um eine zu ihrer Ebene senkrechte durch die Spitze des Dreieckes gehende Axe und um eine parallele Axe durch den Mittelpunkt seiner Basis haben?

Es sei a die Länge eines Schenkels des Dreieckes, h seine Höhe, 2α der Winkel in seiner Spitze, k der Trägheitsradius für eine zu den Aufhängeaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt, l_1 die Länge des äquivalenten einfachen Pendels für die Spitze, l_2 diejenige für den Mittelpunkt der Basis als Aufhängepunkt.

Im vorliegenden Falle haben wir

$$l_1 = \frac{k^2 + \left(\frac{2}{3}h\right)^2}{\frac{2}{3}h} = \frac{9k^2 + 4h^2}{6h}, \qquad l_2 = \frac{k^2 + \left(\frac{1}{3}h\right)^2}{\frac{1}{3}h} = \frac{9k^2 + h^2}{3h}.$$

Zufolge der gegebenen Bedingung muss aber sein $l_1 = l_2$, daher

$$\frac{9k^2 + 4h^2}{6h} = \frac{9k^2 + h^2}{3h}, \quad \text{oder} \quad 9k^2 + 4h^2 = 18k^2 + 2h^2, \text{ mithin}$$

$$9k^2 = 2h^2.$$

Nun ist aber $k^2 = \frac{a^2}{18}(1 + 2\sin^2\alpha) = \frac{a^2}{18}(3 - 2\cos^2\alpha)$, $h = a\cos\alpha$, folglich

$$\frac{a^2}{2}(3 - 2\cos^2\alpha) = 2a^2\cos^2\alpha, \quad \text{oder} \quad 3 = 6\cos^2\alpha,$$

womit $$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \alpha = 45^0, \qquad 2\alpha = 90^0.$$

Mithin muss im vorliegenden Falle der Winkel in der Spitze des gleichschenkeligen Dreieckes ein rechter Winkel sein.

Die Längen der entsprechenden äquivalenten einfachen Pendel sind für einen Winkel α

$$l_1 = \frac{1 + 2\cos^2\alpha}{4\cos\alpha}\, a, \qquad l_2 = \frac{1}{2}\frac{a}{\cos\alpha},$$

so dass das Verhältnis der Schwingungszeiten

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \sqrt{\frac{1 + 2\cos^2\alpha}{2}}.$$

Mit $t_1 = t_2$ bekommen wir wie vorhin $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $2\alpha = \frac{\pi}{2}$.

8. Ein Kreissektor schwingt um eine horizontale, zu seiner Ebene senkrechte und durch den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises gehende Axe. Welches ist der Winkel des Sektors, wenn die Länge des isochronen einfachen Pendels gleich der halben Länge des Bogens ist?

Es bezeichne M die der Fläche proportionale Masse des Sektors, k seinen Trägheitsradius für die Suspensionsaxe, r den Halbmesser des Sektorkreises, b die Länge des Bogens, φ den Winkel des Sektors, h den Abstand seines Schwerpunktes von der Suspensionsaxe, l die Länge des äquivalenten mathematischen Pendels, dann ist

$$l = \frac{Mk^2}{Mh} = \frac{k^2}{h}.$$

Nun haben wir $l = \frac{b}{2} = r\frac{\varphi}{2}$, $Mk^2 = \frac{\varphi}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}r^4 = \varphi\frac{r^4}{4}$, $M = \frac{1}{2}\varphi r^2$, also

$k^2 = \frac{1}{2}r^2$, $h = \frac{4}{3}r\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$, folglich

$$r\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2}r^2}{\frac{4}{3}r\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}} = \frac{\frac{3}{8}\varphi r}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

mithin $\qquad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4}, \quad \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \frac{3}{4}, \quad 1 - \cos\varphi = \frac{9}{8},$

so dass $\qquad \cos\varphi = -\frac{1}{8}, \quad \varphi = 97^0\,10'\,52{\cdot}67'',$

womit der verlangte Winkel bestimmt ist.

9. Ein gleichförmiger Draht von gegebener Länge besitzt die Gestalt einer Cycloide und schwingt um eine gerade, seine beiden Endpunkte verbindenden Linie. Welches ist die Länge des isochronen einfachen Pendels?

Es sei a die gegebene Länge des Drahtes, r der Halbmesser des Erzeugungskreises der Cycloide, φ sein Wälzungswinkel, M die Masse des

Drahtes, welche seiner Länge proportional ist, k sein Trägheitsradius für die Schwingungsaxe, h seine Schwerpunktsordinate, l die gesuchte Länge des entsprechenden mathematischen Pendels.

Die Gleichungen der Cycloide sind mit der Drehaxe als Abscissenaxe, einem Endpunkte der Curve als Coordinatenanfang

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi).$$

Damit ist das Moment des Drahtes um die Drehaxe

$$Mh = \int y\,ds = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos\varphi)\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\,d\varphi$$

$$= 8r^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2} = \frac{32}{3}r^2,$$

folglich die Schwerpunktsdistanz, da $M = 8r$ ist,

$$h = \frac{32}{3}\cdot\frac{r^2}{M} = \frac{32}{3}\cdot\frac{r^2}{8r} = \frac{4}{3}r.$$

Ferner haben wir für das Trägheitsmoment des Drahtes um die Drehaxe

$$Mk^2 = \int y^2\,ds = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos\varphi)^2 r\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\,d\varphi$$

$$= 16r^3 \int_0^{2\pi} \sin^5\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2},$$

$$Mk^2 = 16r^3\left[-\frac{1}{80}\cos 5\frac{\varphi}{2} + \frac{5}{48}\cos 3\frac{\varphi}{2} - \frac{5}{8}\cos\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{16^2}{15}r^3.$$

Mithin ist das Quadrat des Trägheitshalbmessers

$$k^2 = \frac{16^2}{15}\frac{r^3}{M} = \frac{16^2}{15}\cdot\frac{r^3}{8r} = \frac{32}{15}r^2.$$

Durch diese Werte erhalten wir für die Länge des verlangten Pendels

$$l = \frac{k^2}{h} = \frac{\frac{32}{15}r^2}{\frac{4}{3}r} = \frac{8}{5}r,$$

oder, weil $r = \frac{1}{8}a$ ist,

$$l = \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot r = \frac{1}{5}a.$$

Demnach ist die Länge des äquivalenten mathematischen Pendels gleich $\frac{1}{5}$ von der Länge des ganzen Cycloidenbogens.

10. Eine quadratische Platte schwingt flachwegs um eine horizontale Axe, welche durch einen ihrer Winkelpunkte geht. Welches ist die Länge des isochronen einfachen Pendels?

Die verlangte Länge ist $= \frac{7}{12} \times$ Diagonale.

11. Ein schwerer Kreisbogen vom Halbmesser a und dem Centriwinkel 2α schwingt in einer vertikalen Ebene zwischen zwei geneigten Ebenen. Zu finden die Länge des isochronen, einfachen Pendels.

Die zu suchende Länge ist gleich $\frac{a\alpha}{\sin\alpha}$.

12. Ein Pendel besteht aus einem unangebbar dünnen Stabe OA und einer Kugel mit dem Mittelpunkte A. Zu bestimmen den Punkt A' in der Linie OA, in welchem der Mittelpunkt einer zweiten Kugel befestigt sein muss, damit die Schwingungen des ganzen Systemes in der kleinstmöglichen Zeit ausgeführt werden können.

Es sei $OA = a$, $OA' = a'$, ferner seien r, r' die Radien, m, m' die Massen der Kugeln A, A', dann wird gefunden werden:

$$a' = \frac{1}{m'}\left\{m(m+m')a^2 + \frac{2}{5}m'(mr^2 + m'r'^2)\right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{ma}{m'}.$$

Euler, Theoria Motus Corporum Solidorum, p. 215.
10—12. Walton, p. 434—435.

Vierter Abschnitt.

Zusammengesetzte materielle Pendel.

Der Hauptfeind der konstanten Schwingungszeit des als Regulator einer Uhr gebrauchten einfachen Kreispendels ist der Einfluss der Temperatur auf seine Länge. Durch die Veränderung der Pendellänge wird die Lage des Schwerpunktes der Pendels verrückt, wodurch eine andere Schwingungszeit entsteht. Bei den gewöhnlichen Uhren wird diesem Umstande dadurch Rechnung getragen, dass die Linse mittelst einer Stellschraube verschoben werden kann, wodurch man es in der Hand hat, die Pendellänge nach Bedürfnis zu vergrössern und zu verkleinern. Für bessere Pendeluhren verfertigt man indessen die Pendelstange aus gut getrocknetem und ausgelaugtem Tannenholze, dessen Länge sich nur wenig unter den verschiedenen Witterungseinflüssen ändert. Bei Chronometeruhren ist es aber nötig, besondere Kompensationen anzubringen; man konstruiert für dieselben Rostpendel und Quecksilberkompensationen. Der Leser, welcher die verschiedenen Methoden kennen lernen will, welche zum Zwecke der Regulierung einer Pendeluhr angewendet werden, muss auf Abhandlungen über Uhren verwiesen werden.

Das Rostpendel. Zur Konstruktion des Rostpendels wird Eisen und Zink verwendet. A (Fig. 110, S. 295) sei die Projektion der Schwingungsaxe des Pendels. Seine mittlere Stange a besteht aus Eisen, welche an ihrem unteren Ende einen Quersteg RS trägt. An diesem Stege sind zwei rückwärts reichende, in einen Steg OP übergehende Zinkstangen b befestigt, die sich relativ gegen die Stange a verschieben können. Der

Steg OP trägt noch zwei eiserne, den Steg RS durchbohrende, ihn nicht berührende und unter RS in dem Stege MN sich vereinigende Stangen c. Der Steg MN trägt in seiner Mitte die Linsenstange und kann die Linse selbst auf ihrer Stange durch eine Stellschraube verschoben werden.

Figur 110.

Es mögen die Stangen a und c aus demselben Materiale bestehen, der Wärmeausdehnungscoëfficient dieser Stangen sei α, derjenige der Stangen b sei β. Die Entfernung des untersten Punktes der Linse von dem unteren Stege sei d, der Wärmeausdehnungscoëfficient der Linsenstange δ, r der Halbmesser der Linse und ϱ ihr Ausdehnungscoëfficient.

Da in einem solchen Falle die Masse der Linse bei weitem den grössten Teil der Gesammtmasse des Pendels ausmacht, so ist die rechnungsmässige Länge des Pendels gleich dem Abstande des Linsenmittelpunktes von dem Aufhängepunkte A, von welcher Länge die Schwingungsdauer des Pendels abhängt. Dieser Abstand muss unter allen Umständen konstant bleiben, wenn die Schwingungszeit des Pendels eine unveränderliche sein soll. Es kommt nun hier darauf an, die Längen der Stangen so zu bestimmen, dass dieser Abstand l immer konstant bleibt, welche Ermittelung eine näherungsweise sein kann, weil die genaue Adjustierung durch Probieren geschehen muss.

Für irgend einen Augenblick ist der Abstand des Linsencentrums von der Aufhängeaxe A

$$l = a - b + c + d - r.$$

Ändert sich nun die Temperatur von dieser Zeit an um t^0, so haben wir als Längenänderung des Pendels

$$a \,.\, \alpha t - b \,.\, \beta t + c \,.\, \alpha t + d \,.\, \delta t - r \,.\, \varrho t.$$

Diese Längenänderung muss aber für eine konstante Schwingungszeit des Pendels gleich Null sein, so dass wir die Bedingung erhalten

$$(a + c)\,\alpha - b\,\beta + d\,\delta - r\,\varrho = 0.$$

In dieser Gleichung haben $d\,\delta$ und $r\,\varrho$ eine ganz untergeordnete Bedeutung. Bezeichnet e die Entfernung des Pendelschwerpunktes von dem unteren Stege, so möge näherungsweise gesetzt werden $d\,\delta - r\,\varrho = e\,\alpha$, dann erhalten wir

$$(a + c + e)\,\alpha - b\,\beta = 0,$$

oder, wenn wir das Produkt $b\,\alpha$ gleichzeitig addieren und subtrahieren,

$$(a - b + c + e)\,\alpha - b\,(\beta - \alpha) = 0,$$

und weil $a - b + c + e = l$ ist,

$$l\,\alpha - b\,(\beta - \alpha) = 0,$$

woraus folgt

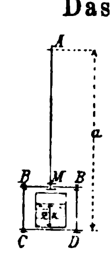
$$b = \frac{\alpha}{\beta - \alpha}\, l.$$

Jedenfalls muss $b < l$ sein, denn sonst liesse sich ein Rostpendel gar nicht konstruieren, es muss also auch $\beta - \alpha > \alpha$, oder $\beta > 2\alpha$ sein. Diese letztere Bedingung sagt uns, wie das Material beschaffen sein muss. Der Ausdehnungscoëfficient für Zink ist etwas mehr als doppelt so gross wie derjenige des Eisens, denn wir haben $\alpha = 0{\cdot}000012$, $\beta = 0{\cdot}000030$. Mithin ist die erforderliche Länge der Zinkstangen

$$b = \frac{12}{30 - 12} l = \frac{2}{3} l.$$

Mit diesen Daten kann vorläufig das Rostpendel konstruiert werden. Die genaue Adjustierung ist mittelst der anzubringenden Regulierungsschrauben vorzunehmen.

Das Quecksilberpendel. Gewöhnlich hat ein Quecksilberpendel folgende Einrichtung. Mit der Schwingungsaxe A (Fig. 111) des Pendels ist eine Eisen- oder Stahlstange verbunden, welche an ihrem unteren Ende einen kleinen verschiebbaren Steg BB trägt. Nach unten hin nimmt der Steg BB zwei andere, von demselben Material verfertigte Stangen BC, BD auf, welche einen Teller CD tragen. Diese tellerförmige Platte ist durch Schrauben B etwas verschiebbar, die unteren Schrauben C, D dienen nur zu ihrer Befestigung. Auf der Platte steht ein cylindrisches Glasgefäss, welches beinahe bis oben an mit Quecksilber gefüllt und durch einen Deckel verschlossen ist. Zwischen dem Deckel und dem Steg BB muss so viel Raum sein, dass man bequem zu der Regulierungsschraube M gelangen kann. Vor dem Herabfallen wird das Gefäss auf irgend eine Weise geschützt.



Figur 111.

Die Entfernung des Tellers CD von der Axe des Pendels sei a, der Ausdehnungscoëfficient der Stangen α, die Höhe der Quecksilbersäule $2x$, welche so zu berechnen ist, dass eine richtige Compensation zum Vorschein kommt. Die Quecksilbermasse macht den grössten Teil der Masse des Pendels aus, so dass die Länge l des Pendels gleich dem Abstande des Schwerpunktes der Quecksilberfüllung von dem Drehpunkte A gesetzt werden kann, das ist $l = a - x$. Die Addenten a und x sind nun so zu wählen, dass die resultierende Änderung von $a - x$ gleich Null wird. Bezeichnen wir daher diese Änderung von x mit Δx, die Änderung der Temperatur in Graden mit t, so haben wir die Bedingung

$$a \,.\, \alpha t - \Delta x = 0. \tag{1}$$

Die Vergrösserung von x, bei wachsender Temperatur, ist von der Ausdehnung des Quecksilbers und des Glases abhängig. Bezeichnet φ den Volumenausdehnungscoëfficienten des Quecksilbers, β den Längenausdehnungscoëfficienten des Glases, V das Anfangsvolumen des Quecksilbers, so ist

$$V(1 + \varphi t) = r^2 (1 + \beta t)^2 \pi \,.\, 2(1 + \Delta x).$$

Das ursprüngliche Volumen des Quecksilbers war $V = \pi r^2 . 2x$, wo r den Halbmesser des cylindrischen Glases bezeichnet, sonach ergiebt sich

$$1 + \varphi t = (1 + \beta t)^2 \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = 1 + 2\beta t + \frac{\Delta x}{x},$$

oder $$\Delta x = x(\varphi - 2\beta)\, t.$$

Da nun die Bedingung (1) erfüllt werden muss, so bekommen wir

$$x = \frac{\alpha}{\varphi - 2\beta} a,$$

oder, wenn wir anstatt der Länge a die Pendellänge $l = a - x$ einführen,

$$x = \frac{\alpha}{\varphi - 2\beta}(l + x), \qquad \text{womit} \qquad \therefore x = \frac{\alpha}{\varphi - 2\beta - \alpha} l.$$

Wenn man, wie dieses gewöhnlich geschieht, die Stangen aus Eisen oder Stahl anfertigt, dann ist im Mittel $\alpha = 0{\cdot}000012$, ferner ist für Glas $\beta = 0{\cdot}000009$, und für Quecksilber $\varphi = 0{\cdot}00018$, pro Grad Celsius, mit welchen Werten sich ergiebt

$$x = \frac{12}{180 - 18} a = \frac{2}{27} a,$$

oder $$x = \frac{12}{180 - 30} l = \frac{2}{25} l.$$

Die endgültige Bestimmung der Länge a und der Höhe $2x$ hat durch Regulierung zu geschehen. Hier lässt sich die Abstimmung noch genauer als beim Rostpendel machen, weshalb man die Quecksilberpendel ausschliesslich zu astronomischen Uhren verwendet, während die Rostpendel an feineren Hausuhren sich vorfinden.

Das Quecksilberpendel erfand um das Jahr 1715 George Graham, er konstruierte dasselbe aus einer eisernen Stange und einem gusseisernen cylindrischen Gefässe, in dessen Deckel die Pendelstange eingeschraubt und welche in der gewöhnlichen Weise aufgehangen war.

Die Bedingung, dass die Lage des Schwingungsmittelpunktes nicht alteriert wird, lässt sich in rein analytischer Weise wie folgt ableiten.

Es sei Mk^2 das Trägheitsmoment des eisernen Cylinders und der Stange um die Aufhängeaxe, c der Abstand ihres gemeinsamen Schwerpunktes von dieser Axe, l die Länge des Pendels von dem Aufhängepunkte bis zu dem Boden des Cylinders, a der innere Halbmesser des Cylinders, nM die Masse des Quecksilbers, h die Höhe, welche diese Masse in dem Cylinder einnimmt.

Das Trägheitsmoment des Quecksilbercylinders um eine gerade, zu seiner Axe senkrechte, durch seinen Schwerpunkt gehende Linie ist $nM\left(\frac{h^2}{12} + \frac{a^2}{4}\right)$. Folglich ist das Trägheitsmoment des ganzen Körpers um die Aufhängeaxe

$$Mn\left\{\frac{h^2}{12}+\frac{a^2}{4}+\left(l-\frac{h}{2}\right)^2\right\}+Mk^2,$$

und das Moment der ganzen, in ihrem Schwerpunkt vereinigt gedachten Masse um diese Axe ist

$$Mn\left(l-\frac{h}{2}\right)+Mc.$$

Die Länge L des äquivalenten einfachen Pendels ist das Verhältnis aus diesen beiden Momenten und ergiebt sich nach einiger Reduktion:

$$L=\frac{n\left(\frac{h^2}{3}-lh+\frac{a^2}{4}\right)+k^2}{n\left(l-\frac{h}{2}\right)+c}. \tag{1}$$

Die linearen Wärmeausdehnungscoëfficienten seien pro Celsiusgrad für Eisen α, für Quecksilber β. Die Werte dieser Coëfficienten sind so klein, dass ihre Quadrate vernachlässigt werden können. Bei der Berechnung der Höhe der Quecksilbersäule müssen wir beachten, dass der Cylinder sich auch seitlich ausdehnt, die relative vertikale Ausdehnung des Quecksilbers ist $3\beta-2\alpha$, welche wir durch γ darstellen wollen. Wenn die Temperatur eines jeden Teiles des Pendels um t^0 wächst, so nehmen die Grössen a, l, k, c in dem Verhältnisse $(1+\alpha t):1$ zu, während h in dem Verhältnisse $(1+\gamma t):1$ abnimmt. Weil nun die Pendellänge L dadurch nicht alteriert werden darf, so muss die Bedingung erfüllt werden

$$\left(\frac{dL}{da}a+\frac{dL}{dl}l+\frac{dL}{dc}c\right)\alpha+\frac{dL}{dh}h\gamma=0.$$

Aber L ist eine homogene Funktion von einer Dimension, so dass

$$\frac{dL}{da}a+\frac{dL}{dl}l+\frac{dL}{dc}c+\frac{dL}{dh}h=L.$$

Daher wird die Bedingung durch Substitution dieses Wertes

$$\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}=\frac{h}{L}\frac{dL}{dh}.$$

Bezeichnen A und B den Zähler und den Nenner des für L durch die Gleichung (1) gegebenen Ausdruckes und nehmen wir das logarithmische Differential, so kommt

$$\frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dh}=\frac{n\left(\frac{2}{3}h-l\right)}{A}+\frac{\frac{1}{2}n}{B}=\frac{n}{B}\left(\frac{\frac{2}{3}h-l}{L}+\frac{1}{2}\right).$$

Folglich ist die verlangte Bedingung

$$\frac{\alpha}{3(\beta-\alpha)}=\frac{h}{l-\frac{h}{2}+\frac{c}{n}}\left(\frac{l-\frac{2}{3}h}{L}-\frac{1}{2}\right).$$

Diese Rechnung ist mehr von theoretischer als von praktischer Wichtigkeit, denn die numerischen Werte von α und β hängen ein gut Teil von der Reinheit der Metalle und von der Art, in welcher das Eisen bearbeitet ist, ab, auch sind diese Werte nicht absolut konstant. Die hier gegebene Lösung findet sich vor in Routh, Dynamics etc., p. 72.

Handelt es sich darum, diejenige Quecksilbermenge zu berechnen, welche dem Quecksilber im Gefässe hinzuzufügen ist, damit das Pendel im stande ist, genau Sekunden zu schwingen, so kann dieses in folgender Weise geschehen.

Es seien l, h die Abstände des Schwingungsmittelpunktes und des Schwerpunktes des aus der Masse m bestehenden Quecksilberpendels von der Aufhängeaxe, h' sei der Axenabstand des Schwerpunktes der kleinen Quantität Quecksilber von der Masse μ, durch deren Hinzufügung das Pendel exact Sekunden schwingt; L bezeichne die Länge des Sekundenpendels und r den Halbmesser des Quecksilbercylinders.

Das Trägheitsmoment der Quecksilbermasse μ, welche als eine kreisförmige Flüssigkeitsplatte angesehen werden kann, um einen beliebigen Durchmesser, daher auch um einen Durchmesser parallel zu der Axe, an welcher das Pendel aufgehangen ist, ist gleich $\frac{1}{4}\mu r^2$, mithin sein Trägheitsmoment um die Aufhängeaxe gleich $\mu(h'^2 + \frac{1}{4}r^2)$. Ferner ist, wenn der Trägheitshalbmesser der Quecksilbermasse m um eine durch ihren Schwerpunkt gehende, zur Aufhängeaxe parallele Linie mit k bezeichnet wird, ihr Trägheitsmoment um diese Axe $m(h^2 + k^2)$. Mithin haben wir durch die Formel für den Schwingungsmittelpunkt annähernd

$$(\mu h' + m h) L = \mu (h'^2 + \frac{1}{4} r^2) + m (h^2 + k^2).$$

Aber es soll auch sein

$$h l = h^2 + k^2,$$

folglich erhalten wir

$$(\mu h' + m h) L = \mu (h'^2 + \frac{1}{4} r^2) + m h l, \text{ oder } \frac{\mu}{m}\left\{h'(L - h') - \frac{1}{4} r^2\right\} = h(l - L),$$

womit sich ergiebt

$$\frac{\mu}{m} = \frac{4 h (l - L)}{4 h' (L - h') - r^2},$$

so dass das Verhältnis der hinzuzufügenden Quecksilbermasse zu der vorhandenen Quecksilbermenge annähernd bestimmt ist.

Eine andere Ursache der Störung des gleichförmigen Ganges einer Pendeluhr ist der Widerstand der Luft. Dieser erzeugt eine aufwärts gerichtete Kraft, welche in dem Schwerpunkte des Volumens des Pendels angreift und gleich der durch das Pendel verdrängten Luftmenge ist.

Bezeichnet V das Volumen des Pendels, ϱ die Dichtigkeit der Luft, h_1 den Abstand des Schwerpunktes der Masse, h_2 denjenigen des Schwerpunktes des Volumens von der Aufhängeaxe, Mk^2 das Trägheitsmoment der Masse um dieselbe Axe; nehmen wir an, dass das Pendel für eine Ebene durch die Axe und einen der beiden Schwerpunkte symmetrisch ist, dann ist die Bewegungsgleichung

$$Mk^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -Mg h_1 \sin \vartheta + V \varrho g h_2 \sin \vartheta. \tag{1}$$

Wählen wir nun den Schwingungswinkel klein, wie dieses gewöhnlich der Fall ist, dann können wir $\sin \vartheta = \vartheta$ setzen und bekommen

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + g\left(\frac{h_1}{k^2} - \frac{V\varrho}{M}\frac{h_2}{k^2}\right)\vartheta = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{g}{k^2}\left(h_1 - \frac{V\varrho}{M}h_2\right)\vartheta = 0.$$

Mithin ergiebt sich für die Länge l des äquivalenten mathematischen Pendels die Relation

$$\frac{k^2}{l} = h_1 - h_2 \frac{V\varrho}{M}. \tag{2}$$

Die Dichtigkeit der Luft ändert sich fortwährend, diese Änderung wird durch die Höhe des Barometerstandes angezeigt und es sei h der Wert von $h_1 - h_2 \frac{V\varrho}{M}$ für eine gewisse bestimmte Dichtigkeit ϱ. Nehmen wir an, dass die wirkliche Dichtigkeit $\varrho + \delta\varrho$ und die entsprechende Länge des Sekundenpendels $l + \delta l$ sei, dann ist, indem wir die (2) differentiieren folgt $\frac{k^2 \delta l}{l^2} = h_2 \frac{V}{M} \delta \varrho$,

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{h_2}{h} \cdot \frac{V\varrho}{M} \cdot \frac{\delta \varrho}{\varrho}.$$

Bezeichnet noch T die Schwingungszeit, so haben wir

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{und} \quad \therefore \frac{\delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\delta l}{l}.$$

Wenn der Schwerpunkt der Masse und derjenige des Volumens sehr nahe zusammenfallen würden und das Gewicht der verdrängten Luft $\frac{1}{7200}$ von dem Gewichte des Pendels wäre, dann würde beim Steigen des Barometers um einen englischen Zoll ein Fehler an dem Sekundenpendel von nahezu zwei Sekunden pro Tag verursacht werden. Wird an der Pendelstange ein Körper von demselben Volumen als demjenigen der Linse, aber von sehr kleinem Gewichte so angebracht, dass der Schwerpunkt des Volumens mit der Aufhängeaxe zusammenfällt, dann verschwindet die Korrektion für den Auftrieb der Luft. Diese Methode zur Beseitigung des Luftwiderstandes wurde in dem Jahre 1871 von dem Astronomen Royal vorgeschlagen, aber

er bemerkt, dass eine solche Konstruktion wahrscheinlich unbequem für die praktische Ausführung sein würde.

Wenn ein Barometer an dem Pendel befestigt wird, dann steigt oder fällt das Quecksilber mit wechselnder Dichtigkeit der Luft und kann dieses Steigen oder Fallen so arrangiert werden, dass dadurch die Schwingungszeit unalteriert bleibt. Diese Methode zur Korrektion des Ganges einer Uhr wurde zuerst durch Dr. Robinson of Armagh im Jahre 1831 vorgeschlagen in den Memoiren der Astronomical Society und später von Mr. Denison in „The Astronomical Notices“ for Jan. 1873. In „The Armagh Places of Stars“, veröffentlicht in dem Jahr 1859, beschreibt Dr. Robinson die Schwierigkeiten, welche er zu überwinden hatte, ehe er von dem Gange der Uhr befriedigt war.

Gehen wir zu der Theorie dieser Konstruktion über, dann haben wir Gleichung (2) zu differentiieren, indem wir k^2 und h_1 als veränderlich, l als konstant annehmen. Dieses giebt

$$\frac{\delta(Mk^2)}{l} = \delta(Mh_1) - \delta(h_2 V\varrho).$$

Bezeichnet r das Steigen des Barometers in der Glasröhre, r' das Fallen in der Cysterne, dann ist $r' = mr$, wo m ein bekannter, von den Dimensionen des Barometers abhängiger Bruch ist. Es seien a und b die Tiefen der Quecksilberspiegel in der Röhre und Cysterne unter der Aufhängeaxe, $2c$ bezeichne den Durchmesser der Röhre und ϱ' die Dichtigkeit des Quecksilbers. Weil $\pi c^2 \varrho' r$ die Quantität des Quecksilbers ist, welche dem Gipfel des Quecksilbers in der Röhre hinzuzufügen und aus der Cysterne hinwegzunehmen ist, haben wir

$$\delta(Mk^2) = \pi c^2 \varrho' r \left\{\left(a - \frac{r}{2}\right)^2 - \left(b + \frac{r'}{2}\right)^2\right\},$$

$$\delta(Mh_1) = \pi c^2 \varrho' r \left\{\left(a - \frac{r}{2}\right) - \left(b - \frac{r'}{2}\right)\right\}.$$

Diese Grössen sind genau, wenn das Barometer eine blose gebogene Röhre ist, in welchem Falle die übertragenden Cylinder congruent sind und daher $m = 1$ ist. Wenn der Normalschnitt der Cysterne grösser als derjenige der Röhre ist, so haben wir hier die Differenz der Momente der zwei Cylinder um Axen durch ihre Schwerpunkte vernachlässigt. Weil r selten grösser als ein englischer Zoll ist, so können wir schreiben

$$\delta(Mk^2) = \pi c^2 \varrho' r (a^2 - b^2), \qquad \delta(Mh_1) = \pi c^2 \varrho' r (a - b).$$

Weil ϱ eine sehr kleine Grösse ist, so können wir die mit ϱ multiplizierten Variationen von Vh_2 vernachlässigen. Also haben wir

$$\frac{\delta\varrho}{\varrho} = \frac{\pi c^2 H \varrho'}{V\varrho h_2} \cdot \frac{a + b - l}{l} r,$$

wo $H = b - a =$ der Höhe des Barometers ist. Wenn die Lufttemperatur

sich nicht ändert, so ist $\frac{\delta\varrho}{\varrho} = \frac{\delta H}{H}$ und $r(1+m) = \delta H$. Daher erhalten wir als die verlangte Bedingung

$$\frac{\pi c^2 H \varrho'}{V\varrho} \cdot \frac{H}{h_2} \cdot \frac{a+b-l}{l} = 1 + m.$$

Es ist offenbar nötig, dass $a + b > l$ ist. Das Quecksilbergefäss von Graham's Quecksilberpendel könnte, wie Mr. Denison bemerkt, als Cysterne gebraucht werden. Die Höhe des Barometers beläuft sich auf 30 englische Zoll, so dass es nur angewendet werden kann, wenn das Pendel eine grössere Länge als das Sekundenpendel, dessen Länge etwa 39 engl. Zoll beträgt, besitzt. Professor Rankine las der britischen Assiciation im Jahre 1853 eine kleine Schrift vor, wodurch er darthat, dass man eine Uhr mit einem Centrifugal- oder Rotationspendel verwenden, von welchem ein Teil aus einem Siphonbarometer bestehen solle. Das Steigen und Fallen des Barometers würde auf den Gang der Uhr einwirken und sodann würde die mittlere Höhe der Quecksilbersäule sich während einer beliebig langen Periode von selbst registrieren. Wenn wir annehmen, dass das Pendel eine Quantität Luft mit sich fortreisst, welche in einem konstanten Verhältnisse zu der Dichtigkeit ϱ der umgebenden Luft steht und fügen $\gamma\varrho$ dem Trägheitsmomente des Pendels hinzu, ohne die bewegende Kraft zu vermehren, so können wir zeigen, dass die Änderung, welche an dem einfachen äquivalenten Pendel durch die Dichtigkeitsänderung $\delta\varrho$ hervorgebracht wird, gegeben ist durch $\delta l = \frac{\delta\varrho}{M h_1}$. Auch lässt sich dieses darthun mit Rücksicht auf die Weise, wie Dr. Robinson den Auftrieb korrigiert.

Routh, Dynamics, p. 73 & c.

Bei manchen experimentellen Untersuchungen macht es sich nötig, das Trägheitsmoment des Körpers, mit welchem experimentiert wird, um irgend eine Axe zu finden. Wenn der Körper von regulärer Gestalt und so weit homogen ist, dass die dadurch hervorgerufenen Fehler vernachlässigt werden können, so lässt sich das Trägheitsmoment durch Calculation bestimmen. Aber manchmal kann dieses nicht geschehen. Sind wir in der Lage, den Körper unter der Wirkung der Schwerkraft um irgend eine zu der gegebenen Axe parallele und horizontale Axe schwingen zu lassen, dann können wir den Schwingungsradius für eine parallele Axe durch seinen Schwerpunkt mit Hilfe der Formel

$$l = \frac{k^2 + h^2}{h}$$

berechnen, aus welcher sich ergiebt

$$k = \sqrt{(l-h)h}.$$

Dieses verlangt indessen, dass die Abstände des Schwerpunktes von den Axen sehr genau gefunden werden sollten. Manchmal ist es bequemer, den Körper an einem Pendel von bekannter Masse zu befestigen, dessen Schwingungsradius um eine feste horizontale Axe vorher durch Beobachtung der Schwingungszeit gefunden worden ist. Indem dann eine neue Bestimmung der Schwingungszeit vorgenommen wird, ergiebt sich das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Körpers, sodann dasjenige des gegebenen Körpers, da die Massen des Pendels und dieses Körpers bekannt sind.

Wenn der Körper die Gestalt einer Platte besitzt, so genügen im allgemeinen drei Beobachtungen, um die Trägheitshalbmesser für drei durch den Schwerpunkt gehende Axen und sodann die Trägheitsellipsen für den Schwerpunkt zu finden. Zur Bestimmung der Trägheitsellipsoide eines soliden Körpers für seinen Schwerpunkt sind im allgemeinen sechs Beobachtungen nötig.

Fünfter Abschnitt.

Von der Länge des Sekundenpendels.

Die Schwingungen eines festen Körpers können zur Bestimmung des numerischen Wertes der Beschleunigung g der Schwere verwendet werden, wodurch sich auf einfacherem Wege ein sichereres Resultat als mit der Atwood'schen Fallmaschine ergiebt.

Bezeichnet τ die halbe Zeit einer kleinen Schwingung, welche ein Körper um eine horizontale Axe im Vacuum macht, h den Abstand seines Schwerpunktes von der festen Drehaxe, k den Trägheitsradius für eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe, dann haben wir

$$k^2 + h^2 = \lambda h \tau^2, \tag{1}$$

wo $\lambda = \frac{g}{\pi^2}$, so dass λ die Länge des mathematischen Pendels ist, dessen vollständige Schwingungszeit zwei Sekunden beträgt.

Diese Formel können wir auf jeden beliebigen regelmässigen Körper, für welchen die Grössen k^2 und h durch Rechnung sich bestimmen lassen, anwenden. Experimente wurden mit einem Stabe von konstantem, rektangulärem Querschnitte ausgeführt, welchen man um das eine seiner Enden schwingen liess, in welchem Falle die Länge des äquivalenten, mathematischen Pendels $\frac{k^2 + h^2}{h}$ gleich $\frac{2}{3}$ von der Länge des Stabes ist. Die obige Formel giebt alsbald λ oder g, wenn die Zeit einer Schwingung beobachtet worden ist. Dadurch, dass man den Stab umkehrt und auch

um sein anderes Ende schwingen lässt und das Mittel der Resultate der Schwingungszeiten für eine jede Lage nimmt, kann irgend einem Fehler vorgebeugt werden, welcher seinen Grund in einem Mangel der Gleichmässigkeit seiner Dichtigkeit oder Gestalt hat. Es ist indessen gefunden worden, dass die Gleichmässigkeit der einzelnen Stäbe, wenn deren mehrere verwendet werden, selbst wenn man sie aus einzelnen Lamellen zusammensetzt, nicht so hergestellt werden kann, um mit jedem Stabe ein Resultat zu erhalten, welches mit demjenigen, durch einen der anderen Stäbe erhaltenen, übereinstimmt.

Lassen wir einen Stab um zwei parallele Axen, die verschiedene Abstände von seinem Schwerpunkte besitzen, kleine Schwingungen machen, so bestehen für dieselben mit Beachtung der Gleichung (1) die Relationen

$$k^2 + h^2 = \lambda h \tau^2, \qquad k^2 + h'^2 = \lambda h' \tau'^2, \tag{2}$$

durch welche wir, indem wir k^2 aus ihnen eliminieren, zu der Gleichung gelangen

$$\frac{h^2 - h'^2}{\lambda} = h \tau^2 - h' \tau'^2, \tag{3}$$

womit λ bestimmt ist. Weil k^2 in dieser Gleichung nicht enthalten ist, so ist nun die Gestalt und die materielle Beschaffenheit des Stabes keine Sache von Wichtigkeit mehr. Werden in einem Körper zwei Öffnungen angebracht, in denselben zwei Schneiden befestigt und stützt sich der Körper mittelst dieser Schneiden entweder auf eine horizontale Ebene oder in zwei dreieckigen Öffnungen, um das Gleiten zu verhindern, so kann der Körper durch kleine Bögen schwingend gemacht werden. Die senkrechten Entfernungen h, h' des Schwerpunktes von der Drehaxe müssen mit grosser Sorgfalt gemessen werden, und giebt sodann die Formel die Grösse λ.

Bei Kapitän Kater's Methode ist an dem Körper ein gleitendes Gewicht von der Gestalt eines Ringes angebracht, welches an dem Stabe auf und ab bewegt und mittelst einer Schraube festgestellt werden kann. An dem stabförmigen Körper sind die Schneiden so angeordnet, dass sein Schwerpunkt zwischen ihnen liegt. Das Ringgewicht wird so lange verschoben, bis die zwei Schwingungszeiten genau gleich sind. In diesem Falle geht die Gleichung (3) über in

$$\frac{h + h'}{\lambda} = \tau^2, \tag{4}$$

wodurch sich λ bestimmen lässt. Der Vorteil dieser Konstruktion ist der, dass die Lage des Schwerpunktes, welche sehr schwer durch Experimente zu finden ist, nicht verlangt wird. Alles was wir brauchen ist $h + h'$, die genaue Distanz zwischen den Schneiden. Der Nachteil ist der, dass

das Ringgewicht so lange verschoben werden muss, bis zwei Schwingungszeiten gleichgemacht sind, was schwer zu beobachten ist.

Der Gleichung (3) kann die Form gegeben werden

$$\frac{h+h'}{\lambda}=\frac{\tau^2+\tau'^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{h+h'}{h-h'}(\tau^2-\tau'^2).$$

Daraus lässt sich Folgendes erkennen: Wird der Körper so konstruiert, dass die Schwingungszeit um die zwei Aufhängeaxen nahezu gleich ist, so ist $(\tau^2-\tau'^2)$ eine kleine Grösse, und wird es deshalb genügen für h und h' ihre Näherungswerte zu substituieren. Die Lage des Schwerpunktes ist natürlich so genau wie möglich zu bestimmen, aber irgend ein kleiner Fehler in seiner Lage ist von keiner sehr grossen Folge, denn dieser Fehler wird mit der kleinen Grösse $(\tau^2-\tau'^2)$ multipliziert. Der Vorteil dieser Methode, gegenüber derjenigen von Kater, ist der, dass das Ringgewicht weggelassen werden kann, demnach das einzige Element, welches mit der grössten Genauigkeit gemessen werden muss, $h+h'$, die Distanz zwischen den Schneiden ist.

Um die Distanz zwischen den Schneiden zu messen, verglich Kapitän Kater zuerst die verschiedenen Massstäbe, welche damals im Gebrauch waren, und drückte sodann die Länge seines Pendels in jedem dieser Masse aus. Seit damals ist eine viel vollständigere Vergleichung dieser und anderer Masse unter der Leitung der für diesen Zweck im Jahre 1843 gewählten Kommission gemacht worden. Phil. Trans. 1857. Nachdem Kater seine Längeneinheit festgesetzt hatte, ging er zur Messung des Abstandes zwischen den Schneiden mittelst eines Mikroskopes über. Es wurden zwei verschiedene Methoden angewendet, welche indessen hier nicht beschrieben werden können. Um die ausserordentliche Sorgfalt, welche bei diesen Messungen nötig war, zu kennzeichnen, mag die folgende Thatsache erwähnt werden. Obgleich die Bilder der Schneiden stets vollkommen scharf und gut begrenzt erschienen, so war dennoch ihr Abstand, wenn sie auf einem schwarzen Grunde gesehen wurden, um 0·000572 engl. Zoll kleiner, als wenn sie auf einem weissen Grunde gesehen wurden. Dieser Unterschied blieb derselbe, wie auch die relative Beleuchtung des Objektes und des Grundes sein mochte, so lange als der Charakterunterschied gewahrt war. Drei Serien von Messungen wurden gemacht, zwei beim Beginn der Experimente und die dritte nach einiger Zeit Der Zweck der letzteren Messungen war der, sich zu vergewissern, ob die Schneiden sich durch den Gebrauch etwa geändert hätten. Die mittleren Resultate dieser drei Versuchsreihen unterschieden sich durch einen kleineren Betrag als den zehntausendsten Teil eines Zolles von einander, der gemessene Abstand betrug 39·44085 engl. Zoll.

Die Zeit einer einzelnen Schwingung kann nicht direkt beobachtet werden, weil dieses den Bruchteil einer Zeitsekunde, wie sie die Uhr zeigt, entweder durch das Auge oder das Ohr geschätzt, verlangen würde. Diese Schwierigkeit kann durch Beobachtung während eines grösseren Zeitabschnittes hindurch, etwa während 1000 Schwingungen, überwunden werden, so dass der Fehler für die Zeit einer einzigen Schwingung der tausendste Teil des ganzen Fehlers ist. Die Arbeit einer so grossen Zählung kann durch die Anwendung der Conicidenzmethode vermieden werden. Das Pendel wird vor die Fronte eines Uhrpendels gestellt, dessen Schwingungszeit etwas verschieden ist. Das Gesichtsfeld wird durch ein Diaphragma quer zu einer engen Öffnung begrenzt, welches die Marken sind, die man passieren sieht. Nach jeder folgenden Schwingung des einen Pendels nähert sich das andere demselben mehr und mehr und zuletzt ist seine Marke vollständig bedeckt durch die andere während ihres Durchganges vor dem Gesichtsfelde des Teleskopes; nach wenigen Schwingungen erscheint sie wieder, um der anderen voranzugehen. Während des Zeitabschnittes von einem Verschwinden bis zu dem nächsten hat das eine Pendel, so genau wie möglich, eine volle Schwingung mehr als das andere gemacht. Auf diese Weise wurde gefunden, dass 530 halben Schwingungen eines Uhrpendels, von denen jede gleich einer Sekunde, 532 Halbschwingungen von Kapitän Kater's Pendel entsprechen. Der Vorteil dieser Beobachtungsmethode ist der, dass ein Fehler von einer Sekunde beim Notieren des Zeitabschnittes zwischen zwei aufeinander folgenden Deckungen von nur 0·63 in der Zahl der Schwingungen während 24 Stunden hervorrufen würde. Das Verhältnis der Schwingungszeiten des Pendels und des Uhrpendels kann also mit ausserordentlicher Genauigkeit berechnet werden. Die Gangart der Uhr ist sodann durch astronomische Mittel zu bestimmen.

Die so erhaltene Schwingungszeit verlangt einige Korrektionen, welche „Reduktionen" genannt werden. Wenn z. B. die Schwingung nicht so klein ist, dass wir $\sin\vartheta = \vartheta$ setzen können, dann müssen wir eine Reduktion auf unendlich kleine Bögen machen. Eine andere Reduktion ist nötig, wenn wir das Resultat zurückzuführen wünschen auf dasjenige, was es am Meeresspiegel gewesen sein würde. Die Attraktion des dazwischen liegenden Landes kann dabei nach Dr. Young's Regel (Phil. Trans. 1819) behandelt werden. Wir können die Schwerkraft am Meeresspiegel dadurch erhalten, dass wir annehmen, alles Land, welches sich über denselben erhebt, wäre weggeschnitten und das Meer genötigt, sein gegenwärtiges Niveau innezuhalten. Da das Meeresniveau Veränderungen durch die Attraktion des Landes erfährt, so sind noch weitere Korrektionen nötig, wenn wir das Resultat auf die Fläche des Sphäroides zurückzuführen

wünschen, welches der Gestalt der Erde am nächsten kommt. (Siehe Camb. Phil. Trans. Vol. X.).

M. Baily giebt als die Länge des Pendels, welches halbe mittlere Sonnensekunden in der offenen Luft schwingt, für die Breite von London zu 39·133 engl. Zoll an und hat die Länge eines ähnlichen, Sternsekunden schwingenden Pendels gleich 38·919 Zoll gefunden.

Die Beobachtungen müssen in der Luft gemacht werden. Um dieses zu korrigieren, haben wir eine Reduktion für den leeren Raum zu machen. Diese Korrektion besteht aus drei Teilen: 1) in der Korrektion für den Auftrieb, 2) in Du Buat's Verbesserung für die durch das Pendel mitgerissene Luft, 3) in der Korrektion für den Luftwiderstand.

Es sei V das Volumen des Pendels, welches durch die Messung seiner Dimensionen gefunden werden kann. Weil die Reduktion für ein Vacuum nur eine Verbesserung ist, so werden irgend welche kleine Fehler in der Bestimmung der Dimensionen nur eine Wirkung zweiten Grades auf den Wert von λ hervorbringen. Ferner sei ϱ die Dichtigkeit der Luft, wenn der Körper um die eine Schneide schwingt, ϱ' diejenige, wenn er um die andere schwingt. Wenn die Beobachtung innerhalb einer oder zweier aufeinander folgender Stunden gemacht wird, so können wir $\varrho = \varrho'$ setzen. Die Wirkung des Auftriebes kann als eine Kraft $V \varrho g$ angesehen werden, welche in dem Schwerpunkte des Volumens des physischen Pendels angreift und vertikal aufwärts thätig ist. Wenn der Körper möglichst symmetrisch um die zwei Schneiden gestaltet ist, so liegt dieser Schwerpunkt halbwegs zwischen diesen zwei Schneiden.

Du Buat entdeckte durch Experiment, dass ein Pendel eine gewisse Luftmenge mit sich auf- und abzieht, welche die Trägheit des Körpers vermehrt, ohne die bewegende Schwerkraft zu vergrössern, welches Resultat durch die Theorie bestätigt worden ist. Die mitgerissene Luftmenge steht zu der von dem Körper verdrängten Luftmenge in einem Verhältnis, welches von der äusseren Gestalt dieses Körpers abhängt, sie werde durch $\mu V \varrho$ dargestellt. Wenn der Körper symmetrisch bezüglich der Schneiden ist, so dass seine äussere Form dieselbe bleibt, welches immer die zur Aufhängeaxe gemachte Schneide sein mag, dann wird μ für jede Oscillation gleich sein. Weil diese Masse in dem Schwerpunkte des Volumens vereinigt gedacht ist, so müssen wir in der Gleichung $\frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = - \frac{M g h \sin \vartheta}{M (k^2 + h^2)}$ zu k^2 noch den Ausdruck $\frac{\mu}{m} V \varrho \left(\frac{h + h'}{2}\right)^2$ hinzufügen, womit die Gleichung (1) übergeht in

$$k^2 + h^2 + \frac{\mu V \varrho}{m} \left(\frac{h + h'}{2}\right)^2 = \lambda \tau^2 \left(h - \frac{V \varrho}{m} \frac{h + h'}{2}\right),$$

wo m die Masse des Pendels bezeichnet. Gleicherweise erhalten wir für die Schwingung um die andere Schneide

$$k^2 + h^2 + \frac{\mu V \varrho'}{m}\left(\frac{h+h'}{2}\right)^2 = \lambda \tau'^2 \left(h - \frac{V\varrho'}{m}\frac{h+h'}{2}\right).$$

Aus diesen zwei Gleichungen ist k^2 zu eliminieren. Wenn die Beobachtungen der Schwingungen um die zwei Schneiden in den kürzesten Zeitabschnitten aufeinander folgen, so können wir $\varrho = \varrho'$ setzen und es verschwindet alsdann Du Buat's Korrektion. Dieses ist natürlich ein sehr grosser Vorteil und erhalten wir dadurch

$$\frac{h+h'}{\lambda} = \frac{\tau^2 + \tau'^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{h+h'}{h-h'}(\tau^2 - \tau'^2)\left(1 - \frac{V\varrho}{m}\right),$$

in welcher Gleichung das letzte Glied auf der rechten Seite sehr klein ist, weil τ und τ' fast gleich sind. Diese Formel wurde Routh durch Kapitän Heaviside mitgeteilt, welcher sie bei seinen letzten Experimenten zur Bestimmung der Länge des Sekundenpendels benützte. Der Widerstand der Luft ist eine Funktion der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ des Pendels. Weil $\frac{d\vartheta}{dt}$ sehr klein ist, so können wir diese Funktion in eine Reihe entwickeln und blos die erste Potenz wählen. Indem wir annehmen, dass Maclaurin's Theorem nicht fehlt, dass ferner kein Coëfficient einer höheren Potenz als der ersten sehr gross ist, giebt dieses einen Widerstand, welcher $\frac{d\vartheta}{dt}$ proportional ist. Die Bewegungsgleichung wird daher die Form annehmen

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + n^2\vartheta = -2f\frac{d\vartheta}{dt},$$

wo $\frac{2\pi}{n}$ die Zeit einer kompleten Schwingung in einem Vacuum und der Ausdruck rechts dem Luftwiderstande zu verdanken ist.

Für die Konstruktion eines umkehrbaren physischen Pendels sind folgende Punkte von Wichtigkeit: 1) Die Aufhängeaxen oder Schneiden dürfen sich nicht in demselben Abstande von dem Schwerpunkte der Masse befinden und sollen parallel zu einander sein. 2) Die Schwingungszeiten um die zwei Schneiden sollen annähernd gleich sein. 3) Die äussere Form des Körpers muss symmetrisch und die nämliche um die zwei Aufhängeaxen sein. 4) Das Pendel muss von einer solchen regulären Gestalt sein, dass die Abmessungen aller seiner Teile leicht vorgenommen werden kann. Diese Bedingungen sind genügend, wenn das Pendel aus einem Teile von rektangulärem Querschnitte und zwei Cylindern, von denen sich an jedem Ende des Stabes ein solcher Körper befindet, besteht.

Die äusseren Formen dieser Cylinder sollen congruent sein, aber so, dass der eine dieser Cylinder solid und der andere hohl ist, wobei die Trägheitsmomente so beschaffen sein sollen, dass der Abstand zwischen den Schneiden so nahe als möglich gleich der Länge des einfachen äquivalenten Pendels wird. 5) Das Pendel soll, insoweit dieses möglich, von demselben Materiale hergestellt werden, so dass es bei wechselnder Temperatur sich selbst ähnlich bleibt. In diesem Falle ist leicht, weil die Schwingungszeiten ähnlicher Körper wie die Quadratwurzeln ihrer linearen Dimensionen variieren, die beobachtete Schwingungszeit auf eine stehende Temperatur zu reduzieren. Die Schneiden müssen natürlich aus einer harten Substanz, die nicht leicht beschädigt werden kann, angefertigt werden.

Die Länge des Sekundenpendels ist von den Engländern als nationales Urmass der Länge angenommen worden Durch die Parlamentsakte vom 17. Juni 1824 wurde der von dem Mechaniker Bird angefertigte und mit „Standard Yard 1760" bezeichnete Massstab für das englische Normallängenmass erklärt, wodurch bestimmt wurde, dass der Abstand zwischen den Mittelpunkten der zwei Marken auf den goldenen Knöpfen an dem geraden Kupferstabe, welchen der Clerk des Unterhauses aufbewahrte, und in den die Worte mit der Zahl „standard yard, 1760" eingegraben waren, das originale und echte Längenmass, genannt ein Yard, sein sollte, wenn der Kupferstab eine Temperatur von 62° Fahrenheit besitze. Das 1760fache dieser Länge ist diejenige einer englischen Meile, woraus sich die Zahl 1760 neben der Bezeichnung „standard yard" erklärt. Da es zweckmässig war, dass der genannte „Standard Yard" im Falle der Beschädigung wieder auf die ursprüngliche Länge gebracht werden könne, mit Bezug auf ein unveränderliches, natürliches Urmass, wurde beschlossen, dass der neue Standard Yard von einer solchen Länge sein solle, dass das Pendel, welches Sekunden mittlerer Zeit in der Breite von London, in Vacuum und am Meeresspiegel schwingt, 39·1393 englische Zoll lang sein solle. Am 16. Oktober 1834 fand Feuer in dem Parlamentsgebäude statt, durch welches die Urmasse zerstört wurden. Der Stab 1760 wurde wieder entdeckt, aber einer seiner goldenen, eine Marke tragenden Nadeln war ausgeschmolzen, der Stab auch in anderer Weise beschädigt. Im Jahre 1838 wurde eine Kommission ernannt, welche der Regierung über den einzuschlagenden Weg berichten sollte, um unter den besonderen Umständen des Falles am besten wieder zu dem Urmasse zu gelangen. Im Jahre 1841 war die Kommission schlüssig geworden. Dieselbe war der Meinung, dass die Definition, durch welche der Standard Yard erklärt worden ist, aus einem gewissen Kupferstabe zu bestehen, die bestmögliche und die zu adoptierende sei. Mit Bezugnahme auf die Vorkehrung in Betreff der Wiederherstellung empfahl sie nicht eine Verweisung auf die Länge des Sekundenpendels. Seit der Parlamentsakte von 1824 ist nämlich ermittelt worden, dass mehrere Reduktionselemente der Pendelexperimente, welche darin angedeutet, zweifelhaft oder fehlerhaft sind. Es wurde gezeigt durch Young (Phil. Trans. 1819), dass die Reduktion auf den Meeresspiegel zweifelhaft war, durch Bessel (Astron. Nachrichten Nr. 128) und durch Sabine (Phil. Trans. 1829), dass die Reduktion für das Luftgewicht irrtümlich war, durch Baily (Phil. Trans. 1832), dass die spezifische Schwere des Pendels irrtümlich geschätzt war und dass die Mängel der Agatebenen einige zweifelhafte Elemente einführen, durch Kater (Phil. Trans. 1830) und durch Baily (Astron. Soc. Mémoires, Vol. IX), dass sehr merkbare Irrtümer in die Operation eingeführt worden

waren bei der Vergleichung der Länge des Pendels mit Shuckburgh's Scala, gebraucht als ein Repräsentativ des legalen Urmasses. Es ist dadurch offenbar, dass der durch die Parlamentsakte vorgeschriebene Weg die Länge des Originalmasses nicht reproduzirt. Die Kommission that dar, dass mehrere Masse vorhanden seien, welche früher mit dem originalen Standard Yard verglichen worden wären und es könnte durch deren Gebrauch die Länge des ursprünglichen Urmasses ohne merklichen Fehler bestimmt werden. Im Jahre 1843 wurde eine andere Kommission berufen, welche alle vorhandenen Masse vergleichen und aus denselben die Länge eines neuen Parlamentsstandard ableiten sollte. Unvorhergesehene, hier nicht näher zu beschreibende Schwierigkeiten stellten sich dieser Vergleichung entgegen. Eine vollständige Auseinandersetzung des Verfahrens der Kommission kann in einer Arbeit gefunden werden, welche durch Sir G. Airy der Royal Society im Jahre 1857 mitgeteilt wurde.

Der Yard soll bereits im Jahre 1101 durch König Heinrich I., welcher die Länge seines Armes dafür gelten liess, als Längeneinheit eingeführt worden sein. Bis zum Jahre 1824 erschienen seit jener Zeit gegen 200 Gesetze und wurde schliesslich die Länge des Sekundenpendels, welche auf dem Meeresspiegel in der Breite von London 405·3425 pariser Linien beträgt, als unveränderliche Grundlage des englischen Längenmasssystemes angenommen.

Dieser Abschnitt wurde entlehnt dem Werke von Routh, Dynamics etc. p. 70—82.

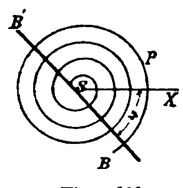
Sechster Abschnitt.

Schwingungsgesetz einer Unruhe.

Bei feineren Uhren vertritt die Stelle des Pendels eine sogenannte Unruhe, welche aus einem schwingenden, mit einer Spiralfeder verbundenen Rädchen besteht Während der Schwingungen des Rädchens wird die Spiralfeder bald zusammengezogen, bald ausgedehnt und zwar so, dass ihre Anspannung stets unter der Elastizitätsgrenze bleibt. Die Spirale kann eine cylindrische oder eine ebene sein; wir fassen hier nur den letzteren Fall in's Auge und handelt es sich um die Bestimmung der Bewegung der Unruhe. Zwei einfachere Lösungen mögen zu dem Ende hier Platz finden.

Der Einfachheit halber bestehe die Unruhe aus einem Stabe und einer ebenen Spiralfeder. Der Stab $B'SB$ kann sich frei um seinen Schwerpunkt S, welcher fest ist, drehen, der Punkt B ist mit einer sehr feinen Spiralfeder SPB verbunden. Das Ende S der Spiralfeder ist in einer solchen Weise befestigt, dass die Tangente in S ebenfalls fest ist; die Tangente bei B macht einen konstanten Winkel mit dem Stabe. Der Stab werde durch irgend einen Winkel gedreht und es soll die Schwingungszeit bestimmt werden. Dieses ist die einfachste Konstruktion, welche in Uhren gerade so wie das Pendel gebraucht wird, um die Bewegung zu regulieren.

Es sei SX (Fig. 112, S. 311) die Gleichgewichtslage des Stabes,



Figur 112.

ϑ der Winkel, welchen SX mit dem Stabe zu einer beliebigen Zeit t einschliesst, Mk^2 das Trägheitsmoment des Stabes um S, ϱ der Krümmungsradius der Spirale für einen beliebigen Punkt P, ϱ_0 derjenige Wert von ϱ, wenn das System im Gleichgewichte ist. x, y seien die rechtwinkeligen Coordinaten des Punktes P, bezogen auf S als Ursprung und SX als Abscissenaxe.

Zunächst haben wir die Kräfte zu ermitteln, welche an dem Stabe und dem Teile BP der Feder wirken. Die an dem Stabe thätigen Kräfte sind die Reaktion bei S, deren Componenten parallel zu den Coordinatenaxen X, Y sein mögen, und die umgekehrten Effektivkräfte, welche einem Paare $Mk^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ äquivalent sind. Die an der Feder wirkenden Kräfte sind die umgekehrten Effektivkräfte, welche so klein sind, dass sie vernachlässigt werden können, und die resultierende Wirkung quer zu dem Schnitte der Feder bei P. Diese resultierende Wirkung wird durch die Spannungen der unzählbaren Fasern hervorgebracht, welche die Feder ausmachen, und sind diese äquivalent einer Kraft bei P und einem Kräftepaare. Wenn eine elastische Feder so gebogen wird, dass sich ihre Krümmung verändert, so ist durch Experiment und Theorie bewiesen, dass dieses Paar proportional dem Wechsel der Krümmung bei P ist. Wir können daher dasselbe darstellen durch $E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)$, wo E von dem Materiale, aus welchem die Feder gemacht ist und der Gestalt ihres Querschnittes abhängt. Indem wir nun Momente um P zur Vermeidung der unbekannten Kraft daselbst nehmen, erhalten wir die Relation

$$Mk^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) - Xy + Yx.$$

Diese Gleichung ist richtig, wie auch die Lage des Punktes P gewählt sein mag. Sehen wir die linke Seite der Gleichung in einem beliebigen Zeitmomente als konstant, die Coordinaten x, y als variabel an, so giebt dieselbe die wesentliche Gestalt der Feder. Bezeichnen wir BP mit s, multiplizieren beide Seiten mit ds und integrieren entlang der ganzen Länge l der Spiralfeder, so bekommen wir

$$Mk^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} l = -E\int\left(\frac{ds}{\varrho} - \frac{ds}{\varrho_0}\right) + Y\int x\,ds - X\int y\,ds.$$

Nun ist $\frac{ds}{\varrho}$ der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Normalen, folglich ist $\int\frac{ds}{\varrho}$ der Winkel zwischen zwei extremen Normalen. Die Nor-

male zu S ist während der ganzen Bewegung fest, daher ist $\int\left(\frac{ds}{\varrho}-\frac{ds}{\varrho_0}\right)$ der Winkel zwischen den Normalen für B in den zwei Lagen, für welche $\vartheta=\vartheta$ und $\vartheta=0$ ist. Aber weil die Normale bei B einen konstanten Winkel mit dem Stabe einschliesst, so ist dieser Winkel der Winkel ϑ, welchen der Stab mit seiner Gleichgewichtslage macht. Ferner haben wir, wenn $\bar{x}, \bar{y}$ die Coordinaten des Schwerpunktes der Feder zur Zeit t sind, $\int x\,ds=\bar{x}\,l$, $\int y\,ds=\bar{y}\,l$. Folglich wird die Bewegungsgleichung

$$Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-\frac{E}{l}\vartheta+Y\bar{x}-X\bar{y}.$$

Nehmen wir an, dass hier in der Gleichgewichtslage kein Druck auf die Axe S stattfindet, dann werden X und Y während der ganzen Bewegung kleine Grössen der Ordnung ϑ sein. Wir wollen daher voraussetzen, dass die Stütze S sich über dem Schwerpunkte der Feder befindet, wenn dieselbe in Ruhe ist. Wenn dann die Zahl der Spiralwindungen der Feder gross ist und wenn jede Windung annähernd als Kreis angesehen werden kann, so wird der Schwerpunkt niemals weit von S abweichen. Alsdann sind die Ausdrücke $Y\bar{x}$ und $X\bar{y}$ die Produkte zweier kleiner Grössen und daher wenigstens von der zweiten Ordnung. Indem wir diese Grössen vernachlässigen, gelangen wir zu der einfachen Gleichung.

$$Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-\frac{E}{l}\vartheta.$$

Folglich ist die Schwingungszeit T durch die Relation gegeben

$$T=2\pi\sqrt{\frac{Mk^2 l}{E}}.$$

Daraus geht hervor, dass für die erste Annäherung die Schwingungszeit von der Gestalt der Feder im Gleichgewichtszustande unabhängig ist, dass sie nur von der Länge und der Querschnittsform der Feder abhängt. Diese kurze Diskussion der Bewegung einer Unruhe ist aus einem Memoir genommen worden, welches der Academy of Sciences vorgelegt wurde. Der Leser wird auf einen Artikel in Liouville's Journal, 1860, verwiesen, woselbst sich weitere Untersuchungen betreffs der erforderlichen Bedingungen für den Isochronismus und eine Bestimmung der besten Gestalt der Feder vorfinden.

Routh, Dynamics, p. 83.

Eine zweite, einfache, angenäherte Lösung dieses Problemes ist die folgende. Wir wollen voraussetzen, dass die Schwingungsbögen sich zu einander verhalten wie die betreffenden, durch die Elastizität der Feder hervorgerufenen Kräfte, wodurch die Unruhe in eine hin- und hergehende Bewegung versetzt wird. Wenn daher, sobald die Unruhe die Gleich-

gewichtslage überschritten hat, durch die Spannung der Feder eine Kraft p gleich einer Gewichtseinheit hervorgerufen wird, welche rückwärts zu drehen sucht, so ist die einem beliebigen Drehungswinkel ϑ entsprechende Kraft $P = p\frac{\vartheta}{\beta}$, wobei vorausgesetzt ist, dass sowohl P wie p am Umfange der Unruhe vom Halbmesser r in tangentialer Richtung angreifen und der Winkel β den Drehungswinkel für die Kraft p entspricht. Bezeichnet ω die Winkelgeschwindigkeit, q die Dichtigkeit des Materiales, Mk^2 das Trägheitsmoment der Unruhe, so erhalten wir die Gleichung

$$-\frac{d\omega}{dt} = \frac{2g}{q} \cdot \frac{Pr}{Mk^2} = \frac{2gpr}{qMk^2\beta}\vartheta.$$

Hier ist $\frac{d\omega}{dt}$ negativ zu nehmen, weil mit wachsendem ϑ die Winkelgeschwindigkeit ω abnimmt. Weil nun $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$, so bekommen wir

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{2gpr}{qMk^2\beta}\vartheta.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 = -\frac{2gpr}{qMk^2\beta}\frac{\vartheta^2}{2} + C.$$

Bezeichnen wir nun den ganzen Schwingungswinkel der Unruhe mit α, dann ist mit $\vartheta = \frac{\alpha}{2}$, $\omega = 0$, also $C = \frac{1}{4}\frac{gpr}{qMk^2\beta}\alpha^2$, folglich

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{gpr}{qMk^2\beta}\left(\frac{\alpha^2}{4} - \vartheta^2\right), \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{2gpr}{qMk^2\beta}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \vartheta^2}.$$

Es ist aber $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, mithin ergiebt sich für die Schwingungszeit

$$dt = \sqrt{\frac{qMk^2\beta}{2gpr}} \cdot \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \vartheta^2}},$$

woraus durch Integration folgt

$$t = \sqrt{\frac{qMk^2\beta}{2gpr}}\, arc\left(sin = \frac{2\vartheta}{\alpha}\right) + C.$$

Um die Schwingungszeit t_1 zu bestimmen, welche die Unruhe zum Durchlaufen des halben Schwingungsbogens $\frac{\alpha}{2}$ nötig hat, haben wir zwischen den Grenzen $\vartheta = \frac{\alpha}{2}$ und $\vartheta = 0$ zu integrieren, was giebt

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{qMk^2\beta}{2gpr}}.$$

Die Schwingungszeit t_1 ist mithin hier ganz unabhängig von der Grösse des Schwingungswinkels α, so dass sich durch diese Eigenschaft die Unruhe als Regulator für Uhren ganz besonders eignet. Ist z. B. für ein Chronometer das Gewicht Q des Kranzes der Unruhe $= 42$ Gran, ihr Durchmesser $2r = 2{\cdot}25$ Zoll engl., wird die Unruhe durch ein Gewicht von 24 Gran um einen rechten Winkel gedreht, so dass $p = 1$ Gran die Unruhe um den Bogen $\beta = \frac{\frac{1}{2}\pi}{24} = 0{\cdot}0654$ dreht, $Mk^2 = \frac{Q}{g} r^2$ annähernd, dann haben wir für die ganze Schwingungszeit, weil $g = 32{\cdot}2$ Fuss, gleich 386 Zoll engl. ist,

$$2\,t_1 = \pi \sqrt{\frac{42\,.\,1{\cdot}125^2\,.\,0{\cdot}0654}{2\,.\,386\,.\,1\,.\,1{\cdot}125}} = 0{\cdot}2 \text{ Sekunden.}$$

Sonach macht diese Unruhe in einer Sekunde fünf Schwingungen.

Tellkampf, Grundzüge der höheren Mathematik, p. 126.

In der theoretischen Maschinenlehre von Grashof wird dieser Gegenstand ausführlicher behandelt und davon ausgegangen, dass die Feder die Gestalt einer archimedischen Spirale besitzt.

Sechstes Kapitel.

Bewegung unveränderlicher, materieller Systeme parallel einer Ebene.

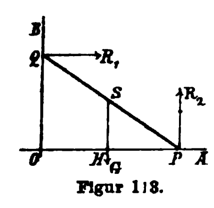
Erste Abteilung.

Bewegung ohne Berücksichtigung der Reibungswiderstände. Die sich berührenden Flächen sind als vollkommen glatt angenommen.

Erster Abschnitt.

Bewegung eines einzelnen Körpers.

1. Ein Stab PQ (Fig. 113, S. 315) von gleichförmiger Dicke und Dichtigkeit ist in eine gegebene Lage gebracht worden, das eine seiner Enden berührt eine glatte horizontale Ebene OA, das andere eine solche vertikale Ebene OB, die vertikale Ebene durch den Stab steht senkrecht auf diesen zwei Ebenen, und er fällt in ihr infolge der Wirkung der Schwerkraft. Wo löst sich der Stab während seiner Bewegung von der vertikalen Ebene?



Figur 113.

Es sei (Fig. 113) S der Schwerpunkt des Stabes PQ, $PS = a = QS$, $SH \perp OP$, $OH = x$, $SH = y$, $\measuredangle QPO = \varphi$ zur Zeit t der Bewegung, dieselbe vom Beginn der Bewegung an gerechnet, k = dem Trägheitsradius des Stabes um S, R_1 = der Reaktion der vertikalen Ebene, welche horizontal sein wird, R_2 = derjenigen der horizontalen Ebene, welche vertikal sein wird, M = der Masse des Stabes PQ.

Indem wir die an dem Stabe wirkenden Kräfte Mg, R_1, R_2, denselben als ein freies System ansehend, in horizontaler und vertikaler Richtung zerlegen, gelangen wir zu den Gleichungen der translatorischen Bewegung

$$M\frac{d^2x}{dt^2} - R_1 = 0, \quad (1) \qquad M\frac{d^2y}{dt^2} - R_2 + Mg = 0, \quad (2)$$

und wenn wir Momente um den Schwerpunkt S nehmen, so wird die Gleichung für die rotatorische Bewegung

$$Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R_1 a \sin\varphi - R_2 a \cos\varphi. \quad (3)$$

Die Elimination der Reaktionen aus diesen drei Bedingungsgleichungen giebt

$$k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a\sin\varphi\frac{d^2x}{dt^2} - a\cos\varphi\frac{d^2y}{dt^2} - a g\cos\varphi. \quad (4)$$

Nun ist hier stets

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi,$$

womit $\frac{dx}{dt} = -a\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - a\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (5)$

$$\frac{dy}{dt} = a\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + a\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt

$$a\sin\varphi\frac{d^2x}{dt^2} - a\cos\varphi\frac{d^2y}{dt^2} = -a^2\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

so dass die Gleichung (4) übergeht in

$$(a^2 + k^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -a g\cos\varphi. \quad (7)$$

Diese Gleichung auf beiden Seiten mit $2\frac{d\varphi}{dt}$ multipliziert und sodann integriert, giebt

$$(a^2 + k^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C - 2ag\sin\varphi.$$

Bezeichnet α den Anfangswert von φ, dann ist für die Integrationskonstante, weil zur Zeit $t = 0$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $0 = C - 2ag\sin\alpha$, demnach

$$(a^2+k^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2ag(\sin\alpha - \sin\varphi), \text{ oder } \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{3}{7}\frac{g}{a}(\sin\alpha - \sin\varphi), \quad (8)$$

womit die Winkelgeschwindigkeit des Stabes für eine beliebige seiner Lagen bestimmt ist.

In dem Augenblicke, wo der Stab sich von der vertikalen Ebene löst, ist $R_1 = 0$, folglich ist durch (1) und den Wert von $\frac{d^2 x}{dt^2}$ mit (5) für diesen Zeitabschnitt

$$\cos\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,$$

daher mit (7) und (8)

$$2\,a\,g\,(\sin\alpha - \sin\varphi)\cos\varphi = a\,g\sin\varphi\cos\varphi.$$

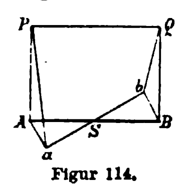
Damit ergiebt sich, weil φ nicht gleich $\frac{\pi}{2}$ sein kann,

$$2(\sin\alpha - \sin\varphi) = \sin\varphi, \qquad \sin\varphi = \frac{2}{3}\sin\alpha.$$

Diese Relation giebt die Lage des Stabes in dem Augenblicke seiner Trennung von der vertikalen Ebene.

Die soeben gelöste Aufgabe wurde von Weston, einem Schüler Landen's in The Ladys and Gentlemans Diary für das Jahr 1757 vorgeschlagen und von Peter Walton, einem Mitarbeiter des Diary, gelöst. Siehe Diarian Repository, p. 467.

2. Ein gleichförmiger Stab von gegebener Länge hängt horizontal mittelst zweier gleicher, vertikaler, an seinen Enden befestigter Fäden. Der Stab wird in horizontaler Richtung so durch einen kleinen Winkel gedreht, dass sein Schwerpunkt in derselben vertikalen Linie bleibt. Welches ist die Zeit einer Schwingung, wenn die Trägheit der Fäden vernachlässigt wird?



Figur 114.

P, Q (Fig. 114) seien die Punkte, in denen die Fäden PA, QB befestigt sind, AB stelle die Ruhelage des Stabes, ab seine Lage in einem beliebigen Zeitmomente nach der Störung des Gleichgewichtszustandes, S seinen Schwerpunkt, welcher stets an derselben Stelle bleibt, dar. Ferner sei $AS = a = BS$, $AP = b = BQ$, $\sphericalangle ASa = \vartheta$, $M =$ der Masse, $k =$ dem Trägheitsradius des Stabes um S. Für kleine Schwingungen können wir annehmen, dass die Spannung eines jeden Fadens $= \frac{1}{2} Mg$ und Strecke $Aa =$ Strecke $Bb = a\vartheta$ sei. Auch wird die Componente der Spannung von aP entlang aA nahezu gleich $\frac{1}{2} Mg \frac{a\vartheta}{b} = \frac{Mag\vartheta}{2b}$ und ihr Moment um G annähernd gleich $\frac{Ma^2 g\vartheta}{2b}$ sein. Ganz das Gleiche gilt für den Faden bQ. Folglich haben wir für die Winkelbewegung von ab um S, die Spannungen beider Fäden in Rechnung ziehend,

$$M k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = - \frac{M a^2 g \vartheta}{b}.$$

Aber im vorliegenden Falle ist $k^2 = \frac{1}{3} a^2$, mithin

$$\frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = - \frac{3 g}{b} \vartheta,$$

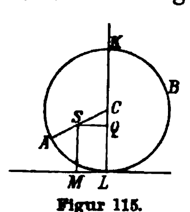
so dass wir für die Zeit t einer Schwingung erhalten

$$t = \pi \sqrt{\frac{b}{3 g}}.$$

Dieses ist die Schwingungszeit eines mathematischen Pendels von der Länge gleich $\frac{1}{3} b$, sie ist unabhängig von der Länge des Stabes.

Ladys and Gentlemans Diary, 1842, p. 51.

3. Eine heterogene Kugel befindet sich auf einer vollkommen glatten horizontalen Ebene, ihr Schwerpunkt ist von der Vertikalen durch ihren geometrischen Mittelpunkt etwas entfernt. Welches ist die Zeit einer kleinen Schwingung des Schwerpunktes um den genannten Mittelpunkt?



Figur 115.

Es sei ABC (Fig. 115) ein Vertikalschnitt der Kugel, welcher ihren Mittelpunkt C und ihren Schwerpunkt S enthält. Ziehe CL, SM vertikal, so dass L der Berührungspunkt der Kugel und der horizontalen Ebene ist, SQ horizontal, den Kugelhalbmesser CSA. Setze $\sphericalangle ASM = \sphericalangle ACL = \varphi$, $CS = c$, $SM = y$, $M =$ der Kugelmasse, $k =$ dem Trägheitshalbmesser der Kugel um S, $R =$ der Reaktion der Ebene bei L auf die Kugel, welche vertikal sein wird.

Indem wir die Kräfte Mg und R in horizontaler und vertikaler Richtung zerlegen, erhalten wir für die translatorische Bewegung des Schwerpunktes in vertikaler Richtung

$$M \frac{d^2 y}{d t^2} = R - M g, \tag{1}$$

und wenn wir Momente um S nehmen, für ihre Drehbewegung

$$M k^2 \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - R c \sin \varphi. \tag{2}$$

Aber es ist $y = a - c \cos \varphi$, daher mit (1)

$$R = M \left(g - c \frac{d^2}{d t^2} \cos \varphi\right),$$

wodurch die (2) übergeht in

$$M k^2 \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - M c \left(g \sin \varphi - c \sin \varphi \frac{d^2}{d t^2} \cos \varphi\right),$$

dieses ist

$$(k^2 + c^2 \sin^2 \varphi) \frac{d^2 \varphi}{d t^2} + c^2 \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 = - c g \sin \varphi.$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit $2 \frac{d\varphi}{dt}$ und die Integration der resultierenden Gleichung giebt

$$(k^2 + c^2 \sin^2 \varphi) \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 = 2 g c \cos \varphi + C.$$

Zur Zeit $t = 0$ sei $\varphi = \alpha$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, so dass

$$0 = 2 c g \cos \alpha + C,$$

mithin wird dann

$$(k^2 + c^2 \sin^2 \varphi) \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 = 2 c g (\cos \varphi - \cos \alpha), \tag{3}$$

wodurch, $\frac{dt}{d\varphi}$ ist negativ zu nehmen, weil mit wachsendem t $d\varphi$ negativ vom Beginn bis zum Ende einer jeden kompleten Schwingung ist,

$$\frac{d t}{d \varphi} = - \frac{1}{\sqrt{2 c g}} \sqrt{\frac{k^2 + c^2 \sin^2 \varphi}{\cos \varphi - \cos \alpha}}.$$

Nun sehen wir durch (3), dass $\cos \varphi = \cos \alpha$, wenn $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ist, folglich ist $\varphi = \pm \alpha$, wenn $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, der positive Wert von φ entspricht dem Beginne, der negative Wert dem Ende einer kompleten Schwingung. Bezeichnet daher jetzt T die Zeit einer vollständigen Schwingung, so haben wir

$$T = - \frac{1}{\sqrt{2 c g}} \int_{+\alpha}^{-\alpha} \sqrt{\frac{k^2 + c^2 \sin^2 \varphi}{\cos \varphi - \cos \alpha}}\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2 c g}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sqrt{\frac{k^2 + c^2 \sin^2 \varphi}{\cos \varphi - \cos \alpha}}\, d\varphi.$$

Um dieses Integral zu lösen, wollen wir setzen $\sin \frac{\varphi}{2} = s$, $\sin \frac{\alpha}{2} = b$, dann ist $\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = ds$, $d\varphi = \frac{2 ds}{\sqrt{1 - s^2}}$, $\cos \varphi - \cos \alpha = 2 (b^2 - s^2)$, $\sin^2 \varphi = 4 s^2 (1 - s^2)$, folglich

$$T = \frac{1}{\sqrt{c g}} \int_{-b}^{+b} \sqrt{\frac{k^2 + 4 c^2 s^2 (1 - s^2)}{(1 - s^2)(b^2 - s^2)}}\, ds,$$

oder, wenn wir die kleinen Grössen von s über die zweite Potenz hinaus vernachlässigen,

$$T = \frac{k}{\sqrt{c g}} \int_{-b}^{+b} \frac{1 + \frac{1}{2} s^2 + \frac{2 c^2}{k^2} s^2}{\sqrt{b^2 - s^2}}\, ds$$

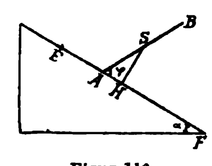
$$= \frac{k}{\sqrt{c g}} \int_{-b}^{+b} \left\{ \frac{1}{\sqrt{b^2 - s^2}} + \frac{4 c^2 + k^2}{2 k^2} \frac{s^2}{\sqrt{b^2 - s^2}} \right\} ds.$$

Aber es ist $\int_{-b}^{+b} \frac{ds}{\sqrt{b^2 - s^2}} = \pi$, $\int_{-b}^{+b} \frac{s^2\,ds}{\sqrt{b^2 - s^2}} = \frac{1}{2}\pi b^2$, daher ist die Zeit einer vollständigen Schwingung

$$T = \frac{\pi k}{\sqrt{c g}}\left(1 + \frac{4c^2 + k^2}{4k^2} b^2\right) = \frac{\pi k}{\sqrt{c g}}\left(1 + \frac{4c^2 + k^2}{4k^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

Euler, Nova Acta Acad. Petrop. 1783, p. 119.

4. Ein Ende A eines gleichförmigen Stabes AB (Fig. 116) befindet sich auf einer glatten geneigten Ebene EF. Welches ist die Bewegung des Stabes und der Druck auf die Ebene zu einer beliebigen Zeit t?



Figur 116.

Es sei S die Lage des Schwerpunktes des Stabes zu einer beliebigen Zeit t, gerechnet von dem Beginn der Bewegung an, $R =$ der Reaktion der Ebene auf den Endpunkt A, $\measuredangle BAF = \varphi$, E die Anfangslage von A, β der Anfangswert von φ, $M =$ der Masse des Stabes, $k =$ seinem Trägheitsradius um S, $SH \perp EF$, $EA = z$, $EH = x$, $SH = y$, $\alpha =$ der Horizontalneigung der Ebene.

Indem wir die Kräfte Mg und R parallel und senkrecht zu der Linie EF zerlegen, erhalten wir für die Translationsbewegung des Schwerpunktes des Stabes die Gleichungen

$$M\frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin\alpha, \quad (1) \qquad M\frac{d^2 y}{dt^2} = R - Mg\cos\alpha \quad (2)$$

und, indem wir Momente um S nehmen, für die rotatorische Bewegung des Stabes

$$Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Ra\cos\varphi. \quad (3)$$

Die Integration von (1) giebt

$$\frac{dx}{dt} = gt\sin\alpha + C,$$

aber es ist $\frac{dx}{dt} = 0$, wenn $t = 0$, folglich $C = 0$, mithin

$$\frac{dx}{dt} = gt\sin\alpha.$$

Durch die Integration dieser Gleichung erhalten wir, wenn wir beachten, dass zur Zeit $t = 0$, $x = a\cos\beta$,

$$x = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + a\cos\beta, \quad (4)$$

womit die Lage des Punktes H nach dem Verlaufe einer beliebigen Zeit t bestimmt ist.

Ferner geben die Gleichungen (2) und (3), wenn wir R eliminieren,

$$a\cos\varphi\frac{d^2y}{dt^2}=-k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}-ag\cos\alpha\cos\varphi,$$

weil aber die Geometrie zeigt, dass $y=a\sin\varphi$, mithin

$$a^2\cos\varphi\frac{d^2\sin\varphi}{dt^2}=-k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}-ag\cos\alpha\cos\varphi,$$

erhalten wir durch Multiplikation mit $2\frac{d\varphi}{dt}$ und Integration der resultierenden Gleichung

$$a^2\left(\frac{d\sin\varphi}{dt}\right)^2=C-k^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-2ag\cos\alpha\sin\varphi.$$

Nun ist anfangs $\frac{d\varphi}{dt}=0$ und $\varphi=\beta$, folglich $C=2ag\cos\alpha\sin\beta$, mithin

$$(a^2\cos^2\varphi+k^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=ag\cos\alpha(\sin\beta-\sin\varphi), \tag{5}$$

womit die Winkelgeschwindigkeit des Stabes für jede Lage, welche er während seines Niedersinkens einnehmen kann, ermittelt ist.

Weiter zeigt die Geometrie, dass

$z=x-a\cos\varphi=\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha+a(\cos\beta-\cos\varphi)$, durch (4), und $y=a\sin\varphi$.

Wenn wir daher mit (5) φ als Funktion von t erhalten könnten, so könnten wir die Werte von y und z zu einer beliebigen Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung an, bestimmen. Für den Druck auf die Ebene zur Zeit t erhalten wir durch (3)

$$R=-\frac{Mk^2}{a\cos\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Die Gleichung (5) liefert uns

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=2ag\cos\alpha\frac{\sin\beta-\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi+k^2},$$

so dass, wenn wir diese Relation nach t differentiieren und das Resultat mit $2\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi$ dividieren,

$$\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{2a^3g\cos\alpha\sin\varphi(\sin\beta-\sin\varphi)}{(a^2\cos^2\varphi+k^2)^2}-\frac{ga\cos\alpha}{a^2\cos^2\varphi+k^2},$$

folglich wird

$$R=\frac{Mk^2g\cos\alpha}{a^2\cos^2\varphi+k^2}-\frac{2Ma^2k^2g\cos\alpha\sin\varphi(\sin\beta-\sin\varphi)}{(a^2\cos^2\varphi+k^2)^2},$$

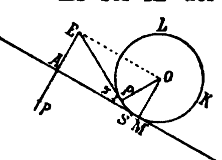
$$=\frac{Mk^2g\cos\alpha}{(a^2\cos^2\varphi+k^2)^2}\left\{k^2+a^2(1+\sin^2\varphi-2\sin\beta\sin\varphi)\right\},$$

womit der Druck des Stabes auf die Ebene für eine beliebige Lage während seiner Bewegung bestimmt ist.

Fuss, Nova Acta Petrop. 1795, p. 70.

5. Ein Cylinder KLM (Fig. 117) ist so auf eine glatte, geneigte Ebene gelegt, dass seine Axe senkrecht zur Linie des schnellsten Falles ist und er die Ebene mit einer Erzeugungslinie berührt. Ein Faden $EPMKL$, dessen eines Ende an einen festen Punkte E in einem Abstande AE, gleich dem Halbmesser des Cylinders, von der Ebene gefesselt ist, ist um den Cylinder in einer durch seinen Schwerpunkt O gehenden, zu seiner Axe senkrechten Ebene gewunden und mit seinem anderen Ende an dem Cylinder befestigt. Welches ist die Spannung des Fadens und die Geschwindigkeit der Abnahme seines Neigungswinkels zu der Ebene, entsprechend irgend einer Lage des Cylinders während seines Herabsinkens, wenn beim Beginne der Bewegung die Länge des freien Fadens gleich Null war?

Es sei M der Berührungspunkt des Schnittes KLM des Cylinders, um welchen der Faden gewunden ist, und der geneigten Ebene. P der Punkt, in welchem das freie Fadenstück den Cylinder berührt. Ziehe die Gerade EP, welche die Ebene in S treffen mag, die Cylinderhalbmesser OP, OM. Zur Zeit t der Bewegung, gerechnet von ihrem Anfange an, sei $AM = x$, $T =$ der Spannung des Fadens, $\sphericalangle ESA = \vartheta = \sphericalangle POM$, $\varphi =$ dem ganzen Winkel, durch welchen sich der Cylinder um seinen Schwerpunkt gedreht hat. Ferner sei $M =$ der Masse des Cylinders, $k =$ seinem Schwingungshalbmesser um seine Axe, $\alpha =$ der Horizontalneigung der Ebene, $AE = a = MO$.



Figur 117.

Zerlegen wir die Kräfte Mg und T parallel und senkrecht zu der geneigten Ebene, so bekommen wir für die Bewegung des Schwerpunktes O parallel zu dieser Ebene

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - T\cos\vartheta, \tag{1}$$

und wenn wir Momente um O nehmen

$$Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Ta. \tag{2}$$

Durch Elimination von T zwischen diesen zwei Gleichungen folgt

$$a\frac{d^2x}{dt^2} = ag\sin\alpha - k^2\cos\vartheta\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{3}$$

Nehmen wir auf dem Strahle EA Ep gleich EP an, dann würde, wenn der Cylinder im stande wäre, von E nach p zu rollen, und sodann Ep im stande wäre, sich um E in die Lage EP zu drehen, der Cylinder sich offenbar um seinen Schwerpunkt im Ganzen durch den Winkel gedreht haben, welcher wirklich zu seiner wahren Bewegung gehört, um die

Fadenlänge EP frei zu machen. Nun würde der Cylinder in dem ersten Statium der hypothetischen Bewegung sich unverkennbar um einen Winkel gleich $\frac{Ep}{a}$ oder gleich $\frac{EP}{a}$, welches ist gleich $cotg\,\vartheta$ drehen, in dem zweiten Statium durch einen Winkel $pES = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ in einer entgegengesetzten Richtung. Mithin erhalten wir für den Winkel, durch welchen sich der Cylinder während der Zeit t in Wirklichkeit gedreht hat,

$$\varphi = cotg\,\vartheta - \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = cotg\,\vartheta + \vartheta - \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Auch besteht die geometrische Bedingung

$$x = \frac{a}{sin\,\vartheta}. \tag{5}$$

Die Differentiation der Gleichungen (4) und (5) giebt

$$d\varphi = -\frac{d\vartheta}{sin^2\vartheta} + d\vartheta = -\frac{cos^2\vartheta}{sin^2\vartheta}d\vartheta, \quad (6) \qquad dx = -\frac{a\,cos\,\vartheta}{sin^2\vartheta}d\vartheta. \quad (7)$$

Durch die Multiplikation der Gleichung (3) mit $2\frac{dx}{dt}$ wird

$$2a\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = 2ag\,sin\,\alpha\frac{dx}{dt} - 2k^2\frac{dx}{dt}cos\,\vartheta\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Aber mit (6) und (7) ist es klar, dass

$$cos\,\vartheta\frac{dx}{dt} = a\frac{d\varphi}{dt}, \tag{8}$$

wodurch wir folglich erhalten

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = 2g\,sin\,\alpha\frac{dx}{dt} - 2k^2\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Diese Gleichung integriert und die willkürliche Konstante C addiert, giebt

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gx\,sin\,\alpha + C,$$

weil aber anfangs $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ und $x = a$ ist, so haben wir $C = -2ga\,sin\,\alpha$, und daher

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g\,sin\,\alpha\,(x - a).$$

Durch Einführung der Werte von x, $d\varphi$, dx, welche durch die Gleichungen (5), (6), (7) gegeben sind, bekommen wir

$$\left(\frac{a^2cos^2\vartheta}{sin^4\vartheta} + \frac{k^2cos^4\vartheta}{sin^4\vartheta}\right)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2g\,sin\,\alpha\left(\frac{a}{sin\,\vartheta} - a\right),$$

und mithin

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2ga\,sin\,\alpha\,(1 - sin\,\vartheta)\,sin^3\vartheta}{cos^2\vartheta\,(a^2 + k^2cos^2\vartheta)}, \tag{9}$$

welche Gleichung die Winkelgeschwindigkeit des Fadens um den festen Punkt E als eine Funktion seiner Neigung zu der Ebene, also auch für eine beliebige Lage des Cylinders giebt.

Ferner erhalten wir durch Differentiation der Gleichung (8)

$$a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \cos\vartheta\frac{d^2x}{dt^2} - \sin\vartheta\frac{dx}{dt}\frac{d\vartheta}{dt},$$

also auch

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a}{\cos\vartheta}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + tg\,\vartheta\frac{dx}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{a}{\cos\vartheta}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{a}{\sin\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2, \text{ durch (7).}$$

Die Einführung dieses Wertes von $\frac{d^2x}{dt^2}$ in (3) giebt

$$\left(\frac{a}{\cos\vartheta} + \frac{k^2}{a}\cos\vartheta\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\sin\alpha + \frac{a}{\sin\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

und sonach wird mit Hilfe von (9)

$$\frac{a^2 + k^2\cos^2\vartheta}{a\cos\vartheta}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\sin\alpha + \frac{2\,g\,a^2\sin\alpha\sin^2\vartheta\,(1-\sin\vartheta)}{\cos^2\vartheta\,(a^2 + k^2\cos^2\vartheta)}$$

$$= g\sin\alpha\,\frac{a^2(1+\sin^2\vartheta - 2\sin^3\vartheta) + k^2\cos^4\vartheta}{\cos^2\vartheta\,(a^2 + k^2\cos^2\vartheta)}.$$

Folglich ergiebt sich mit (2), wenn wir den Wert von $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ aus der letzten Gleichung bestimmen und in die (2) einsetzen,

$$T = \frac{Mk^2}{a}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mk^2 g\sin\alpha\,\frac{a^2(1+\sin^2\vartheta - 2\sin^3\vartheta) + k^2\cos^4\vartheta}{\cos\vartheta\,(a^2 + k^2\cos^2\vartheta)^2},$$

womit die Spannung des Fadens für eine beliebige Lage des Cylinders bestimmt ist.

Euler, Nova Acta Acad. Petrop. 1795, p. 64.

6. Ein gleichförmiger Stab OA, welcher die Freiheit besitzt, in einer vertikalen Ebene um eine horizontale Axe durch den Punkt O zu schwingen, fällt aus einer horizontalen Lage. Welches ist der zwischen der Richtung des Stabes und der Richtung des Druckes auf die feste Axe eingeschlossene Winkel für eine beliebige Lage des Stabes während seiner Bewegung?

Von O (Fig. 118) ziehe Om rechtwinkelig zu OA und zu der festen Axe und denke AO nach n hin beliebig verlängert. Die Componenten der Reaktion der festen Axe entlang Om, On seien R_1, R_2 für eine beliebige Lage des Stabes. Ziehe OX horizontal und rechtwinkelig zu der Axe. Lasse sein $OA = a$, $M =$ der Masse des Stabes, $\measuredangle AOX = \vartheta$ zu einer beliebigen Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung an.

Figur 118.

Damit erhalten wir für die Bewegung des Stabes um seinen Schwerpunkt S, weil das Trägheitsmoment desselben um S gleich $\frac{1}{12} M a^2$ ist,

$$\frac{1}{12} M a^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = \frac{1}{2} a R_1, \quad \text{oder} \quad M a \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = 6 R_1. \tag{1}$$

Auch haben wir für die Bewegung um die Axe durch O, da das Trägheitsmoment für diese Axe gleich $\frac{1}{3} M a^2$ ist,

$$\frac{1}{3} M a^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = M g \frac{1}{2} a \cos \vartheta, \quad \text{oder} \quad 2 a \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = 3 g \cos \vartheta. \tag{2}$$

Ferner ist, indem wir die Componente R_2 der Componente des Gewichtes entlang OA und der Centrifugalkraft gleich setzen,

$$R_2 = M g \sin \vartheta + \int_0^a \left(\frac{M dr}{a} r \cdot \frac{d \vartheta^2}{d t^2} \right) = M g \sin \vartheta + \frac{1}{2} M a \left(\frac{d \vartheta}{d t} \right)^2. \tag{3}$$

Die Elimination von $\frac{d^2 \vartheta}{d t^2}$ zwischen (1) und (2) giebt

$$R_1 = \frac{1}{4} M g \cos \vartheta. \tag{4}$$

Die Multiplikation von (2) mit $\frac{d \vartheta}{d t}$ und ihre Integration giebt

$$a \left(\frac{d \vartheta}{d t} \right)^2 = C + 3 g \sin \vartheta,$$

weil aber $\frac{d \vartheta}{d t} = 0$, wenn $\vartheta = 0$, ist $C = 0$, so dass

$$a \left(\frac{d \vartheta}{d t} \right)^2 = 3 g \sin \vartheta.$$

Folglich erhalten wir mit (3)

$$R_2 = M g \sin \vartheta + \frac{3}{2} M g \sin \vartheta = \frac{5}{2} M g \sin \vartheta. \tag{5}$$

Nun sei φ der Winkel, welchen die ganze Reaktion der festen Axe mit der Linie On einschliesst, dann ist

$$tg\, \varphi = \frac{R_1}{R_2},$$

und demnach infolge der Gleichungen (4) und (5)

$$tg\, \vartheta \,.\, tg\, \varphi = \frac{1}{10}, \qquad tg\, \varphi = \frac{1}{10} \cot g\, \vartheta,$$

womit der verlangte Winkel für eine beliebige Lage des Stabes bestimmt ist.

Dieselbe Aufgabe wurde durch direkte Anwendung des Prinzipes von D'Alembert gelöst, Kap. 3, Aufgabe 5, Abschnitt 2.

7. Ein gleichförmiger Stab schwingt unter der Wirkung der Schwerkraft um einen seiner Endpunkte in einer vertikalen Ebene. Zu finden die Grösse der Kraft der Trägheit, welche den Stab in einer beliebigen Lage in irgend einem seiner Punkte zu biegen sucht, und die Lage desjenigen Punktes, für welchen diese biegende Kraft ein Maximum ist.

Es sei OA (Fig. 119) die Lage des Stabes zu einer beliebigen Zeit t, OX ein horizontaler Strahl durch den festen Punkt O des Stabes in der Ebene der Bewegung, OY senkrecht zu OX. C sei ein beliebiger Punkt in OA und P ein solcher in AC. Lasse sein $OA = 2a$, $OC = c$, $OP = r$, $\angle AOX = \vartheta$, $k =$ dem Trägheitsradius des Stabes um O, $M =$ seiner Masse. Damit ist die infolge der Bewegung des Stabes durch ein Element dr in dem Punkte P des Stabes gewonnene Kraft rechtwinkelig zu OP gleich

Figur 119.

$$M\frac{dr}{2a}\left(r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - g\cos\vartheta\right),$$

und das Moment dieser Kraft um C ist gleich

$$\frac{M}{2a}\left(r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - g\cos\vartheta\right)(r-c)\,dr,$$

folglich wird das ganze Kraftmoment, welches bei C Biegung hervorzubringen sucht, gleich sein

$$\frac{M}{2a}\int_c^{2a}\left(r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - g\cos\vartheta\right)(r-c)\,dr. \tag{1}$$

Aber wir haben für die Bewegung des Stabes

$$Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Mga\cos\vartheta,$$

und daher, weil $k^2 = \frac{4}{3}a^2$ ist,

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{g}{a}\cos\vartheta.$$

Dadurch geht der Ausdruck (1) über in

$$\frac{Mg\cos\vartheta}{8a^2}\int_c^{2a}(3r-4a)(r-c)\,dr$$

$$= \frac{Mg\cos\vartheta}{8a^2}\int_c^{2a}\{3(r-c)-(4a-3c)\}(r-c)\,dr$$

$$= \frac{Mg\cos\vartheta}{8a^2}\left\{(2a-c)^3 - \frac{1}{2}(4a-3c)(2a-c)^2\right\}$$

$$= \frac{Mg\cos\vartheta}{8a^2}(2a-c)^2\left\{2a-c-\frac{1}{2}(4a-3c)\right\} = \frac{Mg\cos\vartheta}{16a^2}c(2a-c)^2,$$

womit das biegende Moment bestimmt ist.

Für das Maximum dieses Ausdruckes haben wir die Bedingung

$$(2a - c)^2 - 2c(2a - c) = 0,$$

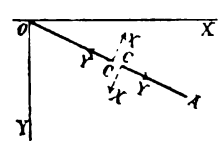
also

$$2a - 3c = 0, \quad \text{d. i.} \quad c = \frac{2}{3}a,$$

oder

$$OC = \frac{1}{3}OA.$$

Wir geben noch eine andere Lösung dieses Problemes.



Figur 119 a.

Es seien X, Y (Fig. 119) die transversalen und longitudonalen Wirkungen und Gegenwirkungen zweier beliebiger Teile OC, CA des Stabes AO aufeinander und es sei μ das Moment der Kraft, welche den Stab AO bei C zu biegen sucht.

Dann ist für die Bewegung von OC, Momente um O nehmend,

$$M\frac{c}{2a}\cdot\frac{1}{3}c^2\cdot\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M\frac{c}{2a}\cdot\frac{1}{2}gc\cos\vartheta - Xc - \mu,$$

für diejenige von AC, Momente um seinen Schwerpunkt nehmend,

$$M\frac{2a-c}{2a}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2a-c}{2}\right)^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \mu - X\frac{2a-c}{2},$$

und für die Bewegung des ganzen Stabes

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{3g}{4a}\cos\vartheta.$$

Folglich werden die Gleichungen für die Bewegung der zwei Stabteile

$$\mu + cX = \frac{Mgc^2\cos\vartheta}{8a^2}(2a - c)$$

und

$$2\mu - (2a - c)X = \frac{Mg(2a-c)^3\cos\vartheta}{32a^2}.$$

Indem wir nun noch X zwischen diesen zwei Gleichungen eliminieren, finden wir

$$\mu = \frac{Mg\cos\vartheta}{16a^2}c(2a - c)^2,$$

welches derselbe Ausdruck für das biegende Moment ist, wie ihn die erste Lösungsmethode ergab.

8. Ein gleichförmiger Stab ist symmetrisch auf zwei Stützen gelegt. Wie müssen die Stützpunkte angeordnet sein, damit bei der Wegnahme einer der Stützen der Druck auf die bleibende Stütze derselbe sein kann, wie der vorhergehende statische Druck?

Es sei A (Fig. 120, S. 327) die Lage der Stütze, welche nicht weggerückt wird, S der Schwerpunkt des Stabes, $AS = h$, $k =$ dem Trägheitsradius des Stabes um S, $M =$ der Stabmasse, $R =$ der Reaktion

der Stütze A vor und unmittelbar nach dem Hinwegrücken der anderen Stütze, $f =$ der augenblicklichen Winkelbeschleunigung.

Figur 120.

Damit erhalten wir, Momente um A nehmend,

$$M(h^2 + k^2) f = M g h, \qquad (1)$$

ferner, Momente um S nehmend,

$$M k^2 f = R h, \qquad (2)$$

auch ist für das Gleichgewicht des Stabes, während er von den beiden Stützen getragen wird,

$$R = \frac{1}{2} M g. \qquad (3)$$

Durch (1) und (2) ergiebt sich

$$M(h^2 + k^2) \frac{R h}{M k^2} = M g h, \qquad (h^2 + k^2) R = M g k^2,$$

und wenn wir den Wert von R aus (3) substituieren, so wird

$$h = k.$$

Mithin ist der verlangte Wert des wechselseitigen Abstandes der zwei Stützen gleich $2k$, d. i. gleich dem doppelten Trägheitshalbmesser des Stabes für seinen Schwerpunkt.

9. Eine Halbkugel dreht sich um eine feste Axe, welche mit einem Durchmesser ihrer Basis zusammenfällt und unter einem gegebenen Winkel zu der Vertikalen geneigt ist, aus einer augenblicklichen Ruhelage, in welcher die den Schwerpunkt des Körpers und die feste Axe enthaltende Ebene zu der vertikalen Ebene durch diese Axe senkrecht war. Wie gross ist der ganze Druck auf die Axe, wenn diese zwei Ebenen zusammenfallen?

Es sei ACB die Umdrehungsaxe, AX eine vertikale Linie, S der Schwerpunkt der Halbkugel in einer beliebigen Lage während der Bewegung, S_1 die tiefste Lage von S (Fig. 121), $\sphericalangle BAX = \alpha$, $a =$ dem Halbmesser der Kugel, $CS = c$, $\sphericalangle SCS_1 = \vartheta$, $M =$ der Masse der Halbkugel. Der ganze Druck auf die Axe wird, wenn S in S_1 ist, gleich sein der Summe des Druckes durch die Schwerkraft und die Centrifugalkraft.

Figur 121.

Das Gewicht der Halbkugel kann zerlegt werden in $Mg \cos\alpha$, parallel zu AB, welche Componente keine Wirkung auf die Bewegung hervorbringt, und $Mg \sin\alpha$ parallel zu CS_1. Das Moment der letzteren Componente um AB ist gleich $Mg \sin\alpha \,.\, c \sin\vartheta$, folglich ist für die Bewegung, wenn Mk^2 das Trägheitsmoment der Halbkugel um AB bedeutet,

$$M k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = - M g c \sin\alpha \sin\vartheta,$$

daher, weil $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist,

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2gc}{k^2} \sin\alpha \cos\vartheta,$$

oder, weil $c = \frac{3}{8}a$ und $k^2 = \frac{2}{5}a^2$ ist,

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{15}{8}\frac{g}{a} \sin\alpha \cos\vartheta.$$

Mithin ist der von der Centrifugalkraft auf die Axe ausgeübte Druck gleich

$$M\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 \cdot CS_1 = \frac{45}{64} Mg \sin\alpha.$$

Ferner ist der aus der Schwerkraft hervorgehende Druck rechtwinkelig zu AB gleich $Mg \sin\alpha$ und parallel zu AB gleich $Mg \cos\alpha$. Folglich ist die ganze auf die feste Axe rechtwinkelig zu ihr ausgeübte Pressung gleich

$$Mg \sin\alpha \left(1 + \frac{45}{64}\right) = \frac{109}{64} Mg \sin\alpha.$$

Die resultierende Pressung auf die feste Axe ist daher gleich

$$Mg \sqrt{\cos^2\alpha + \left(\frac{109}{64}\right)^2 \sin^2\alpha}.$$

10. Eine zehn Yard lange aus unendlich kleinen, gleichen Gliedern bestehende Kette ist auf einer vollkommen glatten, horizontalen Ebene so gerade gelegt, dass ein Yard ihrer Länge durch ein Loch in der Ebene in einer vertikalen Röhre herabhängt. In welcher Zeit wird die Kette die Ebene vollständig verlassen?

Die verlangte Zeit ist nahezu gleich 2·890663 Sekunden.

Lady's and Gentleman's Diary, 1758; Diarian Repository, p. 683.

11. Ein Cylinder fällt auf einer Ebene mit der Horizontalneigung α herab, einen feinen, in dem höchsten Punkte der Ebene befestigten Faden abwickelnd. Zu finden den Winkel, durch welchen die Ebene niedergedrückt werden muss, damit eine unter den gleichen Umständen herabrollende Kugel dieselbe Acceleration erfährt.

Der verlangte Depressionswinkel ist gleich

$$\alpha - arc\left\{\sin = \frac{14}{15}\sin\alpha\right\}.$$

12. Das tiefere Ende eines gleichförmigen, unter einem gegebenen Winkel zu dem Horizonte geneigten Stabes befindet sich auf einer glatten, horizontalen Ebene. Angenommen eine horizontale Kraft wirke auf sein tieferes Ende so, dass sie den Stab veranlasst, in einer vertikalen Ebene mit einer gegebenen gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit herabzusinken. Welches ist die Geschwindigkeit des tieferen Stabendes für eine beliebige seiner Lagen?

Wenn $\omega =$ der Winkelgeschwindigkeit, $\vartheta =$ der Horizontalneigung des Stabes

zu einer beliebigen Zeit und $\alpha =$ dem Anfangswerte von ϑ ist, so wird die Geschwindigkeit des tieferen Endes gleich sein

$$\frac{g}{\omega} l \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta}.$$

Mit $\omega = 0$ wird das tiefere Ende einen Weg am Ende der Zeit t gleich $\frac{1}{2} g t^2 \cot g\, \alpha$ durchwandert haben.

13. Ein gleichförmiger Stab hängt, mit dem einen seiner Enden befestigt, von einem festen Punkte herab; das andere Ende ist nach dem Boden gerichtet. Dem Stabe wird eine gewisse Winkelgeschwindigkeit erteilt und wenn er sich durch einen Winkel von 90^0 gedreht hat, so wird das Ende, mit welchem er befestigt, gelöst. Welches muss die kleinste anfängliche Winkelgeschwindigkeit sein, damit er im Fallen auf den Boden eine aufrechte Lage besitzt?

Bezeichnet a die Länge des Stabes und ω die verlangte Winkelgeschwindigkeit, so ist

$$\omega^2 = \frac{g}{4a}\left(6 + \frac{\pi^2}{\pi + 2}\right).$$

14. Ein gleichförmiger Stab wird mittelst zweier dünner Fäden von gleicher Länge getragen, ihre tieferen Enden sind an den Endpunkten des Stabes und ihre oberen Enden an festen Punkten in derselben horizontalen Linie befestigt. Zu finden die Zeit einer kleinen Schwingung, wenn das System etwas in der vertikalen Ebene, in welcher es liegt, verschoben wird, ohne dass dadurch die Fäden schlaff werden.

Wenn $2a$ die Länge des Stabes, b diejenige eines jeden Fadens und α die Horizontalneigung der Fäden in einer augenblicklichen Ruhelage bezeichnet, so ist die Schwingungszeit gleich

$$\pi \left\{ \frac{a b \sin \alpha}{3g} \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{a + b \cos^3 \alpha} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

15. Einem dünnen, gleichförmigen Stabe, dessen eines Ende an einem glatten Charniere befestigt ist, ist es erlaubt, aus einer horizontalen Lage zu fallen. Zu finden den vertikalen Zug an dem Charnier, wenn der horizontale Zug an ihm ein Maximum ist.

Bezeichnet G das Gewicht des Stabes, so ist der verlangte vertikale Zug gleich $\frac{11}{8} G$.

16. Eine gleichförmige, kreisrunde Platte wird durch drei gleiche und gleich weit abstehende in ihrem Umfange angebrachte Pfosten unterstützt. Wenn einer der Pfosten plötzlich weggerückt wird, zu finden die Alteration in den Pressungen auf jede der anderen Stützen in dem ersten Augenblicke.

Die Pressung auf jede der bleibenden Stützen wird augenblicklich um ein Zwölftel des Gewichtes der Platte vermindert.

17. Eine elliptische Platte mit vertikaler Ebene und horizontaler Queraxe ist durch zwei gewichtslose Nadeln in ihren Brennpunkten unterstützt. Wenn eine der Nadeln entfernt wird, ist der anfängliche Druck auf die andere Nadel unverändert. Welches ist die Excentricität der Ellipse?

Die verlangte Excentricität ist gleich $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

18. Eine quadratische Platte, von welcher zwei Kanten horizontal sind, wird von zwei vertikalen an ihrer höchsten Kante in gegebenen Punkten befestigten Fäden getragen. Einer der Fäden wird zerschnitten, welches ist dann die anfängliche Spannung des anderen Fadens?

Bezeichnet G das Gewicht der Platte, a die Länge einer Kante, b den Abstand des Aufhängepunktes des nicht zerschnittenen Fadens von dem Mittelpunkte der höheren Kante, so ist die verlangte Spannung gleich $\frac{a^2}{a^2+6b^2}\cdot G$.

19. Ein gleichseitiges Dreieck ist an einem festen Punkte durch drei mit seinen Eckpunkten verbundene Fäden, von denen jeder die Länge einer Dreiecksseite zur Länge hat, aufgehangen. Einer der Fäden wird durchschnitten. Welches ist der augenblickliche Wechsel in den Spannungen der anderen zwei Fäden?

Es seien T, T' die Spannungen eines der zwei Fäden in dem Augenblicke vor und in demjenigen nach dem Zerschneiden des dritten Fadens, dann ist

$$T' : T = 36 : 43.$$

20. Ein gleichförmiger Stab ist durch zwei Fäden egaler Länge, befestigt an seinen Endpunkten und an zwei festen Punkten in der nämlichen horizontalen Ebene, deren wechselseitiger Abstand gleich der Länge des Stabes ist, aufgehangen. Dem Stabe ist eine solche Winkelgeschwindigkeit um eine vertikale Linie durch seinen Mittelpunkt mitgeteilt worden, dass er eben zu der Höhe der festen Punkte aufsteigt. Zu finden die Spannung eines jeden Fadens in dem Augenblicke nach der Mitteilung der Winkelgeschwindigkeit.

Die augenblickliche Spannung eines jeden Fadens ist siebenmal so gross, als sie war, ehe die Bewegung mitgeteilt wurde.

21. Ein schwerer Stab ist an einem festen Punkte durch zwei unausdehnbare, gewichtslose Fäden aufgehangen. Der Stab und die Fäden bilden ein gleichseitiges Dreieck. Annehmend einer der Fäden werde durchschnitten, zu bestimmen die anfängliche Spannung des anderen.

Wenn G das Gewicht des Stabes bezeichnet, so ist die verlangte Spannung gleich $\frac{\sqrt{12}}{13}\cdot G$.

22. Eine gleichförmige, um einen festen Punkt in ihrer Oberfläche bewegliche Kugel stützt sich gegen eine geneigte Ebene und ist der durch den festen Punkt gehende Durchmesser horizontal. Um wie viel wird der Druck auf den festen Punkt wachsen oder abnehmen, wenn die Ebene plötzlich weggerückt wird?

Der Druck wird wachsen oder abnehmen, gemäss dem wie die Neigung der Ebene kleiner oder grösser als $arc\left(tg=\frac{2}{7}\right)$ ist.

23. Eine Halbkugel schwingt um eine horizontale, mit einem Durchmesser ihrer Basis zusammenfallende Axe. Zu vergleichen die Maximalpressung auf die Axe mit dem Gewichte der Halbkugel, wenn die Basis des Körpers beim Beginne der Bewegung unter einem Winkel von 60° gegen den Horizont geneigt ist.

Der grösste Druck ist gleich $\frac{173}{128}\times$ Gewicht der Halbkugel.

24. Ein um einen horizontalen Diameter seiner Basis, welcher fest ist, beweglicher Kegel wird durch eine vertikale in seinem Scheitel befestigte Schnur so unterstützt, dass seine Axe horizontal ist. Die Schnur wird plötzlich zerschnitten. Zu vergleichen den Anfangsdruck auf den festen Diameter mit dem Drucke auf denselben in der Ruhelage.

Wenn α den Winkel in der Spitze des Kegels, P den Druck auf den horizontalen Diameter, ehe der Faden durchschnitten wird, und P' denjenigen in dem Momente, nachdem er zerschnitten worden ist, bezeichnet, dann ist

$$P' = P \cdot \frac{5 - 3 \cos \alpha}{5 - \cos \alpha}.$$

25. Einer heterogenen Kugel ist eine Winkelgeschwindigkeit um eine durch ihren Schwerpunkt S gehende, zu der ihren Schwerpunkt S und ihren geometrischen Mittelpunkt C enthaltenden vertikalen Ebene senkrechte Axe mitgeteilt und die Kugel sodann auf eine glatte, horizontale Ebene gestellt worden (Fig. 115, S. 317). Die Grösse dieser Winkelgeschwindigkeit soll so bestimmt werden, dass S sich zu einem gewissen Punkte in der vertikalen Linie LCK erheben und daselbst ruhen kann, wenn die anfängliche Grösse des Winkels zwischen der Geraden CS und dem vertikalen Halbmesser CL gegeben ist.

Es sei $CS = c$, $k =$ dem Trägheitshalbmesser der Kugel um S, $\alpha =$ dem Anfangswerte des Winkels SCL, $\omega =$ der verlangten Winkelgeschwindigkeit, dann ist die Grösse von ω durch die Gleichung bestimmt

$$(k^2 + c^2 \sin^2 \alpha)\, \omega^2 = 2\, c\, g\, (1 + \cos \alpha).$$

Euler, Nova Acta Acad. Petrop. 1783, p. 119.

26. Ein gleichförmiger Stab, auf welchen keine Kraft wirkt, ist in Bewegung; seine Endpunkte sind genötigt, auf zwei in einer Ebene aufeinander senkrecht stehenden festen Stäben zu gleiten. Welches ist die ihn verdrehende Kraft in einem beliebigen seiner Punkte?

Es sei AB der Stab, C ein beliebiger Punkt in ihm, O der Schnittpunkt der zwei festen Stäbe, CH, CK seien die Perpendikel von C auf OA, OB resp. und M sei gleich der Masse von AB. Die Winkelgeschwindigkeit ω von AB wird konstant sein, und für die verdrehende Kraft bei C ist der Ausdruck gefunden worden

$$\frac{1}{2}\, \omega^2\, M \cdot CH \cdot CK.$$

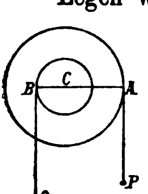
Mackenzie and Walton, Solutions of the Cambridge Problems for 1854. 1—26. Walton p. 438—458.

Zweiter Abschnitt.

Bewegung mehrerer Körper.

1. An dem Rade und der Welle eines Wellrades sind durch unausdehnbare Seile Gewichte P und Q befestigt, welche nicht im Gleichgewichte sind. Wie ist die Bewegung beschaffen und wie gross sind die Spannungen der Seile, wenn von ihren Gewichten abgesehen wird?

Legen wir durch den Mittelpunkt C (Fig. 122) der Projektion von Rad und Welle auf eine zur Axe des Wellrades senkrechte Ebene eine horizontale Linie ACB, dann trifft dieselbe die Projektionen der Seile in den Berührungspunkten A, B mit den Projektionen des Rades und der Welle. Es sei $AC = a$, $BC = a'$, $m =$ der Masse von P, $m' =$ derjenigen von Q, $\mu =$ derjenigen von Rad und Welle zusammen, $k =$ dem Trägheitshalbmesser des Wellrades für seine Axe, $AP = x$, $BQ = x'$, $T =$ der Spannung von AP, $T' =$ derjenigen von BQ, $\vartheta =$ dem Winkel, durch welchen sich Rad und Welle um ihre gemeinschaftliche Axe am Ende der Zeit t gedreht haben.



Figu 122.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir für die Bewegung des Gewichtes P

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = mg - T, \tag{1}$$

für diejenige des Gewichtes Q

$$m'\frac{d^2 x'}{dt^2} = m'g - T', \tag{2}$$

und für die Rotation des Wellrades

$$\mu k^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = Ta - T'a'. \tag{3}$$

Ferner bestehen die beiden geometrischen Relationen

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{d\vartheta}{dt}, \qquad \frac{dx'}{dt} = -a'\frac{d\vartheta}{dt},$$

womit die Gleichungen (1) und (2) übergehen in

$$ma\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = mg - T, \quad (4) \qquad -m'a'\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = m'g - T'. \quad (5)$$

Die Einführung der aus (4) und (5) bestimmten Werte von T und T' in die Gleichung (3) giebt

$$\mu k^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = ma\left(g - a\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right) - m'a'\left(g + a'\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right),$$

$$(ma^2 + m'a'^2 + \mu k^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = g(ma - m'a'), \tag{6}$$

so dass mit $(ma^2 + m'a'^2 + \mu k^2) = \alpha$, $\quad g(ma - m'a') = \beta$,

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\beta}{\alpha}t + C, \qquad \vartheta = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}t^2 + Ct + D.$$

Ist zur Zeit $t = 0$, $\vartheta = 0$, $\dfrac{d\vartheta}{dt} = 0$, dann erhalten wir

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\beta}{\alpha}t, \qquad \vartheta = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}t^2.$$

Die Winkelbewegung des Wellrades ist somit eine gleichförmig beschleunigte.

Ist ferner b der Anfangswert von x, b' derjenige von x', so bekommen wir für die Bewegung der Gewichte P und Q

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta}{\alpha}t, \qquad \frac{dx'}{dt} = a'\frac{\beta}{\alpha}t,$$

$$x = b + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}t^2, \qquad x' = b' - \frac{1}{2}a'\frac{\beta}{\alpha}t^2,$$

woraus hervorgeht, dass die Bewegungen der Gewichte ebenfalls gleichförmig beschleunigt sind.

Nun erhalten wir für die Spannungen T, T' der Seile durch die Gleichungen (4) und (6), sowie die Gleichungen (5) und (6)

$$T = mg\left(1 - \frac{a(ma - m'a')}{ma^2 + m'a'^2 + \mu k^2}\right),$$

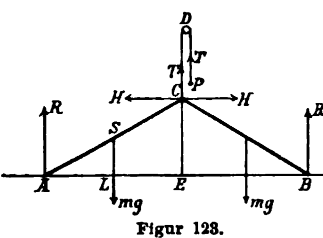
$$T' = m'g\left(1 + \frac{a'(ma - m'a')}{ma^2 + m'a'^2 + \mu k^2}\right).$$

Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Walton, p. 473.

2. Zwei gleiche, gleichförmige Stäbe AC, BC (Fig. 123) sind bei C zu einem Firste verbunden und in einer geraden Linie auf eine horizontale Ebene gelegt. Ein Faden CDP, an dessen einem Ende ein Gewicht P, welches grösser als dasjenige eines jeden der zwei Stäbe, befestigt ist, läuft über einen glatten Bolzen D senkrecht über dem Verbindungspunkte C der zwei Stäbe und ist mit seinem anderen Ende an diesen Punkt geknüpft. Welches ist die Bewegung des Gewichtes P?

Es sei ACB eine beliebige Lage der beiden Stäbe, $AC = 2a = BC$, $\measuredangle CAB = \vartheta = \measuredangle CBA$, $R =$ der Reaktion der Ebene auf jeden der Punkte A und B. $T =$ der Spannung des Fadens, $H =$ den gegenseitigen Wirkungen der Stäbe an der Verbindungsstelle, welche offenbar in einer horizontalen zu AB parallelen Linie stattfinden, $m =$ der Masse eines jeden der Stäbe, $\mu =$ der Masse des Gewichtes P, S der Schwerpunkt des Stabes AC, SL, $CE \perp AB$, $EL = x$, $SL = y$, $k =$ dem Trägheitshalbmesser von AC um S.



Figur 123.

Durch Zerlegung der an dem Stabe AC wirkenden Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung erhalten wir für die Translationsbewegung seines Schwerpunktes

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = H, \quad (1) \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = R + \frac{1}{2}T - mg, \qquad (2)$$

weil $\frac{1}{2}T$ der auf jeden Stab ausgeübte Vertikalschub ist.

Ferner besteht für die Rotation des Stabes AC um seinen Schwerpunkt S die Gleichung

$$m k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = H a \sin \vartheta + \frac{1}{2} T a \cos \vartheta - R a \cos \vartheta. \tag{3}$$

Auch ist für die Bewegung des Gewichtes P, indem P um den doppelten Weg des Schwerpunktes S in vertikaler Richtung sinkt,

$$2 \mu \frac{d^2 y}{d t^2} = \mu g - T. \tag{4}$$

Die Multiplikation der Gleichung (2) mit $a \cos \vartheta$ giebt

$$m a \cos \vartheta \left(\frac{d^2 y}{d t^2} + g \right) = \left(R + \frac{1}{2} T \right) a \cos \vartheta,$$

und wenn wir diese Gleichung zu der Gleichung (3) addieren, so bekommen wir

$$m k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} + m a \cos \vartheta \left(\frac{d^2 y}{d t^2} + g \right) = H a \sin \vartheta + T a \cos \vartheta,$$

folglich mittelst (1) und (4)

$$m k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} + m a \cos \vartheta \left(\frac{d^2 y}{d t^2} + g \right) = m a \sin \vartheta \frac{d^2 x}{d t^2}$$
$$+ \mu a \cos \vartheta \left(g - 2 \frac{d^2 y}{d t^2} \right).$$

Weil nun $x = a \cos \vartheta$, $y = a \sin \vartheta$ ist, so geht mit diesen Werten die letzte Gleichung über in

$$m k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} + m a^2 \left(\cos \vartheta \frac{d^2}{d t^2} \sin \vartheta - \sin \vartheta \frac{d^2}{d t^2} \cos \vartheta \right)$$
$$+ 2 \mu a^2 \cos \vartheta \frac{d^2}{d t^2} \sin \vartheta = a g (\mu - m) \cos \vartheta,$$

$$(m a^2 + m k^2) \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} + 2 \mu a^2 \cos \vartheta \frac{d^2}{d t^2} \sin \vartheta = a g (\mu - m) \cos \vartheta.$$

Die Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit $2 \frac{d \vartheta}{d t}$ und ihre Integration giebt, weil $\frac{d \vartheta}{d t} = 0$, wenn $\vartheta = 0$ ist,

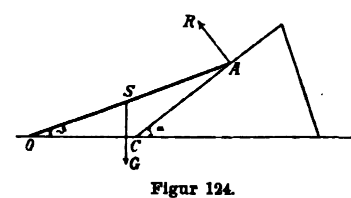
$$(m a^2 + m k^2 + 2 \mu a^2 \cos^2 \vartheta) \left(\frac{d \vartheta}{d t} \right)^2 = 2 a g (\mu - m) \sin \vartheta,$$

womit die Winkelgeschwindigkeit des Stabes für eine beliebige seiner Lagen bestimmt ist.

Da nun der Wert von $\frac{d \vartheta}{d t}$ und daher auch derjenige von $\frac{d^2 \vartheta}{d t^2}$ als Funktion von ϑ bekannt ist, so können wir leicht die Werte von R, H und T aus den Gleichungen (1), (2), (4) als Funktionen desselben Winkels erhalten.

Walton, p. 475.

3. Ein gleichförmiger Stab OA (Fig. 124) kann sich in einer vertikalen Ebene um ein Charnier bei O drehen und stützt sich bei A auf einen glatten Keil, welcher entlang einer glatten horizontalen Ebene durch O gleiten kann. Wie ist die Bewegung beschaffen?



Figur 124.

Es sei $\alpha =$ der Horizontalneigung des Keiles, $M =$ seiner Masse, $OC = x$, $l =$ der Länge des Stabes, $m =$ seiner Masse, $\sphericalangle AOC = \vartheta$, $R =$ der Reaktion in A. Damit sind die Bewegungsgleichungen

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = R\sin\alpha, \quad (1) \qquad mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Rl\cos(\alpha-\vartheta) - mg\frac{l}{2}\cos\vartheta, \quad (2)$$

wozu noch die geometrische Bedingung kommt

$$x = \frac{l}{\sin\alpha}\sin(\alpha-\vartheta). \tag{3}$$

Die Differentiation der letzten Gleichung giebt

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{l}{\sin\alpha}\cos(\alpha-\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{l}{\sin\alpha}\sin(\alpha-\vartheta)\frac{d^2\vartheta}{dt^2}. \tag{3'}$$

Daher bekommen wir mit (1)

$$-M\sin(\alpha-\vartheta)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = R\sin^2\alpha. \tag{4}$$

Die Multiplikation der Gleichung (1) mit $2\frac{dx}{dt}$ und diejenige der Gleichung (2) mit $2\frac{d\vartheta}{dt}$ giebt die Gleichungen

$$2M\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt}R\sin\alpha, \tag{5}$$

$$2mk^2\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 2Rl\cos(\alpha-\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt} - mgl\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}, \tag{6}$$

und wenn wir die (5) und (6) addieren, so kommt

$$2M\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 2mk^2\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mgl\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$
$$+ 2R\left\{\sin\alpha\frac{dx}{dt} + l\cos(\alpha-\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}\right\}.$$

Da nun mit (3') $\sin\alpha\frac{dx}{dt} = -l\cos(\alpha-\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}$, so verschwindet der Coëfficient von R und unsere Gleichung geht über in

$$2M\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 2mk^2\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mgl\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mk^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C - mgl\sin\vartheta,$$

und wenn wir hier aus (3′) den Wert von $\frac{dx}{dt}$ substituieren, so wird

$$\left\{M\frac{l^2}{\sin^2\alpha}\cos^2(\alpha-\vartheta) + mk^2\right\}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C - mgl\sin\vartheta.$$

Wenn zur Zeit $t = 0$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, $\vartheta = \beta$, also der Stab in Ruhe war, ist $C = mgl\sin\beta$, daher

$$\left\{M\frac{l^2}{\sin^2\alpha}\cos^2(\alpha-\vartheta) + mk^2\right\}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = mgl(\sin\beta - \sin\vartheta), \quad (7)$$

womit die Winkelgeschwindigkeit des Stabes für jede seiner Lagen bestimmt ist. Diese Gleichung kann nicht weiter integriert werden, so dass wir ϑ nicht als Funktion der Zeit finden können.

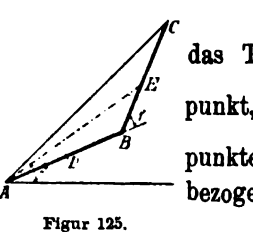
Mit Hilfe der Gleichungen (3′) und (7) ergiebt sich für die Geschwindigkeit des Keiles

$$\frac{dx}{dt} = -l\cos(\alpha-\vartheta)\sqrt{\frac{mgl(\sin\beta-\sin\vartheta)}{Ml^2\cos^2(\alpha-\vartheta)+mk^2\sin^2\alpha}},$$

welche eine Funktion des Winkels ϑ ist. Dieselbe Aufgabe wurde auch mit Hilfe des Prinzipes der Erhaltung der lebendigen Kraft gelöst.

Routh, Dynamics, p. 113.

4. Zwei gleichförmige Stäbe AB, BC (Fig. 125) sind bei B durch ein glattes Charnier verbunden und können auf einer glatten, horizontalen Ebene frei gleiten. Das Ende A des Stabes AB ist durch ein weiteres glattes Charnier an einen festen Punkt dieser Ebene gefesselt. Eine elastische Schnur AC, deren natürliche Länge gleich $AB = BC$ ist, verbindet den Punkt A mit dem Endpunkte C des Stabes BC. Anfangs bilden die zwei Stäbe und die Schnur ein gleichseitiges Dreieck und das System beginnt sich mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω um den Punkt A zu bewegen. Welches ist die grösste Länge der elastischen Schnur während der Bewegung? Welches sind die Winkelgeschwindigkeiten der Stäbe, wenn sie einen rechten Winkel einschliessen, und welches ist der kleinste Wert von Ω, damit dieses möglich sein kann?



Figur 125.

Es sei die Länge eines jeden Stabes $= 2a$, mk^2 das Trägheitsmoment eines jeden um seinen Schwerpunkt, so dass $k^2 = \frac{1}{3}a^2$. D und E seien die Mittelpunkte der Stäbe, (r, ϑ) die Polarcoordinaten von E, bezogen auf den Ursprung A.

Die einzigen Kräfte, welche an dem Systeme wirken, sind die Reaktion des Charnieres A und die Spannung der elastischen Schnur AC. Wenn wir irgend eine Richtung suchen, für welche die Summe der Componenten dieser Kräfte verschwindet, so können wir keine finden, weil die Richtung der Reaktion jetzt unbekannt ist. Weil aber die Richtungen der Wirkungen dieser beiden Kräfte durch A gehen, so verschwinden ihre Momente um A, daher ist das die Winkelbewegung um A erzeugende Moment während der ganzen Bewegung konstant und seinem Anfangswerte gleich. Es seien ω, ω' die Winkelgeschwindigkeiten von AB, BC zu einer beliebigen Zeit t. Das drehende Moment von BC um A ist $m\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt} + k^2\omega'\right)$, das drehende Moment von AB ist $m(k^2 + a^2)\omega$, weil AB sich um den festen Punkt A dreht. Die Anfangswerte dieser Momente sind $m(3a^2\Omega + k^2\Omega)$ und $m(a^2 + k^2)\Omega$ resp., weil ω, ω', $\frac{d\vartheta}{dt}$ anfänglich gleich Ω und r anfangs gleich dem Perpendikel von A auf die gegenüberliegende Seite des von dem Systeme gebildeten gleichschenkeligen Dreieckes ist. Folglich haben wir die Gleichung

$$m(k^2 + a^2)\omega + mk^2\omega' + mr^2\frac{d\vartheta}{dt} = m(2k^2 + 4a^2)\Omega. \qquad (1)$$

Eine weitere Gleichung können wir durch den Gebrauch des Prinzipes der lebendigen Kraft erhalten. Die lebendige Kraft des Stabes BC ist $m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + k^2\omega'^2\right\}$, diejenige des Stabes AB $m(k^2 + \omega^2)$, weil dieser sich um den festen Punkt A dreht. Die Anfangswerte dieser lebendigen Kräfte sind resp. $m(3a^2 + k^2)\Omega^2$ und $m(k^2 + a^2)\Omega^2$. Wenn T die Spannung der Schnur, ϱ ihre Länge zur Zeit t bezeichnet, so ist die Kräftefunktion der Spannung $\int_{2a}^{\varrho}(-T)\,d\varrho$. Gemäss der für die Berechnung der virtuellen Momente gegebenen Regel ist das Minuszeichen für die Spannung zu wählen, weil sie auf die Verminderung von ϱ hinwirkt, und die Grenzen sind $2a$, ϱ, da die Schnur sich gestreckt hat von ihrer Anfangslänge $2a$ bis zu der Länge ϱ. Nach Hooke's Gesetz ist $T = \lambda\frac{\varrho - 2a}{2a}$, so dass durch Integration die Kräftefunktion gleich $-\lambda\frac{(\varrho - 2a)^2}{4a}$ ist. Die Gleichung der lebendigen Kraft ist daher

$$m(k^2 + a^2)\omega^2 + m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + k^2\omega'^2\right\}$$
$$= m(2k^2 + 4a^2)\Omega^2 - \lambda\frac{(\varrho - 2a)^2}{2a}. \qquad (2)$$

Es sind nur zwei mögliche unabhängige Bewegungen der Stäbe vorhanden. Wir können AB um A und BC um B drehen, alle anderen Bewegungen, welche nicht aus diesen zusammengesetzt werden können, sind mit den geometrischen Bedingungen der Frage unvereinbar. Zwei dynamische Gleichungen genügen dazu, um dieses zu bestimmen, dieselben haben wir eben erhalten. Alle anderen Gleichungen, welche gewünscht werden mögen, müssen von den geometrischen Bedingungen abgeleitet werden. Um die geometrischen Bedingungen der Frage auszudrücken, wollen wir mit φ das Supplement des Winkels ABC bezeichnen, dann ist

$$r^2 = 5\,a^2 + 4\,a^2 \cos\varphi. \tag{3}$$

Weil $\frac{d\varphi}{dt}$ die relative Winkelgeschwindigkeit der Stäbe AB, BC ist, erhalten wir weiter

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega' - \omega, \quad (4) \qquad r\frac{dr}{dt} = -2\,a^2 \sin\varphi\,(\omega' - \omega). \tag{5}$$

Ferner ist, wenn $\psi = \sphericalangle EAB$,

$$\sin\psi = \sin\varphi\,\frac{a}{r}, \tag{6}$$

und weil $\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} - \omega$, so haben wir

$$\cos\psi\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \omega\right) = \left(\frac{a}{r}\cos\varphi + \frac{2\,a^3}{r^3}\sin^2\varphi\right)(\omega' - \omega). \tag{7}$$

Auch folgt aus dem Dreiecke ABC

$$\varrho^2 + 2\,a^2 = 2\,r^2. \tag{8}$$

Aus diesen acht Gleichungen können wir ω, ω', r, $\frac{dr}{dt}$, ϱ, ψ und $\frac{d\vartheta}{dt}$ eliminieren. Wir bekommen dadurch eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, welche $\frac{d\varphi}{dt}$ und φ enthält.

Zuerst wurde verlangt, die grösste Länge der Schnur während der Bewegung zu finden.

In dem Momente, wo ϱ ein Maximum ist, muss $\frac{d\varrho}{dt} = 0$ sein, und das ganze System bewegt sich dann so, als wäre es ein starrer Körper. Wir haben daher für einen einzigen Augenblick ω, ω', $\frac{d\vartheta}{dt}$ alle einander gleich und $\frac{dr}{dt} = 0$. Die zwei ersten Gleichungen gehen, wenn wir für k^2 seinen Wert $\frac{1}{3}\,a^2$ substituieren, durch diese Bedingung über in

$$\left.\begin{aligned} (5a^2+3r^2)\omega &= 14a^2\Omega \\ (5a^2+3r^2)\omega^2 &= 14a^2\Omega^2 - \frac{3\lambda}{2am}(\varrho-2a)^2 \end{aligned}\right\}.$$

Indem wir nun hier ω eliminieren und für r aus (8) seinen Wert einführen, gelangen wir zu der kubischen Gleichung

$$(3\varrho^2+16a^2)(\varrho-2a) = \frac{28m\Omega^2a^3}{\lambda}(\varrho+2a),$$

welche eine positive Wurzel, grösser als $2a$, besitzt, die den verlangten Wert von ϱ giebt.

Weiter wurde der Bewegungszustand für den Augenblick verlangt, in welchem die zwei Stäbe rechtwinkelig zu einander sind. In diesem Zeitpunkte ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, folglich durch (3) $r = a\sqrt{5}$, durch (5) $\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{5}}a(\omega'-\omega)$, durch (7) $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{5}(\omega'+4\omega)$. Damit gehen die Gleichungen (1) und (2) über in

$$\left.\begin{aligned} 4\omega+\omega' &= \frac{7}{2}\Omega \\ 4\omega^2+\omega'^2 &= \frac{7}{2}\Omega^2 - \frac{\lambda}{ma}\frac{3(\sqrt{2}-1)^2}{2} \end{aligned}\right\}.$$

Aus diesen zwei Gleichungen können wir leicht ω und ω' finden und es wird sich dann zeigen, dass die Werte von ω und ω' nicht reell sind, es sei denn $\Omega^2 > \frac{10}{7}\frac{\lambda}{ma}(\sqrt{2}-1)^2$.

Wir können uns oft die Mühe einer solchen Elimination sparen, wenn wir die Gleichungen, welche mit dem Prinzipe der Winkelbewegung und dem Prinzipe der lebendigen Kraft abgeleitet worden sind, in einer etwas anderen Weise ableiten.

Der Stab BC dreht sich um B mit einer Winkelgeschwindigkeit ω', während zu der nämlichen Zeit B sich senkrecht zu AB mit einer Geschwindigkeit $2a\omega$ bewegt. Die Geschwindigkeit von E ist daher die Resultante von $a\omega'$, senkrecht zu BC, und $2a\omega$, senkrecht zu AB, beide Geschwindigkeiten natürlicher Weise auf den Punkt E angewendet. Wenn wir wünschen, dass sich unsere Resultate in Ausdrücken von ω, ω' ergeben, so müssen wir diese Geschwindigkeiten zur Darstellung der Bewegung von E, anstatt der Polarcoordinaten (r, ϑ) benutzen.

Also haben wir bei der Anwendung des Prinzipes des Winkelbewegungsmomentes das Moment der Geschwindigkeit von E um A zu nehmen. Weil die Geschwindigkeit $2a\omega$ senkrecht zu AB ist, so ist die Länge des Perpendikels von A auf ihre Richtung gleich AB plus

die Projektion von BC auf AB, d. i. $2a + a\cos\varphi$. Weil die Geschwindigkeit $a\omega'$ senkrecht zu BC ist, so ist die Länge des Perpendikels von A auf die Linie ihrer Wirkung gleich BE plus die Projektion von AB auf BE, d. i. $a + 2a\cos\varphi$. Folglich ist das drehende Moment für den Stab BC um A

$$mk^2\omega' + 2ma\omega(2a + a\cos\varphi) + ma\omega'(a + 2a\cos\varphi).$$

Daher giebt das Prinzip der Erhaltung der Bewegungsmomente für die zwei Stäbe

$$m(k^2 + 5a^2 + 2a^2\cos\varphi)\omega + m(k^2 + a^2 + 2a^2\cos\varphi)\omega'$$
$$= m(2k^2 + 4a^2)\Omega.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist der Anfangswert des drehenden Momentes, sie ist von der linken Seite dadurch abgeleitet worden, dass $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ und $\omega = \omega' = \Omega$ gesetzt wurde. Indem wir das Prinzip der lebendigen Kraft anwenden, verlangen wir die Geschwindigkeit von E. Betrachten wir dieselbe als die Resultante aus $2a\omega$ und $a\omega'$, und bezeichnen sie mit v, dann sehen wir, dass

$$v^2 = (2a\omega)^2 + (a\omega')^2 + 2\,.\,2a\omega\,.\,a\omega'\cos\varphi.$$

Der Anfangswert wird wie vorher gefunden, wir haben nur $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\omega = \omega' = \Omega$ zu setzen. Das Prinzip der lebendigen Kraft giebt

$$m(k^2 + 5a^2)\omega^2 + m(k^2 + a^2)\omega'^2 + 4ma^2\omega\omega'\cos\varphi$$
$$= m(2k^2 + 4a^2)\Omega^2 - \lambda\frac{(\varrho - 2a)^2}{2a}.$$

Die Kräftefunktion wird in derselben Weise wie vorher gefunden. Wenn wir zu diesen Gleichungen die oben gegebene Gleichung (4) ziehen und $\varrho = 4a\cos\frac{\varphi}{2}$ substituieren, so erhalten wir gerade drei Gleichungen, durch welche ω, ω' und φ gefunden werden können. Wenn diese Grössen alle sind, welche verlangt werden, wie in den zwei oben betrachteten Fällen, so hat diese Lösungsform den Vorzug der Kürze. Für das Maximum von ϱ setzen wir $\omega' = \omega$, sind die beiden Stäbe rechtwinkelig zu einander, dann haben wir $\cos\varphi = 0$ zu nehmen. Die Gleichungen führen zu den bereits gegebenen Resultaten.

Routh, Dynamics, p. 114.

5. Die Linse eines schweren Pendels besitzt eine mit Wasser gefüllte kugelförmige Höhlung. Welches ist die Bewegung?

Es sei O der Aufhängepunkt, S der Schwerpunkt des soliden Teiles des Pendels, MK^2 sein Trägheitsmoment um die Aufhängeaxe durch O,

$OS = h$, C der Mittelpunkt der Wasserkugel, a ihr Halbmesser und $OC = c$.

Wenn wir das Wasser als eine vollkommene Flüssigkeit voraussetzen, so muss die Wirkung zwischen ihm und dem Gehäuse, infolge der Beschaffenheit eines solchen Fluidums, senkrecht zu der kugelförmigen Umhüllung sein. Es wird daher keine Kraft vorhanden sein, welche geneigt ist, das Fluidum um seinen Schwerpunkt zu drehen. Wenn das Pendel hin- und herschwingt, so wird der Schwerpunkt der Kugel an seiner Bewegung teilnehmen, aber es wird hier keine Rotation des Wassers stattfinden.

Die Effektivkräfte des Wassers sind äquivalent der Effektivkraft der ganzen in ihrem Schwerpunkte vereinigten Masse und einem Paare $mk^2 \frac{d\omega}{dt}$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit des Wassers und mk^2 sein Trägheitsmoment um einen Diameter ist. Es ist aber oben angenommen worden, dass $\omega = 0$, folglich kann dieses Paar weggelassen werden. Es folgt daraus, dass in allen Problemen dieser Art, wo der Körper sich nicht dreht, oder mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit rotiert, wir uns den Körper als einen materiellen mit seinem Schwerpunkte zusammenfallenden Punkt denken können.

Das Pendel und die eingeschlossene Flüssigkeit bilden jetzt einen starren, sich um eine feste Axe drehenden Körper, folglich ist, wenn ϑ den Winkel bezeichnet, den eine feste Linie CO in dem Körper mit der Vertikalen einschliesst, die Bewegungsgleichung

$$(MK^2 + mc^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (Mh + mc)g \sin\vartheta = 0,$$

wo bei der Bestimmung des Momentes der Schwerkraft angenommen worden ist, dass die Punkte O, S und C in einer geraden Linie liegen.

Hiernach ist die Länge L' des einfachen äquivalenten Pendels

$$L' = \frac{MK^2 + mc^2}{Mh + mc}.$$

Es bezeichnet mk^2 das Trägheitsmoment der Wasserkugel. Nun würde, wenn das Wasser starr und fest mit dem Gehäuse verbunden wäre, die Länge L des einfachen äquivalenten Pendels, durch einen ähnlichen Schluss, sein

$$L = \frac{MK^2 + m(c^2 + k^2)}{Mh + mc}.$$

Es ergiebt sich daraus $L' < L$, so dass die Schwingungszeit kleiner ausfällt, wenn das Ganze solid ist.

Routh, Dynamics, p. 117.

6. Eine Röhre, welche sich in einer horizontalen Ebene um eine vertikale Axe drehen kann, ist mit einer beliebigen Zahl von Kugeln in bestimmten Intervallen belastet. Der Röhre ist eine gegebene Winkelgeschwindigkeit mitgeteilt worden, und fragt es sich, wie die Bewegung der Röhre und der Kugeln beschaffen ist.

Es seien $a, a', a'', a''', \ldots$ die Anfangsabstände der Kugeln von der festen Axe, $r, r', r'', r''', \ldots$ ihre Entfernungen von derselben Linie zu einer beliebigen Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung an, $m, m', m'', m''', \ldots$ die Massen der aufeinander folgenden Kugeln, $R, R', R'', R''', \ldots$ die Aktionen und Reaktionen der aufeinander folgenden Kugeln und der Röhre auf einander zur Zeit t. Ferner sei μ die Masse der Röhre, ϑ der Winkel, durch welchen sie sich innerhalb der Zeit t dreht, μk^2 das Trägheitsmoment der Röhre um die vertikale Axe.

Für die Bewegung der Röhre besteht die Gleichung

$$\mu k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = R r + R' r' + R'' r'' + R''' r''' + \cdots \tag{1}$$

Die Bewegung der einzelnen Kugeln bestimmt sich, wenn (x, y), (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), .. die rechtwinkeligen Coordinaten ihrer Schwerpunkte zur Zeit t sind, durch die Gleichungen

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = R \frac{y}{r};\; m \frac{d^2 y}{d t^2} = -R \frac{x}{r}. \quad (2) \qquad m' \frac{d^2 x'}{d t^2} = R' \frac{y'}{r'};\; m' \frac{d^2 y'}{d t^2} = -R' \frac{x'}{r'}. \quad (3)$$

$$m'' \frac{d^2 x''}{d t^2} = R'' \frac{y''}{r''}; \qquad m'' \frac{d^2 y''}{d t^2} = -R'' \frac{x''}{r''}. \tag{4}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Multiplizieren wir die erste der Gleichungen (2) mit y, die zweite mit x und subtrahieren die resultierenden Gleichungen von einander, so folgt

$$m\left(y \frac{d^2 x}{d t^2} - x \frac{d^2 y}{d t^2}\right) = R r.$$

Weil aber $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ ist, können wir, die Axe der x so wählend, dass sie mit der Anfangslage der Röhre zusammenfällt, schreiben

$$m \frac{d}{d t}\left(r^2 \frac{d \vartheta}{d t}\right) = -R r.$$

In derselben Weise ergiebt sich durch die Gleichungen (3), (4)

$$m' \frac{d}{d t}\left(r'^2 \frac{d \vartheta}{d t}\right) = -R' r', \qquad m'' \frac{d}{d t}\left(r''^2 \frac{d \vartheta}{d t}\right) = -R'' r'', \ldots\ldots$$

Mit diesen Werten geht die Gleichung (1) über in

$$\mu k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = -\frac{d}{d t}\left(m r^2 \frac{d \vartheta}{d t} + m' r'^2 \frac{d \vartheta}{d t} + m'' r''^2 \frac{d \vartheta}{d t} + \cdots\right),$$

$$\mu k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = -\frac{d}{d t}\left\{\left(m r^2 + m' r'^2 + m'' r''^2 + \cdots\right) \frac{d \vartheta}{d t}\right\}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\mu k^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C - (m r^2 + m' r'^2 + m'' r''^2 + \cdots) \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Nehmen wir ω als den Anfangswert der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ an, so bestimmt sich die Konstante C durch die Relation

$$\mu k^2 \omega = C - (m a^2 + m' a'^2 + m'' a''^2 + \cdots) \omega,$$

und erhalten wir damit für die Winkelgeschwindigkeit der Röhre

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu k^2 + m a^2 + m' a'^2 + m'' a''^2 + \cdots}{\mu k^2 + m r^2 + m' r'^2 + m'' r''^2 + \cdots} \omega. = \frac{\mu k^2 + \Sigma (m a^2)}{\mu k^2 + \Sigma (m r^2)} \omega. \tag{5}$$

Weiter geben die Gleichungen (2) die Relation

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} + y \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

und wenn wir für x und y ihre Werte in r und ϑ substituieren

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2. \tag{6}$$

Auf demselben Wege erhalten wir durch die Gleichungen (3)

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = r' \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

Die Elimination von $\frac{d\vartheta}{dt}$ zwischen diesen zwei Gleichungen giebt

$$r' \frac{d^2 r}{dt^2} = r \frac{d^2 r'}{dt^2}.$$

Integrierend und beachtend, dass beide $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{dr'}{dt}$ anfänglich gleich Null sind, wird

$$r' \frac{dr}{dt} = r \frac{dr'}{dt}, \quad \text{oder} \quad \frac{dr}{r} = \frac{dr'}{r'}.$$

Die nochmalige Integration liefert mit den Anfangswerten a, a' von r, r'

$$\frac{r}{a} = \frac{r'}{a'}, \quad \text{oder} \quad r' = \frac{a'}{a} r.$$

Auf genau demselben Wege können wir zeigen, dass

$$r'' = \frac{a''}{a} r, \qquad r''' = \frac{a'''}{a} r, \ldots.$$

Mit diesen Werten geht die Gleichung (5) über in

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu k^2 + m a^2 + m' a'^2 + m'' a''^2 + \cdots}{\mu k^2 + (m a^2 + m' a'^2 + m'' a''^2 + \cdots) \frac{r^2}{a^2}} \omega, \tag{7}$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu k^2 + \Sigma (m a^2)}{\mu k^2 + \frac{r^2}{a^2} \Sigma (m a^2)} \omega.$$

Jetzt bekommen wir mit Hilfe von (6) und (7)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 r \left\{ \frac{\mu k^2 + \Sigma(m a^2)}{\mu k^2 + \frac{r^2}{a^2}\Sigma(m a^2)} \right\}^2.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $2\frac{dr}{dt}$, integrieren und beachten, dass $\frac{dr}{dt} = 0$, wenn $r = a$ ist, dann finden wir

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = v^2 = \omega^2 (r^2 - a^2) \frac{\mu k^2 + \Sigma(m a^2)}{\mu k^2 + \frac{r^2}{a^2}\Sigma(m a^2)}. \tag{8}$$

Die Gleichungen (7) und (8) geben uns für irgend einen bestimmten Abstand der Kugel m von der Rotationsaxe die Winkelgeschwindigkeit der Röhre und die Geschwindigkeit der Kugel m in ihr. Eliminieren wir zwischen (7) und (8) das Zeitelement dt, so gelangen wir zu der Differentialgleichung der Bahn von m in der durch die Axe der Röhre gehenden Horizontalebene in Polarcoordinaten, dieselbe ist

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = (r^2 - a^2) \frac{\mu k^2 + \frac{r^2}{a^2}\Sigma(m a^2)}{\mu k^2 + \Sigma(m a^2)}.$$

Ähnliche Resultate bekommen wir offenbar für die übrigen Kugeln, mit denen die Röhre belastet ist.

Wenn $\mu = 0$ ist, so gehen die Gleichungen (7) und (8) über in

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{a^2}{r^2}\omega, \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (r^2 - a^2)\frac{a^2}{r^2}\omega^2.$$

Die Elimination von dt giebt hier

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = (r^2 - a^2)\frac{r^2}{a^2}, \quad d\vartheta = \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = -\frac{d\left(\frac{a}{r}\right)}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}},$$

welche Gleichung integriert giebt, weil $\vartheta = 0$, wenn $r = a$ ist,

$$\vartheta = arc\left(\cos = \frac{a}{r}\right), \qquad \frac{a}{r} = \cos\vartheta.$$

Für die Relation zwischen r und t haben wir

$$dt = \frac{1}{\omega a}\cdot\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \quad \text{also} \quad t = \frac{1}{\omega a}\sqrt{r^2 - a^2},$$

und daher

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \omega^2 t^2.$$

Entsprechende Gleichungen lassen sich sofort für die übrigen Kugeln anschreiben, so dass die Polargleichungen der Bahnen sämtlicher Kugeln

$$\frac{a}{r} = \frac{a'}{r'} = \frac{a''}{r''} = \cdots = \cos\vartheta,$$

womit gefunden ist, dass alle Kugeln sich in geraden Linien, welche senkrecht auf der Anfangslage der Röhre stehen, bewegen; ihre Abstände von der Rotationsaxe zu einer beliebigen Zeit t bestimmen sich durch die Gleichungen

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{r'^2}{a'^2} = \frac{r''^2}{a''^2} = \frac{r'''^2}{a'''^2} = \ldots = 1 + \omega^2 t^2.$$

Clairaut, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1742, p. 48.
Daniel Bernoulli, Mém. de l'Acad. des Sciences de Berlin, 1745, p. 45.
Euler, Opuscula de motu corporum tubis mobilibus inclusorum, p. 71.
Walton, p. 476.

7. Zwei materielle Punkte von den Massen m und m' sind durch einen unausdehnbaren, über den Scheitel einer doppelt geneigten Ebene von der Masse M hinwegliegenden Faden verbunden und es kann sich dieser Körper frei auf einer glatten horizontalen Ebene bewegen. Welche Kraft muss auf den Keil wirken, damit das ganze System in einem Statium relativen Gleichgewichtes sein kann?

Hier lässt sich bequem der Keil dadurch in den Ruhezustand versetzen, dass wir an jedem seiner materiellen Punkte eine Beschleunigung φ angebracht denken, die gleich und entgegengesetzt derjenigen des Keiles ist. Bezeichnet P die verlangte Kraft, so ist für die Horizontalbewegung des Keiles

$$(M + m + m')\varphi = P.$$

Es seien α, α' die Horizontalneigungen der Keilseiten. Auf den materiellen Punkt m wirkt die Kraft mg, d. i. sein Gewicht, vertikal, die beschleunigende Kraft $m\varphi$ horizontal, folglich ist die Spannung des Fadenteiles, an welchen m geknüpft ist, gleich $m(g \sin\alpha + \varphi \cos\alpha)$. In gleicher Weise ergiebt sich für die Spannung des anderen Teiles des Fadens $m'(g \sin\alpha' - \varphi \cos\alpha')$. Durch Gleichsetzung dieser beiden Spannungen und Bestimmung von φ aus der gewonnenen Gleichung ergiebt sich

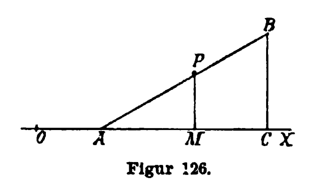
$$\varphi = \frac{m' \sin\alpha' - m \sin\alpha}{m' \cos\alpha' + m \cos\alpha} g,$$

und mithin ist die verlangte Kraft

$$P = (M + m + m') \frac{m' \sin\alpha' - m \sin\alpha}{m' \cos\alpha' + m \cos\alpha} g.$$

Routh, Dynamics, p. 153.

8. Ein schwerer Punkt P fällt auf einer glatten geneigten Ebene AB herab (Fig. 126, S. 346), welche die obere Fläche des Körpers BCA bildet, und es kann sich der Körper frei entlang einer glatten horizontalen Ebene OAX bewegen. Welches ist die Bewegung des Punktes und des Körpers, wenn beide beim Beginn der zu betrachtenden Bewegung in Ruhe sind?



Figur 126.

Es sei PM senkrecht zu OX, B der Punkt der geneigten Ebene, welchen der materielle Punkt anfangs einnimmt; A falle mit O beim Beginne der Bewegung zusammen. Ferner sei $OM = x$, $PM = y$, $OA = s$, $AB = a$, $BP = s'$, $\measuredangle BAC = \alpha$, $R =$ der Reaktion der Ebene auf den materiellen Punkt, $m =$ der Masse des schweren Punktes, $M =$ derjenigen des Körpers.

Da hier nur von translatorischer Bewegung die Rede sein kann, so haben wir für die Bewegung des Systemes die Gleichungen

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = R\cos\alpha - mg, \quad (1) \qquad m\frac{d^2 x}{dt^2} = -R\sin\alpha, \quad (2) \qquad M\frac{d^2 s}{dt^2} = R\sin\alpha, \quad (3)$$

und die geometrischen Bedingungen

$$y = (a - s')\sin\alpha, \qquad x = s + (a - s')\cos\alpha. \tag{4}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\sin\alpha\frac{d^2 s'}{dt^2}, \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} - \cos\alpha\frac{d^2 s'}{dt^2},$$

womit die Gleichungen (1) und (2) übergehen in

$$m\sin\alpha\frac{d^2 s'}{dt^2} = mg - R\cos\alpha, \quad (5) \qquad m\frac{d^2 s}{dt^2} - m\cos\alpha\frac{d^2 s'}{dt^2} = -R\sin\alpha. \quad (6)$$

Nun giebt die Addition von (3) und (6)

$$(M + m)\frac{d^2 s}{dt^2} - m\cos\alpha\frac{d^2 s'}{dt^2} = 0. \tag{7}$$

Weiter multiplizieren wir (3) mit $\cos\alpha$, (4) mit $\sin\alpha$ und addieren die Resultate, so kommt

$$M\cos\alpha\frac{d^2 s}{dt^2} + m\sin^2\alpha\frac{d^2 s'}{dt^2} = mg\sin\alpha. \tag{8}$$

Die Multiplikation von (7) mit $\sin^2\alpha$, von (8) mit $\cos\alpha$ und die Addition der resultierenden Gleichungen giebt

$$(m\sin^2\alpha + M)\frac{d^2 s}{dt^2} = mg\sin\alpha\cos\alpha. \tag{9}$$

Indem wir diese Gleichung zweimal integrieren und dabei beachten, dass zur Zeit $t = 0$, $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$, gelangen wir zu

$$s = \frac{1}{2}\frac{m\sin\alpha\cos\alpha}{m\sin^2\alpha + M}gt^2 = \frac{1}{4}\frac{m\sin 2\alpha}{m\sin^2\alpha + M}gt^2. \tag{10}$$

Ferner multiplizieren wir (8) mit $(m + M)$, (7) mit $M\cos\alpha$ und subtrahieren die letztere der resultierenden Gleichungen von der ersteren, dann wird

$$m(m\sin^2\alpha + M)\frac{d^2 s'}{dt^2} = mg\sin\alpha(m + M), \qquad \frac{d^2 s'}{dt^2} = \frac{g\sin\alpha(m + M)}{m\sin^2\alpha + M}.$$

Die doppelte Integration dieser Gleichung liefert, wenn wir dabei beachten, dass zur Zeit $t = 0$, $s' = 0$, $\frac{ds'}{dt} = 0$ ist,

$$s' = \frac{1}{2} \frac{(m + M) \sin \alpha}{m \sin^2 \alpha + M} g t^2. \tag{11}$$

Die Gleichung (10) giebt die Lage des beweglichen Körpers und (11) die Lage des materiellen Punktes auf der geneigten Ebene zu einer beliebigen Zeit t.

Der Druck R auf die Ebene geht aus den Gleichungen (3) und (9) hervor, derselbe ist

$$R = \frac{M}{\sin \alpha} \cdot \frac{d^2 s}{d t^2} = \frac{m M g \cos \alpha}{m \sin^2 \alpha + M},$$

und sonach eine konstante Grösse.

Da jetzt s und s' bekannt sind, so lässt sich nun auch mit den Gleichungen (4) die absolute Bahn des Punktes P bestimmen. Setzen wir der Einfachheit halber in den Gleichungen (10) und (11)

$$\frac{1}{4} \frac{m \sin 2\alpha}{m \sin^2 \alpha + M} = b, \qquad \frac{1}{2} \frac{(m + M) \sin \alpha}{m \sin^2 \alpha + M)} = c, \quad \text{so ist}$$

$$s = b g t^2, \qquad s' = c g t^2,$$

folglich $\quad y = (a - c g t^2) \sin \alpha, \qquad x = b g t^2 + (a - c g t^2) \cos \alpha.$

Aus diesen Gleichungen haben wir die Zeit t zu eliminieren, um die Gleichung der Bahn des Punktes P zu erhalten. Die zweite Gleichung giebt

$$t^2 = \frac{x - a \cos \alpha}{(b - c \cos \alpha) g},$$

und wenn wir diesen Wert von t^2 in die erstere substituieren, so wird

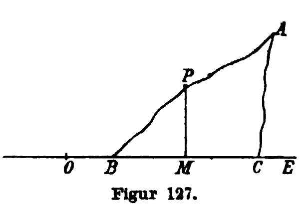
$$y = \frac{\sin \alpha}{b - c \cos \alpha} (a b - c x).$$

Dieses ist aber die Gleichung einer geraden Linie, so dass sowohl die Bahn des Punktes auf der vorgeschriebenen Fläche als auch in Wirklichkeit eine gerade Linie ist.

Johann Bernoulli, Comment. Acad. Petrop., 1730, p. 11. Opera, Tom. III, p. 365. Euler, Opuscula, de motu corporum tubis mobilibus inclusorum, p. 28. Walton, p. 480.

9. Ein materieller Punkt befindet sich in einer dünnen Röhre APB, welche mit einer ebenen, vertikalen Platte ABC fest verbunden ist. Die Basis BC dieser Platte ist eben und kann sich frei entlang einer Linie $OBCE$ auf einer glatten horizontalen Ebene bewegen. Anfangs sind der materielle Punkt und die Platte in Ruhe. Welches sind die Bewegungen des schweren Punktes und der Platte?

Es sei (Fig. 127, S. 348) A der Ort der Röhre, in welchem der



Figur 127.

materielle Punkt plaziert ist, O die Anfangslage des Punktes B der Platte, $OB = s$, Bogen AP der Röhre $= s'$, wobei P die Lage des Punktes zur Zeit t ist. $PM \perp OE$, $OM = x$, $PM = y$, $\varphi =$ der Horizontalneigung eines Elementes der Röhre bei P, $m =$ der Masse des materiellen Punktes, $M =$ derjenigen der Platte, $R =$ der Wirkung und Gegenwirkung zwischen Röhre und materiellem Punkte.

Für die Bewegung des materiellen Punktes bestehen die zwei Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -R\sin\varphi, \quad (1) \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = R\cos\varphi - mg, \qquad (2)$$

und für die Translationsbewegung der Platte haben wir

$$M\frac{d^2s}{dt^2} = R\sin\varphi. \qquad (3)$$

Die geometrischen Nebenbedingungen sind hier

$$dx = ds - \cos\varphi\, ds', \quad (4) \qquad dy = -\sin\varphi\, ds'. \qquad (5)$$

Aus (1) und (3) ergiebt sich

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + M\frac{d^2s}{dt^2} = 0,$$

welche Gleichung integriert liefert

$$m\frac{dx}{dt} + M\frac{ds}{dt} = C,$$

wo C eine willkürliche Konstante ist. Mit Hilfe von (4) geht diese Gleichung über in

$$(m+M)\frac{ds}{dt} - m\cos\varphi\frac{ds'}{dt} = C.$$

Aber zur Zeit $t = 0$ ist $\frac{ds}{dt} = 0$ und $\frac{ds'}{dt} = 0$, so dass auch $C = 0$, folglich

$$(m+M)\frac{ds}{dt} - m\cos\varphi\frac{ds'}{dt} = 0. \qquad (6)$$

Ferner erhalten wir mit (2) und (3)

$$M\cos\varphi\frac{d^2s}{dt^2} - m\sin\varphi\frac{d^2y}{dt^2} = mg\sin\varphi,$$

und daher durch (5)

$$M\cos\varphi\frac{d^2s}{dt^2} + m\sin\varphi\frac{d}{dt}\left(\sin\varphi\frac{ds'}{dt}\right) = mg\sin\varphi.$$

Aber die Differentiation der Gleichung (6) giebt

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{m}{m+M}\cdot\frac{d}{dt}\left(\cos\varphi\frac{ds'}{dt}\right),$$

so dass folglich

$$\frac{M}{m+M} \cos\varphi \frac{d}{dt}\left(\cos\varphi \frac{ds'}{dt}\right) + \sin\varphi \frac{d}{dt}\left(\sin\varphi \frac{ds'}{dt}\right) = g \sin\varphi.$$

Die Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit $2\frac{ds'}{dt}$ und die darauf folgende Integration giebt

$$\frac{M}{m+M}\left(\cos\varphi \frac{ds'}{dt}\right)^2 + \left(\sin\varphi \frac{ds'}{dt}\right)^2 = 2g\int \sin\varphi \, ds',$$

$$(m \sin^2\varphi + M)\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 = 2g(m+M)\int \sin\varphi \, ds',$$

$$\frac{ds'}{dt} = \sqrt{2g(m+M)}\left\{\frac{\int \sin\varphi \, ds'}{m \sin^2\varphi + M}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Durch diese Gleichung können wir, wenn die Gestalt der Röhre und daher die Relation zwischen φ und s' bekannt ist, eine Gleichung zwischen s' und t erhalten.

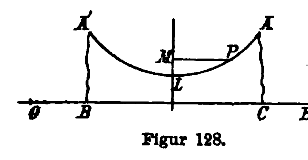
Mit Hilfe von (6) und (7) gelangen wir noch zu einer Gleichung zwischen s und t, dieselbe ist

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{m+M}}\, m \cos\varphi \left\{\frac{\int \sin\varphi \, ds'}{m \sin^2\varphi + M}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Das Integral $\int \sin\varphi \, ds'$, welches in diesen Formeln vorkommt, muss offenbar so genommen werden, dass es verschwindet, wenn $s' = 0$ ist.

Clairaut, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1742, p. 41.
Euler, Opuscula, de motu corporum tubis mobilibus inclusorum, p. 48.

10. Eine glatte Rinne ALA' (Fig. 128) befindet sich in der oberen Fläche einer vertikalen Platte $ACBA'$, welche sich auf eine glatte horizontale Ebene stützt, und kann die Platte auf dieser Ebene frei gleiten. Wie muss die Gestalt der Rinne beschaffen sein, damit ein materieller Punkt in ihr tautochron schwingen kann, wenn die Zeit einer Oscillation gegeben ist?



Figur 128.

Es sei L der tiefste Punkt der Rinne, LM eine vertikale Linie durch L, welche die horizontale Linie PM durch den Ort P des materiellen Punktes P zu einer beliebigen Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung an, in M trifft, $PM = x'$, $ML = y'$, Bogen $LP = s'$.

Durch die Gleichung (7) des vorhergehenden Problemes erhalten wir, wenn wir $-ds'$ an Stelle von ds' setzen und im Übrigen die dortigen Bezeichnungen beibehalten,

$$\frac{ds'}{dt} = -\sqrt{2g(m+M)}\left\{\frac{-\int \sin\varphi\, ds'}{m \sin^2\varphi + M}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Aber es ist $-\int \sin\varphi\, ds' = k - y'$, wo k den Anfangswert von y' bezeichnet, folglich

$$\frac{ds'}{dt} = -\sqrt{2g(m+M)}\left\{\frac{k-y'}{m\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2 + M}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

und daher, wenn τ die Zeit einer halben Schwingung bezeichnet,

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{2g(m+M)}}\int_k^0 \frac{\frac{ds'}{dy'}}{\sqrt{k-y'}}\sqrt{m\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2 + M}\, dy'. \tag{1}$$

Diese Grösse muss infolge der Bedingung der Aufgabe von k unabhängig sein. Es muss deshalb

$$\int \frac{\frac{ds'}{dy'}}{\sqrt{k-y'}}\sqrt{m\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2 + M}\, dy'$$

von der nullten Dimension in y' und k sein, daher muss

$$\frac{\frac{ds'}{dy'}}{\sqrt{k'-y'}}\sqrt{m\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2 + M}$$

von der -1ten Dimension in k und y' sein. Aber es ist klar, dass

$$\frac{ds'}{dy'}\sqrt{m\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2 + M}$$

k nicht enthält, folglich muss dieser Ausdruck von der $-\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ Dimension in y' sein und mithin, wenn α eine gewisse konstante Grösse bezeichnet,

$$\frac{ds'}{dy'}\sqrt{m\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2 + M} = \frac{\alpha}{\sqrt{y'}}. \tag{2}$$

$$m + M\left(\frac{ds'}{dy'}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{y'}, \quad M\left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2 = \frac{\alpha^2 - (m+M)y'}{y'}$$

$$\frac{dx'}{dy'} = \sqrt{\frac{m+M}{M}}\cdot\sqrt{\frac{2a-y'}{y'}},$$

wo $2a = \frac{\alpha^2}{m+M}$ gesetzt wurde. Durch Integration erhalten wir jetzt als Gleichung der Curve

$$x' = \sqrt{\frac{m+M}{M}}\left\{\sqrt{2ay'-y'^2} + a\, arc\left(\cos = \frac{a-y'}{a}\right)\right\}. \tag{3}$$

Die gesuchte Curve ist sonach eine verlängerte Cycloide, welche mit der

gemeinen Cycloide konstruiert werden kann, da der Abstand eines jeden Curvenpunktes von der Axe in dem Verhältnisse $\sqrt{m+M}:\sqrt{M}$ wächst.

Weiter erhalten wir durch (1) und (2)

$$\tau = -\frac{\alpha}{\sqrt{2g(m+M)}}\int_k^0 \frac{dy'}{\sqrt{ky'-y'^2}} = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2g(m+M)}},$$

womit sich ergiebt

$$\alpha^2 = \frac{2g\tau^2}{\pi^2}(m+M),$$

und daher ist

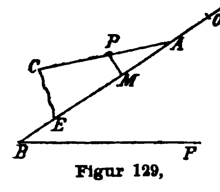
$$2a = \frac{\alpha^2}{m+M} = \frac{2g\tau^2}{\pi^2}, \qquad a = \frac{g\tau^2}{\pi^2}.$$

Mithin kann die Gleichung (3) geschrieben werden

$$x' = \sqrt{\frac{m+M}{M}}\left\{\sqrt{\frac{2g\tau^2}{\pi^2}y' - y'^2} + \frac{g\tau^2}{\pi^2}\,arc\left(cos = \frac{g\tau^2 - \pi^2 y'}{g\tau^2}\right)\right\}.$$

Euler, Opuscula, de motu corporum tubis mobilibus inclusorum, p. 51. Walton, p. 484.

11. Ein materieller Punkt P (Fig. 129) fällt auf einer glatten, geneigten Ebene CA herab, welche von der oberen Fläche einer dünnen vertikalen Platte CAE gebildet wird. Die Platte berührt mit ihrer ganzen tieferen Fläche eine geneigte Ebene $OAEB$ und kann auf derselben frei herabgleiten. Wie ist die Bewegung des materiellen Punktes und diejenige der Platte, sowie der Druck des materiellen Punktes auf die Platte beschaffen, wenn beim Beginne der Bewegung die Geschwindigkeiten des materiellen Punktes und der Platte gleich Null sind?



Figur 129.

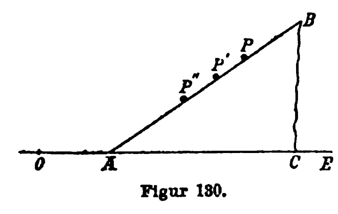
Es sei C die Anfangslage des materiellen Punktes auf der Platte, O diejenige des Punktes A der Lamina, $\measuredangle BAC = \alpha$, BF horizontal, $\measuredangle OBF = \beta$, $OA = s$, $CP = s'$, $R =$ dem verlangten Drucke, $m =$ der Masse des materiellen Punktes, $M =$ derjenigen der Platte, $t =$ der vom Beginn der Bewegung an gerechneten Zeit. Damit wird gefunden werden

$$s = \frac{1}{2}\cdot\frac{(m+M)\sin\beta + m\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{m\sin^2\alpha + M}gt^2, \qquad s' = \frac{1}{2}\cdot\frac{(m+M)\sin\alpha\cos\beta}{m\sin^2\alpha + M}gt^2,$$

$$R = \frac{mMg\cos\alpha\cos\beta}{m\sin^2\alpha + M}.$$

Euler, ibid. p. 35.

12. Eine beliebige Zahl materieller Punkte $P, P', P'', P''', \ldots$ (Fig. 130) kommt auf einer glatten geneigten Ebene BA herunter, welche von der oberen Fläche einer dünnen vertikalen Platte BAC gebildet wird. Die Platte kann frei entlang einer glatten horizontalen Ebene OE gleiten, mit welcher ihre ganze untere glatte Fläche in Berührung ist. Wie ist die Bewegung der materiellen Punkte und diejenige der Platte und der Druck, den jeder materielle Punkt auf die Platte ausübt, beschaffen?



Figur 130.

Es seien $R, R', R'', R''', \ldots$ die Pressungen, $m, m', m'', m''', \ldots$ die Massen der materiellen Punkte $P, P', P'', P''', \ldots$ Ferner sei O ein fester Punkt in der Linie $OACE$, B ein solcher auf der geneigten

Ebene AB, $BP = s$, $BP' = s'$, $BP'' = s''$, ..., $OA = S$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $M =$ der Masse der Platte.

Mit Hinweis auf die Aufgabe 8 werden die Resultate gefunden

$$S = \frac{1}{2}\frac{(m+m'+m''+m'''+\cdots)\sin\alpha\cos\alpha}{M+(m+m'+m''+m'''+\cdots)\sin^2\alpha}\,g t^2 + A t + B,$$

$$s = \frac{1}{2}\frac{\{M+\Sigma(m)\}\sin\alpha}{M+\sin^2\alpha\,.\,\Sigma(m)}\,g t^2 + a t + b, \qquad s' = \frac{1}{2}\frac{\{M+\Sigma(m)\}\sin\alpha}{M+\sin^2\alpha\,.\,\Sigma(m)}\,g t^2 + a' t + b'$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\frac{R}{m} = \frac{R'}{m'} = \frac{R''}{m''} = \frac{R'''}{m'''} = \ldots = \frac{M g \cos\alpha}{M+\sin^2\alpha\,.\,\Sigma(m)}.$$

Die Grössen $A, B, a, b, a', b', a'', b''$.... sind willkürliche Konstante, welche mit Hilfe des Anfangszustandes der Bewegung bestimmt werden müssen.

Euler, ibid., p. 40.

13. Wenn eine Kette von beträchtlicher Länge von der Spitze eines Turmes so herabhängt, dass ihr tieferes Ende die Erde berührt, und dann fallen gelassen wird, zu finden die Geschwindigkeit in einem beliebigen Zeitmomente.

Es sei x die Länge, v die Geschwindigkeit des Teiles der Kette, welcher zu einer beliebigen Zeit in Bewegung ist, $a =$ dem Anfangswerte von x und $r =$ dem Halbmesser der Erde, dann wird gefunden werden

$$v^2 = 2 g r l \frac{a+r}{x+r}.$$

14. Ein dünner hohler Ring mit vertikaler Ebene enthält eine Perle und befindet sich auf einer glatten horizontalen Ebene. Wie gross ist die Schwingungsperiode der Perle, wenn sie anfangs nahe an dem tiefsten Punkte des Ringes liegt?

Wenn a den Halbmesser des Ringes, μ seine Masse und m diejenige der Perle bezeichnet, so wird sie mit einem mathematischen Pendel isochron schwingen, dessen Länge gleich $\dfrac{\mu a}{m+\mu}$ ist.

Mackenzie and Walton, Solutions of the Cambridge Promblems for 1854.

15. Die höheren Enden A, B zweier gleicher, gleichförmiger Stäbe AC, BC sind mittelst kleiner Ringe entlang einem festen, horizontalen Stab beweglich; ihre tieferen Enden sind bei C durch ein kleines Charnier verbunden. Annehmend C befinde sich anfangs mit dem festen horizontalen Stabe in Berührung, zu finden die Pressungen auf den horizontalen Stab und den Druck auf das Charnier für eine beliebige Lage der Stäbe während ihres Niedersinkens.

Es sei ϑ die Neigung eines der Stäbe gegen die Vertikale zu einer beliebigen Zeit, G das Gewicht eines jeden Stabes, dann ist der Druck eines jeden Ringes auf den horizontalen Stab gleich

$$\frac{1}{8}G(11 + 9\cos 2\vartheta),$$

und derjenige auf das Charnier gleich

$$\frac{9}{8}G\sin 2\vartheta.$$

16. Zwei solide Cylinder fallen aus der Ruhe direkt auf den Flächen zweier glatter, geneigter Ebenen herab. Über den gemeinsamen Gipfel der beiden Ebenen läuft ein dünner, unelastischer Faden, welcher unter jedem Cylinder hinweggehend rund um den centralen Querschnitt eines jeden der Cylinder gewunden und daselbst mit seinen Enden befestigt ist. Zu finden die Spannung des Fadens und zu bestimmen, um wie viel der Faden entlang der Ebene am Ende einer beliebigen Zeit t gegleitet ist.

Bezeichnen G_1, G_2 die Gewichte der Cylinder, α_1, α_2 die Neigungen der Ebenen resp., so ist die verlangte Spannung gleich

$$\frac{1}{3} G_1 \cdot G_2 \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{G_1 + G_2},$$

und der Weg, welchen der Faden gleitend am Ende der Zeit t zurückgelegt hat,

$$\frac{1}{2} \frac{G_1 \sin \alpha_1 - G_2 \sin \alpha_2}{G_1 + G_2} g t^2.$$

17. Eine kreisförmige Röhre liegt auf einer glatten, horizontalen Ebene. Eine in die Röhre eingeschlossene Kugel, welche einen Durchmesser gleich demjenigen eines Querschnittes der Röhre besitzt, wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit entlang der Röhre geworfen. Zu bestimmen die Bewegung der Röhre und der Kugel, sowie die Grösse des horizontalen Druckes zu finden, welcher durch die Kugel auf die Röhre ausgeübt wird.

Es sei a der Radius der Röhrenaxe, m die Masse der Kugel, m' diejenige der Röhre, v die Wurfgeschwindigkeit der Kugel. Der Schwerpunkt der Kugel und Röhre wird sich mit einer zu der Wurfrichtung der Kugel parallelen Geschwindigkeit bewegen, welche gleich ist

$$\frac{m v}{m + m'}.$$

Der Mittelpunkt der Kugel dreht sich um den genannten Schwerpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit $\frac{v}{a}$, und die verlangte Horizontalpressung ist gleich

$$\frac{m m'}{a (m + m')} v^2.$$

Johann Bernoulli sagt in einem Briefe an Euler über den Gegenstand der Bewegung der Kugel und Röhre: „Quod attinet ad problema hoc, miror te tam magnifice de eo sentire, ut illud vocare audeas argumentum prorsus novum et adhuc intactum, cum tamen nihil aliud sit quam casus particularis theorematis tritissimi de corpore vel systemata corporum plurium gyrando progrediente super plano horizontali, ubi id semper obtinetur ut commune centrum gravitatis totius systematis progrediatur in linea recta et quidem velocitate uniformi, dum interim reliqua puncta systematis describunt singula aliquam ex cycloidibus sive ordinariam sive protractam seu contractam. Haec te monere volui, Vir Celeb., ne te praecipites protrudendo in publicum magna pompa rem quandam leviculam, quae ansam daret inimicis tuis (nam et tu tales habes, praesertim inter scurras Anglicanos qui omnes extraneos odio prosequuntur) carpendi indiscriminatim omnia tua elegantissima inventa, atque hac occasione imprimis in te torquendi Ciceronis proverbium Laureolam in mustaceo querere". [Correspondance Mathématique et Physique de quelques célèbres Géomètres du XVIIIème Siècle par P. H. Fuss, Tome II, p. 84.]

11—17. Walton, p. 486—490.

Zweite Abteilung.

Bewegung mit Berücksichtigung der Reibungswiderstände. Die sich berührenden Flächen sind rauh.

Erster Abschnitt.

Bewegung eines einzelnen Körpers.

1. Ein homogener, starrer Kreiscylinder bewegt sich auf einer vollkommen rauhen, geneigten Ebene infolge der Wirkung der Schwerkraft und bleibt dabei seine Axe stets horizontal. Welches ist die Bewegung des Cylinders und der Reibungswiderstand zu einer beliebigen Zeit während seines Herabsinkens?

Es sei (Fig. 131) S der Schwerpunkt des Cylinders in einem beliebigen Momente seines Herabrollens, OA die Bahn des Berührungspunktes H des Kreisschnittes durch S während der Zeit t herunter die geneigte Ebene, $OH = x$, $\alpha =$ der Horizontalneigung von OA, $\vartheta =$ dem ganzen Winkel, durch welchen sich der Cylinder um seine Axe in der Zeit t auf dem Wege des Berührungspunktes H von O bis H dreht, $a =$ dem Halbmesser des Cylinders, $k =$ seinem Trägheitsradius um seine Axe, $F =$ dem Reibungswiderstande zwischen Cylinder und Ebene, welcher, weil die beiden sich berührenden Flächen vollkommen rauh gedacht sind, als genügend angesehen wird, um ein Gleiten des Cylinders zu verhindern, $M =$ der Masse des Cylinders.

Figur 131.

Die an dem Cylinder wirkenden Kräfte sind sein Gewicht und der Widerstand der Reibung, so dass, wenn wir ihre Componenten parallel und senkrecht zur Falllinie bilden, für die translatorische Bewegung des Cylinders parallel zu der schiefen Ebene die Bedingung erfüllt sein muss

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F, \tag{1}$$

und für die Rotation des Cylinders um seine Axe haben wir die Gleichung

$$Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Fa. \tag{2}$$

Da nun der Reibungswiderstand so gross gedacht ist, dass nur ein vollkommenes Rollen des Cylinders stattfinden kann, so muss offenbar $x = a\vartheta$ sein, wodurch die Gleichung (2) übergeht in

$$Mk^2\frac{d^2x}{dt^2} = Fa^2, \tag{3}$$

folglich bekommen wir durch (1) und (3)

$$Ma^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = Ma^2 g \sin\alpha - Mk^2 \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$(a^2 + k^2) \frac{d^2 x}{dt^2} = a^2 g \sin\alpha,$$

oder, weil im vorliegenden Falle $k^2 = \frac{1}{2} a^2$ ist,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2}{3} g \sin\alpha.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} g t \sin\alpha + C, \qquad x = \frac{1}{3} g t^2 \sin\alpha + Ct + D.$$

Nehmen wir nun an, dass zur Zeit $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $x = 0$, dann sind die Integrationskonstanten gleich Null, und die Bewegung des Cylinders ist vollständig durch die Gleichungen gegeben

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} g t \sin\alpha, \qquad x = \frac{1}{3} g t^2 \sin\alpha, \qquad \vartheta = \frac{x}{a} = \frac{g t^2}{3a} \sin\alpha. \qquad (4)$$

Die Bewegung des Cylinders herab die geneigte Ebene ist mithin eine gleichförmig beschleunigte.

Nun ergiebt sich aus den Gleichungen (2) und (4) für die Grösse des Reibungswiderstandes

$$F = \frac{Mk^2}{a} \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \frac{2 Mg k^2 \sin\alpha}{3a^2} = \frac{1}{3} Mg \sin\alpha.$$

Ist $\mu =$ dem Coëfficienten der gleitenden Reibung, dann ist $F = \mu Mg \cos\alpha$. Der Cylinder wird demnach nur dann vollständig rollen, wenn

$$\mu Mg \cos\alpha > \frac{2 Mg k^2 \sin\alpha}{3a^2} > \frac{1}{3} Mg \sin\alpha,$$

oder

$$tg\,\alpha < \frac{1}{3}\mu,$$

ist. Wird dieser Bedingung nicht genügt, so bewegt sich der Körper teils rollend, teils gleitend.

Walton, p. 491.

2. Eine homogene Kugel rollt direkt auf einer vollkommen rauhen, geneigten Ebene unter der Wirkung der Schwerkraft herunter. Welches ist die Bewegung?

Es sei α die Horizontalneigung der Ebene, a der Radius der Kugel, Mk^2 ihr Trägheitsmoment um einen horizontalen Durchmesser, O der Berührungspunkt zwischen Kugel und Ebene beim Beginn der Bewegung zur Zeit $t = 0$, H der Berührungspunkt zur Zeit t (Fig. 131, S. 354).

Den Punkt O wählen wir als Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, die Falllinie OH als Axe der x.

Die hier thätigen Kräfte sind das im Mittelpunkte S der Kugel vertikal abwärts wirkende Gewicht derselben, die Reaktion R der Ebene, in H rechtwinkelig zu OH wirkend, und der in H entlang HO arbeitende Reibungswiderstand F. Die Effektivkräfte sind $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$, wirkend in S parallel zu den Coordinatenaxen und ein Paar $Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$, welches bestrebt ist, die Kugel um C in der Richtung HB zu drehen. Hier ist ϑ der Winkel, welchen irgend eine feste, gerade Linie in dem Körper mit irgend einer festen, geraden Linie im Raume während der Bewegung macht. Die feste, gerade Linie in dem Körper sei der Radius SB, dessen Endpunkt B ursprünglich mit O zusammenfällt, die feste Gerade im Raume die Normale zu der geneigten Ebene, dann ist ϑ der Winkel, durch welchen sich die Kugel um ihren Mittelpunkt in der Zeit t gedreht hat.

Damit sind hier die Bewegungsgleichungen des Kugelmittelpunktes

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F, \quad (1) \qquad M\frac{d^2y}{dt^2} = -Mg\cos\alpha + R, \quad (2)$$

und wenn wir Momente um H, zur Vermeidung der Reaktion, nehmen, so ist für die Rotation der Kugel

$$Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Mga\sin\alpha - Ma\frac{d^2x}{dt^2}, \text{ oder } k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = ga\sin\alpha - a\frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3)$$

Hierzu kommen noch zwei geometrische Nebenbedingungen. Weil die Kugel bei H nicht gleiten kann, so ist

$$x = a\vartheta, \quad (4)$$

und weil dieselbe sich nicht hüpfend bewegen kann, so ist

$$y = a. \quad (5)$$

Die Differentiation der Gleichungen (4) und (5) giebt

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{d\vartheta}{dt}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{d^2\vartheta}{dt^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Durch die Einführung des hier sich ergebenden Wertes von $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ in die Gleichung (3) erhalten wir

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2}{a}\frac{d^2x}{dt^2} = ga\sin\alpha, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a^2}{a^2+k^2}g\sin\alpha, \quad (6')$$

oder, weil $k^2 = \frac{2}{5}a^2$ ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{5}{7}g\sin\alpha. \quad (6)$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{7} g \sin\alpha\, t + C, \qquad x = \frac{5}{14} g \sin\alpha\, t^2 + Ct + D.$$

Ist nun zur Zeit $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $x = 0$, dann sind die Werte der Integrationskonstanten $C = 0$, $D = 0$, daher

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{5}{7} g \sin\alpha\, t, \qquad x = \frac{5}{14} g \sin\alpha\, t^2, \tag{7}$$

d. h. der Schwerpunkt S der Kugel bewegt sich in der Richtung der Falllinie mit einer gleichförmig beschleunigten Geschwindigkeit.

Mit Rücksicht darauf, dass $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, bekommen wir mit (2)

$$0 = -Mg\cos\alpha + R,$$

d. h. der Schwerpunkt der Kugel besitzt in normaler Richtung zur schiefen Ebene keine Bewegung und ihr Druck auf die Ebene ist

$$R = Mg\cos\alpha. \tag{8}$$

Die Verbindung der Gleichungen (6) und (1) giebt

$$\frac{5}{7} Mg\sin\alpha = Mg\sin\alpha - F, \qquad \text{oder} \qquad F = \frac{2}{7} Mg\sin\alpha, \tag{9}$$

womit der Reibungswiderstand bestimmt ist, welcher sich hier, wie bei der Bewegung eines Cylinders unter den gleichen Umständen, als konstant herausstellt.

Würde sich die Kugel auf einer glatten Ebene gleitend bewegen, dann würden wir als Bewegungsgleichung haben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\sin\alpha,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = g\sin\alpha\, t, \qquad x = \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t^2,$$

wenn die Bewegung vom Ruhezustande aus beginnt. Dadurch zeigt es sich, dass zwei $\frac{2}{7}$ der Bewegungscomponente der Schwerkraft gebraucht werden, um die Kugel zu drehen, und $\frac{5}{7}$ derselben die Bewegung herab die Ebene bewirken.

Es ist gebräuchlich, die Substitution des Wertes von k^2 in die Gleichungen bis zum Ende der Untersuchung zu verschieben, denn dieser Wert ist oft sehr zusammengesetzt, wir haben jedoch hier einen anderen Vorteil. Sie dient als eine Bewahrheitung der Zeichen in unseren Grundgleichungen, denn wenn die Gleichung (6′) gewesen wäre

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a^2}{a^2 - k^2} g\sin\alpha,$$

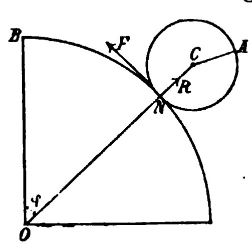
hätten wir eines Irrtums in der Lösung gewärtig sein müssen. Es ist klar, dass die Acceleration nicht unendlich gross durch irgend eine Alteration der anfänglichen Beschaffenheit der Kugel gemacht werden kann.

Routh, Rigid Dynamics, p. 109.

3. Eine homogene Kugel rollt auf einer anderen, vollkommen rauhen, festen Kugel herab. Welches ist die Bewegung?

Der Mittelpunkt der unterstützten Kugel bewegt sich offenbar in derjenigen vertikalen Ebene, welche durch den Mittelpunkt der festen und den Ort des Mittelpunktes der beweglichen Kugel für die Anfanglage geht.

Es sei C die Lage des Mittelpunktes der beweglichen Kugel zu einer beliebigen Zeit t, a ihr Halbmesser, O der Mittelpunkt der festen Kugel, b ihr Halbmesser, OB (Fig. 132) der vertikale Halbmesser der festen Kugel, OC die Centrale der sich berührenden Kugelkreise, $\varphi = \sphericalangle BOC$, $F =$ dem Reibungswiderstande im Berührungspunkte N beider Kugeln, R die Normalreaktion daselbst, $M =$ der Masse der Kugel C.



Figur 132.

Durch Zerlegung der an der Kugel C wirkenden Kräfte in tangentialer und normaler Richtung zur Bahn von C gelangen wir zu den Bewegungsgleichungen

$$(a+b)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g \sin\varphi - \frac{F}{M}, \quad (1) \qquad (a+b)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = g\cos\varphi - \frac{R}{M}. \quad (2)$$

Ist A der Punkt der beweglichen Kugel, welche ursprünglich mit dem Punkte B, von wo aus die Bewegung beginnen soll, zusammenfiel, und ϑ der Winkel, welchen die gerade Linie CA mit der vertikalen macht, so erhalten wir ferner, Momente um C nehmend,

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{Fa}{Mk^2}. \tag{3}$$

Wir haben nun zu beachten, dass ϑ nicht gleich dem $\sphericalangle ACO$ genommen werden kann, weil, wenn wir CA als fest in dem Körper ansehen, die Gerade CO nicht fest im Raume ist, sondern wir bekommen die geometrische Bedingung

$$a(\vartheta - \varphi) = b\varphi. \tag{4}$$

Zu diesen 4 Gleichungen tritt keine weitere Bedingung hinzu, denn die Unveränderlichkeit der Entfernung der Punkte O und C ist schon in den Gleichungen (1) und (2) enthalten.

Die Differentiation der Gleichung (4) giebt

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{a+b}{a}\frac{d\varphi}{dt}, \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{a+b}{a}\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Mit diesem Werte von $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ geht die Gleichung (3) über in

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{F}{M k^2}, \tag{5}$$

und sonach wird mit (1) und (5)

$$\frac{F a^2}{M k^2} = g \sin\varphi - \frac{F}{M}, \qquad F \cdot \frac{a^2 + k^2}{k^2} = M g \sin\varphi,$$

$$F = \frac{k^2}{a^2 + k^2} M g \sin\varphi = \frac{2}{7} M g \sin\varphi. \tag{6}$$

Diesen Wert des Reibungswiderstandes in (1) substituiert, giebt

$$(a+b)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g \sin\varphi - \frac{2}{7} g \sin\varphi = \frac{5}{7} g \sin\varphi.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $2\frac{d\varphi}{dt}$ und integrieren, so kommt

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C - \frac{10}{7}\frac{g}{a+b}\cos\varphi.$$

Mit $t = 0$ ist auch $\varphi = 0$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, daher $C = \frac{10}{7}\frac{g}{a+b}$, und folglich

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{a+b}(1 - \cos\varphi), \tag{7}$$

womit die Winkelgeschwindigkeit der Centralen OC um O bestimmt ist.

Zu demselben Resultate hätten wir auch mit Hilfe des Prinzipes der Erhaltung der lebendigen Kraft gelangen können. Die lebendige Kraft der Kugel C ist $M\left\{v^2 + k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\}$, wobei $v = (a+b)\frac{d\varphi}{dt}$. Als Kräftefunktion haben wir $M\int g\,dy = Mgy$, wobei y den vom Mittelpunkte C der Kugel in der Zeit t zurückgelegten vertikalen Weg bezeichnet, welcher gleich $(a+b)(1-\cos\varphi)$ ist, so dass

$$M\left\{(a+b)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} = 2Mg(a+b)(1-\cos\varphi),$$

$$(a+b)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2g(a+b)(1-\cos\varphi),$$

$$\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a+b}(1-\cos\varphi),$$

$$\frac{a^2+k^2}{a^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{7}{5}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a+b}(1-\cos\varphi),$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{a+b}(1-\cos\varphi).$$

Den Druck R in dem Berührungspunkte N beider Kugeln finden wir durch die Verbindung der Gleichungen (2) und (7), was giebt

$$(a+b)\frac{10}{7}\frac{g}{a+b}(1-\cos\varphi)=g\cos\varphi-\frac{R}{M},$$

$$R=Mg\left\{\cos\varphi-\frac{10}{7}(1-\cos\varphi)\right\}, \quad \therefore R=\frac{Mg}{7}(17\cos\varphi-10). \quad (8)$$

An derjenigen Stelle, wo die Kugel die feste Unterlage verlässt, ist der Druck $R=0$, daher haben wir für diesen Ort die Bedingung

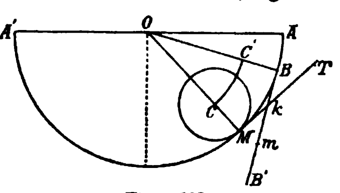
$$0=17\cos\varphi-10, \quad \therefore \cos\varphi=\frac{10}{17},$$

ein von den beiden Halbmessern der Kugeln unabhängiges Resultat, so dass der Winkel des Fahrstrahles für den Punkt, wo beide Kugeln sich trennen, bei Kugeln jeder Grösse derselbe ist.

Routh, Dynamics, p. 111.

4. Eine homogene Kugel bewegt sich auf der inneren Fläche einer vollkommen rauhen Kugelschale, der Mittelpunkt der Kugel bleibt stets in derselben vertikalen Ebene, welche auch den Mittelpunkt der Schale enthält, und es ist zur Zeit $t=0$ die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel gleich Null. Welches ist die Bewegung dieser Kugel, wenn nur die Schwerkraft wirkt?

Es sei ABA' (Fig. 133) ein Vertikalschnitt der Schale durch ihren Mittelpunkt O, hervorgebracht durch die Ebene, welche den Mittelpunkt C der Kugel stets enthält, OA ein horizontaler Halbmesser der Schale, M der Berührungspunkt zwischen Kugel und Schale zur Zeit t, B die Anfangslage von M. Ziehe die Halbmesser OB, OCM und lasse CC' den von dem Schwerpunkte C der Kugel in der Zeit t beschriebenen Kreisbogen sein. Nehme $\sphericalangle AOM=\vartheta$, $\sphericalangle AOB=\alpha$, $C'C=s$, $a=$ dem Radius der Kugel, $r=$ dem Halbmesser der Schale, $\varphi=$ dem Winkel, welchen die Kugel um ihren Schwerpunkt während ihrer Bewegung von B bis M beschrieben hat, $M=$ der Masse der Kugel, $F=$ dem Reibungswiderstand zwischen Kugel und Schale im Punkte M, welcher so gross gedacht ist, dass nur eine rollende Bewegung der Kugel vorhanden sein kann.



Figur 133.

Für die Bewegung des Schwerpunktes der Kugel, welche nicht alteriert wird durch die Annahme, dass alle äusseren Kräfte in C nach ihrer wirklichen Richtung thätig sind, besteht nun die Gleichung

$$M\frac{d^2s}{dt^2}=-F+Mg\cos\vartheta, \quad (1)$$

und für die Bewegung der Kugel um ihren Schwerpunkt

$$M k^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = F a. \tag{2}$$

Von den Punkten B und M ziehe zwei unbegrenzte, gerade Linien BkB' und MkT tangential an den Vertikalschnitt der Kugelschale; entlang BB' messe eine Länge Bm gleich der Länge des Kreisbogens BM ab, dann denke die Kugel rolle aus B entlang der Strecke Bm; hierauf sei Bm auf BM gedreht, so dass diese Linie allmählich mit dem Bogen BM zusammenfällt, alsdann ist mB', sobald als m mit M zusammentrifft, eine gemeinschaftliche Tangente an den Kreis AMA' und die Kugel. Dadurch ist es offenbar, dass sich die Kugel um ihren Mittelpunkt durch denselben Winkel gedreht haben wird, wenn sie auf dem Bogen BM herunter rollt, durch welchen sie sich drehen würde herunter die Gerade Bm. Nun würde sich die Kugel, wenn sie entlang Bm rollte, um ihren Mittelpunkt durch einen Winkel $\frac{Bm}{a} = \frac{BM}{a} = \frac{r}{a}(\vartheta - \alpha)$ drehen, und durch Übertragung von m auf M würde sie sich durch einen Winkel gleich dem Winkel $B'kM = \measuredangle BOM = \vartheta - \alpha$ in entgegengesetzter Richtung drehen. Folglich sehen wir, dass der ganze wirkliche Winkel, durch welchen sich die Kugel um ihren Mittelpunkt während ihrer wirklichen Bewegung von B bis M dreht, gleich ist $\frac{r-a}{a}(\vartheta-\alpha) = \varphi$. Mithin erhalten wir, für φ diesen Wert in die Gleichung (2) substituierend,

$$\frac{M k^2}{a}(r-a)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = F a. \tag{3}$$

Ferner zeigt die Geometrie, dass

$$s = (r-a)(\vartheta - \alpha), \tag{4}$$

wodurch die Gleichung (1) übergeht in

$$M(r-a)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -F + M g \cos\vartheta. \tag{5}$$

Indem wir jetzt F zwischen (3) und (4) eliminieren, bekommen wir

$$M(r-a)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + M\frac{k^2}{a^2}(r-a)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M g \cos\vartheta,$$

$$\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)(r-a)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = g \cos\vartheta,$$

oder, weil im vorliegenden Falle $k^2 = \frac{2}{5}a^2$ ist,

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{5}{7}\cdot\frac{g\cos\vartheta}{r-a}. \tag{6}$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $2\frac{d\vartheta}{dt}$ und integrieren hierauf, so folgt

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C + \frac{10}{7}\frac{g\sin\vartheta}{r-a}.$$

Mit $\vartheta = \alpha$ ist $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, daher $C = -\frac{10}{7}\frac{g\sin\alpha}{r-a}$, und mithin

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{10}{7}g\cdot\frac{\sin\vartheta - \sin\alpha}{r-a},$$

so dass

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{10}{7}g(r-a)(\sin\vartheta - \sin\alpha).$$

Bezeichnet s' die Länge des Bogens BM, dann ist

$$\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 = r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{10}{7}r^2 g\frac{\sin\vartheta - \sin\alpha}{r-a},$$

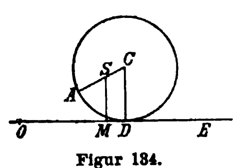
womit die Geschwindigkeit des Berührungspunktes M bestimmt ist.

Die Grösse des Reibungswiderstandes folgt aus den Gleichungen (3) und (5), es ist

$$F = \frac{Mk^2}{a^2}(r-a)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{5}{7}Mg\frac{k^2}{a^2}\cos\vartheta = \frac{2}{7}Mg\cos\vartheta.$$

Walton, p. 492.

5. Eine heterogene Kugel rollt auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene, ihre rotierende Bewegung findet stets um eine Momentanaxe statt, welche senkrecht zu der vertikalen Ebene durch ihren geometrischen Mittelpunkt und ihren Schwerpunkt ist. Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit der Kugel für einen beliebigen Ort in ihrer Bahn?



Figur 134.

Es sei (Fig. 134) C der geometrische Mittelpunkt, S der Schwerpunkt der Kugel zu der Zeit t, D der Berührungspunkt des Vertikalschnittes der Kugel durch C und S mit der horizontalen Ebene, ODE der geradlinige Ort der Berührungspunkte, CSA der Kugelhalbmesser durch S, die Linie CD, sowie die Gerade SM senkrecht auf der Ebene, F die Grösse des Reibungswiderstandes der Ebene in der Richtung MO, R die vertikale Reaktion der Ebene, $M =$ der Masse der Kugel, $k =$ ihrem Trägheitshalbmesser für eine durch S gehende, zu dem C und S enthaltenden Vertikalschnitte senkrechte Axe, $OM = x$, $SM = y$, $CD = CA = a$, $\sphericalangle ASM = \sphericalangle ACD = \varphi$, $CS = c$.

Die Gleichungen der translatorischen Bewegung des Schwerpunktes S der Kugel sind

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -F, \quad (1) \qquad M\frac{d^2y}{dt^2} = R - Mg, \quad (2)$$

und für die rotatorische Bewegung um den Schwerpunkt haben wir die Bedingung

$$Mk^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Fy - Rc \sin\varphi. \tag{3}$$

Da nun nur ein Rollen der Kugel stattfinden soll, so ist durch die Geometrie, wenn b den Wert von x für $\varphi = 0$ bezeichnet,

$$x + c \sin\varphi = b + a\varphi,$$

womit wir bekommen

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{d\varphi}{dt} - c\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = (a - c\cos\varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Ferner giebt uns die Geometrie die Relation

$$y = a - c\cos\varphi,$$

so dass

$$\frac{dy}{dt} = c\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = c\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Die Einführung dieser Werte in die Gleichungen (1) und (2) giebt

$$F = -M\left\{(a - c\cos\varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\},$$

$$R = M\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + g\right\} = M\left\{c\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\right\},$$

und wenn diese Resultate in die Gleichung (3) substituiert werden, so folgt

$$k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left\{(a - c\cos\varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}(a - c\cos\varphi)$$
$$- c\sin\varphi\left\{c\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\right\},$$

welche Gleichung in vereinfachter Gestalt lautet

$$(a^2 + k^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + ac\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -cg\sin\varphi.$$

Multiplizieren wir mit $2\frac{d\varphi}{dt}$ und integrieren, so kommt

$$(a^2 + k^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C + 2cg\cos\varphi.$$

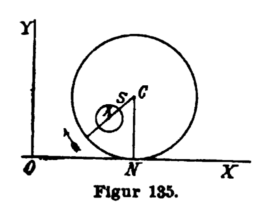
Ist $t = 0$, wenn $\varphi = 0$, und ω die anfängliche Winkelgeschwindigkeit um S, so wird

$$(a^2 + k^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left\{(a - c)^2 + k^2\right\}\omega^2 - 2cg(1 - \cos\varphi),$$

womit die Winkelgeschwindigkeit um S zu einer beliebigen Zeit t als Funktion des ganzen beschriebenen Winkels bestimmt ist.

Euler, Nova Acta Acad. Petrop. 1783, p. 119. Walton, p. 494.

6. Eine Kugel besitzt eine sphärische, mit Wasser gefüllte Höhlung und rollt auf einer vollkommen rauhen, horizontalen Ebene. Welches ist die Bewegung, wenn der Berührungspunkt von Kugel und Ebene eine gerade Linie beschreibt?



Figur 135.

Es seien M und m die Massen der Kugel und des Wassers, a und b die Radien der zwei sphärischen Flächen, C und A (Fig. 135) ihre Mittelpunkte, und es sei $CA = c$.

Die durch die Mittelpunkte C und A beider sphärischen Flächen gehende vertikale Ebene, in welcher sich diese Punkte bewegen, schneide die horizontale Ebene in der Geraden OX, O sei der Ursprung des Coordinatensystemes, $OY \perp OX$ die Ordinatenaxe, $ON = x$, $NC = a$ seien die Coordinaten des Mittelpunktes C, endlich sei $\sphericalangle NCA = \vartheta =$ dem Winkel, durch welchen sich die Kugel während der Zeit t dreht, O der Anfangspunkt der Bewegung des Berührungspunktes N zwischen Kugel und Ebene.

Zuerst wollen wir annehmen, dass die Kugel und das Wasser von derselben Dichtigkeit sei. In diesem Falle ist C der gemeinschaftliche Schwerpunkt des ganzen Systemes und können wir Momente um denselben als einen festen Punkt nehmen. Weil die Fläche der sphärischen Höhlung als vollkommen glatt vorausgesetzt wird, das Wasser anfangs in Ruhe ist, so wird dasselbe keine Rotation um A besitzen und seine Winkelgeschwindigkeit gleich Null sein. Die Bewegungsgleichungen des Systemes sind daher

$$Mk^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + mc^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Fa. \qquad (1)$$

$$(M+m)\frac{d^2x}{dt^2} = -F, \quad (2) \qquad (M+m)\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad (3)$$

und die geometrischen Nebenbedingungen

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{d\vartheta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \qquad (4)$$

wobei $Mk^2 = \frac{2}{5}(M+m)a^2 - m(c^2 + \frac{2}{5}b^2)$ ist.

Aus den Gleichungen (1), (2) und (4) ergiebt sich

$$\left\{Mk^2 + mc^2 + (M+m)a^2\right\}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = C.$$

Jetzt folgt mit (2), (3) und (4)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = C_1, \quad x = C_1 t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad y = a.$$

Daraus geht hervor, dass sich die Kugel mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt.

Zweitens nehmen wir an, dass die Kugel und das Wasser von verschiedener Dichtigkeit seien. In diesem Falle sei S der in CA liegende gemeinschaftliche Schwerpunkt und $CS = h$. Dadurch, dass wir Momente um C nehmen, erhalten wir

$$Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+mc^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=Fa+\frac{d^2x}{dt^2}h\cos\vartheta(M+m)-(M+m)gh\sin\vartheta.$$

Ferner ist

$$(M+m)\frac{d^2(x-h\sin\vartheta)}{dt^2}=-F,$$

und die geometrischen Bedingungen sind

$$x=a\vartheta,\qquad y=a.$$

Indem wir F und x aus diesen Gleichungen eliminieren, gelangen wir zu

$$\left\{Mk^2+mc^2+(M+m)a^2-2(M+m)ah\cos\vartheta\right\}\frac{d(\omega^2)}{dt}$$
$$+2(M+m)ah\sin\vartheta\,\omega^2=-2(M+m)gh\sin\vartheta,$$

wo $\frac{d\vartheta}{dt}=\omega$ gesetzt wurde. Die Integration der beiden Seiten dieser Gleichung giebt

$$\left(\frac{Mk^2+mc^2}{M+m}+a^2-2ah\cos\vartheta\right)\omega^2=C+2(M+m)gh\cos\vartheta,$$

so dass die Winkelgeschwindigkeit der Kugel bestimmt ist.

Ist zur Zeit $t=0$, $\omega=0$, $\vartheta=0$, dann wird $C=-2(M+m)gh$, mithin

$$\left(\frac{Mk^2+mc^2}{M+m}+a^2-2ah\cos\vartheta\right)\omega^2=2(M+m)gh(\cos\vartheta-1).$$

Bei dieser Untersuchung haben wir vorausgesetzt, dass die Kugel nicht hüpfen kann. Besitzt die Flüssigkeit dieselbe Dichtigkeit wie die Kugel, dann hat der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider keine vertikale Bewegung, der Druck auf die horizontale Ebene ist stets $=(M+m)g$, stets positiv, so dass in diesem Falle überhaupt kein Hüpfen stattfinden kann. Wenn aber der gemeinschaftliche Schwerpunkt nicht mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt, dann ist

$$\bar{y}=a-h\cos\vartheta,\qquad \frac{d^2\bar{y}}{dt^2}=\frac{R}{M+m}-g,$$

wo R den Druck auf die Ebene bezeichnet. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

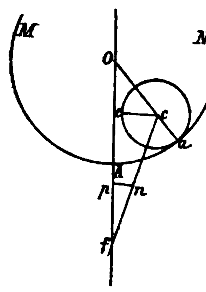
$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}=h\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=\frac{R}{M+m}-g,\qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2}=\left(\frac{R}{M+m}-g\right)\frac{1}{h\cos\vartheta},$$

$$R=\left(h\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+g\right)(M+m),$$

wodurch R als Funktion von ϑ bestimmt ist. Wenn die Bewegung sehr langsam ist, so kann offenbar R nicht negativ werden und wird die Kugel nicht hüpfen. Geht dagegen R durch Null ins Negative über, dann wird die Kugel die Ebene verlassen und der Schwerpunkt eine Parabel beschreiben.

7. Ein Pendel von beliebiger Gestalt ist an einem soliden Kreiscylinder befestigt, welcher die Drehaxe bildet. Die Axe befindet sich in horizontaler Lage innerhalb eines hohlen, horizontalen, festen Kreiscylinders von grösserem Durchmesser und mit vollkommen rauher Oberfläche. Der hohle Cylinder besitzt einen Schlitz, durch welchen das Pendel hängt. Voraussetzend, die Anfangslage des Pendels befinde sich sehr nahe bei einer Gleichgewichtslage, zu finden die Länge eines isochronen einfachen Pendels.

Es bezeichne n die Lage des Schwerpunktes des Pendels und seiner Axe, beide als eine Masse angesehen, in einem beliebigen Augenblicke der Bewegung. O, c (Fig. 136) seien die Mittelpunkte der Kreisquerschnitte des hohlen und des soliden Cylinders, gemacht von einer vertikalen Ebene durch n. Die vertikale Gerade OA und die gerade Linie cn mögen sich in f schneiden, np schneide rechtwinkelig die Linie OAf, welche den Punkt A des Kreisschnittes MAN trifft. Ziehe die Gerade Oca, wobei a der Berührungspunkt beider Cylinderquerschnitte ist. e sei der Berührungspunkt des Schnittes des soliden Cylinders in seiner tiefsten Lage und des Schnittes des hohlen Cylinders, so dass der Bogen Aa gleich dem Bogen ae ist. Es sei ferner $Op = x$, $np = y$, $ce = b = ca$, $AO = a = Oa$, $\varphi = \sphericalangle cfO$, $\vartheta = \sphericalangle AOa$, $cn = c$, $\beta = \sphericalangle ecf$, $M =$ der Masse des Pendels und seiner Axe zusammen, $k =$ dem Trägheitsradius um n für Pendel und Axe als eine Masse, R $=$ dem Drucke des hohlen Cylinders auf den soliden Cylinder, $F =$ dem Reibungswiderstande an der Berührungsstelle beider Cylinder in der Richtung der Tangente an den Bogen aN.



Figur 136.

Zerlegen wir die an dem Systeme wirkenden Kräfte in vertikaler und horizontaler Richtung, so erhalten wir für die translatorische Bewegung des Schwerpunktes n die Gleichungen

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - R\cos\vartheta - F\sin\vartheta, \quad M\frac{d^2y}{dt^2} = -R\sin\vartheta + F\cos\vartheta.$$

Für die rotierende Bewegung des Systemes um den Punkt n besteht die Beziehung

$$Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Rc\sin(\vartheta+\varphi) + F\{c\cos(\vartheta+\varphi) - b\}.$$

Weil nun ϑ und φ kleine Winkel sein sollen, so können wir bei der Entwickelung von $\sin(\vartheta+\varphi)$ und $\cos(\vartheta+\varphi)$ in Reihen die zweiten und höheren Potenzen von ϑ und φ vernachlässigen, wodurch diese Gleichungen übergehen in

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - R - F\vartheta, \quad M\frac{d^2y}{dt^2} = -R\vartheta + F,$$

$$Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Rc(\vartheta + \varphi) + F(c - b).$$

Indem wir nun R und F zwischen den vorstehenden Gleichungen eliminieren und dabei nur kleine Grössen erster Ordnung berücksichtigen, gelangen wir zu der Bewegungsgleichung

$$k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + cg(\vartheta + \varphi) = \left(\frac{d^2y}{dt^2} + g\vartheta\right)(c - b). \tag{1}$$

Die Geometrie zeigt, dass

$$y = (a - b)\sin\vartheta - c\sin\varphi = (a - b)\vartheta - c\varphi,$$

daher ist, wenn wir der Kürze halber $(a - b) = e$ setzen,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - c\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

welcher Wert die Gleichung (1) macht zu

$$(k^2 + c^2 - cb)\frac{d^2\varphi}{dt^2} - e(c - b)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + cg\varphi + bg\vartheta = 0. \tag{2}$$

Weil nun hier kein Gleiten stattfindet, so können wir auf ganz demselben Wege wie in dem Probleme 4 zeigen, dass

$$(\varphi + \beta) = \frac{a - b}{b}\vartheta = \frac{e}{b}\vartheta,$$

ist, wo $(\varphi + \beta)$ offenbar der ganze von dem soliden Cylinder um seine Axe beschriebene Winkel ist, durch den er sich bei dem Rollen von a bis A dreht. Folglich bekommen wir mit (2)

$$\left\{k^2 + (c - b)^2\right\}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{e}(b^2 + ce)\varphi + \frac{b^2\beta g}{e} = 0.$$

Setzen wir jetzt $\frac{g}{e}(b^2 + ce)\varphi + \frac{b^2\beta g}{e} = \frac{g}{e}(b^2 + ce)\psi$, so ist $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\psi}{dt^2}$, und die Gleichung geht über in

$$\left\{k^2 + (c - b)^2\right\}\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{g}{e}(b^2 + ce)\psi = 0,$$

oder in

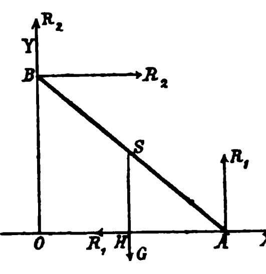
$$\frac{e\left\{k^2 + (c - b)^2\right\}}{b^2 + ce}\frac{d^2\psi}{dt^2} + g\psi = 0.$$

Bezeichnen wir nun endlich mit l die Länge eines vollkommenen mit der Periode von φ und daher von ψ isochronen Pendels, so ergibt sich

$$l = \frac{e\left\{k^2 + (c - b)^2\right\}}{b^2 + ce} = \frac{(a - b)\left\{k^2 + (c - b)^2\right\}}{b^2 + c(a - b)}.$$

Euler, Acta Acad. Petrop. 1780, P. 2, p. 164. Walton, p. 496.

8. An den Endpunkten A und B (Fig. 137) eines gleichförmigen Stabes AB befinden sich zwei kleine Ringe, die über den horizontalen Stab OX und den vertikalen Stab OY geschoben sind, so dass der Stab AB während seiner Bewegung stets mit den Stäben OX, OY mittelst seiner Enden in Berührung bleiben muss. Der Reibungswiderstand zwischen den Enden des beweglichen Stabes und den festen Stäben ist gleich dem Normaldrucke von jedem. Welches ist die Bewegung des Stabes?



Figur 137.

Es sei S der Schwerpunkt des Stabes AB, $SH \perp OX$, $OH = x$, $SH = y$, $AS = a = BS$, $\measuredangle BAO = \vartheta$, R_1, R_2 seien die normalen Reaktionen der Stäbe OX, OY, also auch R_1, R_2 die Reibungswiderstände entlang XO, OY, endlich bezeichne M die Masse des Stabes AB, k seinen Trägheitshalbmesser um S.

Damit haben wir für die Bewegung des Stabes AB die drei Gleichungen

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = R_2 - R_1, \quad (1) \qquad M\frac{d^2y}{dt^2} = R_1 + R_2 - Mg, \quad (2)$$

$$Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = (R_2 - R_1)\, a \cos\vartheta + (R_1 + R_2)\, a \sin\vartheta. \quad (3)$$

Die Werte von $R_2 - R_1$ und $R_1 + R_2$ aus (1) und (2) in (3) substituiert, giebt

$$k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = a\cos\vartheta\frac{d^2x}{dt^2} + \left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right) a \sin\vartheta. \quad (4)$$

Es ist aber $\qquad x = a\cos\vartheta, \qquad y = a\sin\vartheta,$

daher

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = a\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - a\sin\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + a\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Die Einführung dieser Werte von $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ in die Gleichung (4) liefert

$$k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + a^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = a g \sin\vartheta,$$

oder, indem wir die Abhängigkeit der Variablen vertauschen,

$$-k^2 \cdot \frac{\frac{d^2t}{d\vartheta^2}}{\left(\frac{dt}{d\vartheta}\right)^3} + \frac{a^2}{\left(\frac{dt}{d\vartheta}\right)^2} = a g \sin\vartheta.$$

Multiplizieren wir die beiden Seiten dieser Gleichung mit $2e^{\frac{2a^2}{k^2}\vartheta}$, so wird

$$\frac{d}{d\vartheta}\left\{\frac{k^2 e^{\frac{2a^2}{k^2}\vartheta}}{\left(\frac{dt}{d\vartheta}\right)^2}\right\} = 2ag\,e^{\frac{2a^2}{k^2}\vartheta}\sin\vartheta,$$

und wenn wir hier die Integration vollziehen, so kommt

$$\frac{k^2 e^{\frac{2a^2}{k^2}\vartheta}}{\left(\frac{dt}{d\vartheta}\right)^2} = C + 2ag\int e^{\frac{2a^2}{k^2}\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta. \tag{5}$$

Auf das Integral rechts wenden wir teilweise Integration an, wodurch sich ergiebt

$$\int e^{\frac{2a^2}{k^2}}\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{k^4}{k^4+4a^4}\left\{\frac{2a^2}{k^2}\sin\vartheta - \cos\vartheta\right\}e^{\frac{2a^2}{k^2}\vartheta} + C_1,$$

und es geht damit die (5) über in

$$e^{\frac{2a^2}{k^2}\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2agk^2}{k^4+4a^4}\left\{C' + \left(\frac{2a^2}{k^2}\sin\vartheta - \cos\vartheta\right)e^{\frac{2a^2}{k^2}\vartheta}\right\}.$$

Weil nun hier $a^2 = 3k^2$ ist, so wird einfacher

$$e^{6\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{6}{37}\cdot\frac{g}{a}\left\{C' + (6\sin\vartheta - \cos\vartheta)\,e^{6\vartheta}\right\}.$$

Nehmen wir an, dass α und ω gleichzeitige Werte von ϑ und $\frac{d\vartheta}{dt}$ sind, dann bestimmt sich die Integrationskonstante durch

$$e^{6\alpha}\omega^2 = \frac{6}{37}\cdot\frac{g}{a}\left\{C' + (6\sin\alpha - \cos\alpha)\,e^{6\alpha}\right\},$$

und folglich erhalten wir

$$e^{6\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - e^{6\alpha}\cdot\omega^2 = \frac{6}{37}\cdot\frac{g}{a}\left\{(6\sin\vartheta - \cos\vartheta)\,e^{6\vartheta} - (6\sin\alpha - \cos\alpha)e^{6\alpha}\right\},$$

womit die Winkelgeschwindigkeit des Stabes AB für jede Lage während seines Niedersinkens bestimmt ist.

Walton, p. 499.

9. Eine homogene Kugel bewegt sich aus dem Zustande der Ruhe auf einer rauhen, geneigten Ebene, für welche der Reibungscoëfficient μ ist, herab. Zu bestimmen, ob die Kugel gleiten oder rollen wird.

Bezeichnet F den ein Rollen der Kugel hervorbringenden Reibungswiderstand, α die Horizontalneigung der Ebene, R die Reaktion, so ist nach dem zweiten Probleme $\frac{F}{R} = \frac{2}{7}\,tg\,\alpha$. So lange als nun $\frac{2}{7}\,tg\,\alpha < \mu$, erfolgt die Bewegung wie dort. Wenn aber $\mu < \frac{2}{7}\,tg\,\alpha$ ist, so wird die

Kugel beginnen auf der geneigten Ebene zu gleiten. Für die dadurch entstehende Bewegung sind die Gleichungen

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - \mu R, \qquad 0 = -Mg\cos\alpha + R,$$

$$Ma\frac{d^2x}{dt^2} + Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Mga\sin\alpha,$$

welche Relationen mit $k^2 = \frac{2}{5}a^2$ übergehen in

$$R = Mg\cos\alpha, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{5}{2}\mu\frac{g}{a}\cos\alpha.$$

Vollziehen wir die Integrationen und beachten dabei, dass die Bewegung der Kugel vom Ruhezustande aus beginnt, so folgt

$$\frac{dx}{dt} = gt(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad x = \frac{1}{2}gt^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{5}{2}\mu\frac{g}{a}t\cos\alpha, \qquad \vartheta = \frac{5}{4}\mu\frac{g}{a}t^2\cos\alpha.$$

Die Geschwindigkeit des Berührungspunktes der Kugel und der Ebene ist

$$\frac{dx}{dt} - a\frac{d\vartheta}{dt} = gt\left(\sin\alpha - \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right).$$

Weil die Annahme bedingt, dass stets $\mu < \frac{2}{7}tg\,\alpha$ ist, so kann diese Geschwindigkeit niemals gleich Null werden. Daher wird die Reibung niemals in rollende Reibung übergehen. Die Bewegung ist somit vollständig bestimmt.

Routh, Dynamics, p. 125.

10. Eine homogene Kugel rotiert um einen horizontalen Durchmesser und wird behutsam auf eine rauhe, horizontale Ebene gebracht; der Reibungscoëfficient ist gleich μ. Welches ist die daraus entstehende Bewegung?

Weil die Geschwindigkeit in dem Berührungspunkte von Kugel und Ebene nicht gleich Null ist, so wird offenbar die Kugel zu gleiten beginnen und die Bewegung des Kugelmittelpunktes wird in einer geraden Linie erfolgen, welche zu der anfänglichen Rotationsaxe senkrecht ist. Diese gerade Linie wählen wir als Abscissenaxe und bezeichnen mit ϑ den Winkel zwischen der vertikalen Richtung und dem anfangs vertikalen Kugelhalbmesser. Es sei ferner a der Halbmesser der Kugel, Mk^2 ihr Trägheitsmoment um einen ihrer Durchmesser, ω_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit, R die Normalreaktion der Ebene.

Damit bekommen wir die dynamischen Gleichungen

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \mu R, \qquad 0 = Mg - R, \qquad Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\mu . R a, \tag{1}$$

woher wir nehmen

$$R = Mg, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \mu g, \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{5}{2}\mu\frac{g}{a}. \tag{2}$$

Die Integration dieser Gleichungen giebt, da zur Zeit $t = 0$, $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0$ ist,

$$\frac{dx}{dt} = \mu g t, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 - \frac{5}{2}\mu\frac{g}{a}t,$$

$$x = \frac{1}{2}\mu g t^2, \qquad \vartheta = \omega_0 t - \frac{5}{4}\mu\frac{g}{a}t^2. \tag{3}$$

Aber es können offenbar diese Gleichungen nicht die ganze Bewegung darstellen, denn sie würden machen, dass die Translationsgeschwindigkeit des Kugelmittelpunktes, $\frac{dx}{dt}$, kontinuierlich wächst, was ganz gegen die Erfahrung verstösst. Die Geschwindigkeit des Berührungspunktes der Kugel und der Ebene ist

$$\frac{dx}{dt} - a\frac{d\vartheta}{dt} = -a\omega_0 + \frac{7}{2}\mu g t,$$

welche nach einer Zeit

$$t_1 = \frac{2}{7}\frac{a\omega_0}{\mu g}$$

verschwindet. In diesem Zeitmomente wechselt die Reibung plötzlich ihren Charakter. Ihre Grösse wird nun nur genügen, den Berührungspunkt in Ruhe zu erhalten. Bezeichnet F den Reibungswiderstand, welcher dieses bewirkt, so werden die Bewegungsgleichungen sein

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F, \qquad 0 = Mg - R, \qquad Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -Fa, \tag{5}$$

wozu noch die geometrische Bedingung kommt

$$x = a\vartheta.$$

Differentiieren wir die letzte Gleichung zweimal, so folgt $\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$; führen wir diesen Wert von $\frac{d^2x}{dt^2}$ in die erste der dynamischen Gleichungen ein und verbinden die resultierende Gleichung mit der zweiten, so kommt $F(a^2 + k^2) = 0$, d. i. $F = 0$. Dieses zeigt, dass keine Reibung nötig ist, um den Berührungspunkt der Kugel in Ruhe zu erhalten, weshalb auch keine mit ins Spiel gezogen wird. Daher wird sich die Kugel gleichförmig mit der Geschwindigkeit bewegen, welche sie am Ende der Zeit t_1 erhalten hat. Substituieren wir den Wert von t_1 in den Ausdruck

für $\frac{dx}{dt}$, so finden wir, dass diese Geschwindigkeit gleich $\frac{2}{7} a \omega_0$ ist. Es geht daraus hervor, dass sich die Kugel zuerst mit einer gleichförmig wachsenden Geschwindigkeit während der Zeit $\frac{2}{7} a \frac{\omega_0}{\mu g}$ und sodann mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit $\frac{2}{7} a \omega_0$ bewegen wird, und es verdient beachtet zu werden, dass diese Geschwindigkeit von dem Reibungscoëfficienten μ unabhängig ist. Wenn die Ebene vollkommen rauh ist, so ist μ unendlich gross und die Zeit t_1 verschwindet; es bewegt sich alsdann die Kugel gleich anfangs mit einer konstanten Geschwindigkeit $\frac{2}{7} a \omega_0$.

In dieser Untersuchung ist das Paar der rollenden Reibung vernachlässigt worden. Seine Wirkung würde die sein, die Winkelgeschwindigkeit zu vermindern. Die Geschwindigkeit des tiefsten Punktes der Kugel würde dann nicht mehr gleich Null werden und es würde dann eine kleine gleitende Reibung nötig sein, um diesen Punkt in der Ruhe zu erhalten. Nehmen wir an, dass das Moment des Reibungspaares durch fMg gemessen werde, wo f eine Konstante bedeutet, und führen wir dieses in die dritte der Gleichungen (5) ein, so geht dieselbe über in

$$Mk^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = - Fa - fMg,$$

die anderen zwei bleiben unverändert. Nun ist auch $M \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \frac{F}{a}$, also wird

$$\frac{k^2}{a} F = - Fa - fMg, \qquad F \cdot \frac{a^2 + k^2}{a} = - fMg,$$

$$F = - \frac{afMg}{a^2 + k^2} = - \frac{5}{7} \frac{fMg}{a}.$$

Wir sehen daraus, dass der Reibungswiderstand F negativ ist, mithin auf die Bewegung der Kugel verzögernd einwirkt. Die Wirkung des Paares bringt eine Reibungskraft ins Spiel, welche allmählich die Kugel in den Ruhezustand überführt.

Wenn die Kugel sich in der Luft bewegt, so können wir wünschen, den Widerstand der Luft zu bestimmen. Der Hauptteil dieses Widerstandes kann leicht exakt durch eine am Mittelpunkte der Kugel angreifende und entgegengesetzt ihrer Bewegungsrichtung wirkende Kraft von der Grösse $M\beta \frac{v^2}{a}$ dargestellt werden, wo v die Geschwindigkeit der Kugel und β eine Konstante, deren Wert von dem Widerstande der Luft abhängig ist, bedeutet. Überdies wird hier noch eine kleine Reibung

zwischen der Kugel und den sie umgebenden Luftteilchen stattfinden, deren Grösse aber nicht so genau bekannt ist. Dieser Widerstand sei dargestellt durch ein Paar, dessen Moment $M\gamma v^2$ ist, wo γ eine konstante, kleine Grösse bezeichnet. Die Gleichungen der Bewegung können dann ohne Schwierigkeit gelöst werden und es wird gefunden werden

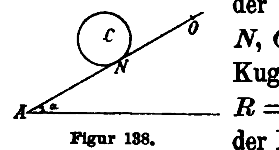
$$arc\left(tg = v\sqrt{\frac{\beta+\gamma}{fg}}\right) - arc\left(tg = v_0\sqrt{\frac{\beta+\gamma}{fg}}\right) = -\frac{a\sqrt{(\beta+\gamma)fg}}{a^2+k^2}\,t,$$

wenn v_0 die Geschwindigkeit der Kugel zur Zeit $t = 0$ bedeutet.

Routh, Dynamics, p. 126.

11. Eine homogene Kugel wird direkt eine geneigte Ebene herunter mit einer Translations- und Rotationsgeschwindigkeit geworfen. Die Rotationsbewegung im Anfangspunkte ist dieselbe wie diejenige, welche vollkommenem Rollen entsprechen würde, aber bedeutender an Grösse. Welches ist die Bewegung der Kugel, wenn die Coëfficienten der statischen und der dynamischen Reibung zwischen der Kugel und der geneigten Ebene gegeben sind?

Es sei (Fig. 138) OA die geneigte Ebene, C die Lage vom Kugelcentrum, N diejenige des Berührungspunktes von Kugel und Ebene zur Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung, $\mu =$ dem Coëfficienten der dynamischen Reibung zwischen Kugel und Ebene, $a =$ dem Halbmesser der Kugel, O die Anfangslage des Berührungspunktes N, $ON = s$, $\varphi =$ dem Winkel, durch welchen sich die Kugel um ihren Schwerpunkt in der Zeit t dreht, $R =$ der normalen Reaktion der Ebene, $M =$ der Masse der Kugel, $\alpha =$ der Horizontalneigung der Ebene.



Figur 138.

Mit diesen Bezeichnungen sind die Gleichungen für die Bewegung der Kugel

$$M\frac{d^2s}{dt^2} = Mg\sin\alpha + \mu R, \quad (1) \qquad Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\mu a R. \quad (2)$$

Da der Schwerpunkt S keine Bewegung senkrecht zu der Ebene besitzt, so ist

$$R = Mg\cos\alpha,$$

womit die Gleichungen (1) und (2) übergehen in

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha), \quad (3) \qquad k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\mu a g\cos\alpha. \quad (4)$$

Bezeichnet v_0 den Anfangswert der Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes in der Richtung der Falllinie, ω die anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Kugel um ihren Schwerpunkt, so giebt die Integration der Gleichungen (3) und (4)

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,t, \quad (5) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega - \mu\frac{ag}{k^2}\cos\alpha . t. \quad (6)$$

Sobald als durch das Wachstum von t $\frac{ds}{dt} = a\frac{d\varphi}{dt}$ wird, wechselt die Bewegung ihren Charakter, und hören dann unsere gegenwärtigen Gleichungen auf, anwendbar zu sein. Dieser Zustand tritt ein, wenn

$$v_0 + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,t = a\,\omega - \mu\frac{a^2 g}{k^2}\cos\alpha . t,$$

oder

$$t = \frac{(a\,\omega - v_0)\,k^2}{\mu g(a^2 + k^2)\cos\alpha + k^2 g\sin\alpha} = t'$$

ist. Für alle Werte von t, welche nicht grösser als t' sind, erhalten wir durch (5) und (6), wenn wir nochmals integrieren und die Werte von s und φ zur Zeit $t = 0$ ebenfalls gleich Null annehmen,

$$s = v_0\,t + \frac{1}{2}g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,t^2, \qquad \varphi = \omega\,t - \frac{1}{2}\mu\frac{ag}{k^2}\cos\alpha . t^2.$$

Mit diesen Gleichungen ergeben sich die Werte von s und φ am Ende der ersten Periode, wenn wir in dieselben t' an Stelle von t einführen.

Wenn $\frac{ds}{dt} = a\frac{d\varphi}{dt}$ wird, besteht offenbar in diesem Momente zwischen Kugel und Ebene kein Gleiten und daher muss, ehe dynamische Reibung wieder ins Spiel kommen kann, die statische Reibung zwischen Kugel und Ebene überwältigt werden.

Nehmen wir zuerst an, dass die statische Reibung genügend gross ist, um vollkommenes Rollen zu sichern, und bezeichnen mit F die Tangentialreaktion der Ebene gegen das Herabgehen der Kugel, dann sind die Gleichungen der Bewegung

$$M\frac{d^2 s}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F, \quad (1) \qquad Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = aF. \quad (2)$$

Weil hier kein Gleiten stattfindet, so ist es klar, dass

$$a\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt}, \qquad a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

sein muss, folglich erhalten wir mit (2)

$$Mk^2\frac{d^2 s}{dt^2} = a^2 F$$

und daher mit (1)

$$(a^2 + k^2)\frac{d^2 s}{dt^2} = a^2 g\sin\alpha, \quad (3)$$

mithin auch

$$(a^2 + k^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = ag\sin\alpha. \quad (4)$$

Die Integration der beiden letzten Gleichungen giebt

$$\frac{ds}{dt} = v_0' + \frac{a^2 g \sin\alpha}{a^2 + k^2} t, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega' + \frac{a g \sin\alpha}{a^2 + k^2} t,$$

wo v_0', ω' die Werte von $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ am Ende des ersten Teiles der Bewegung sind, die Zeit vom Beginne der zweiten Periode an gerechnet wird, und offenbar $v_0' = a\omega'$ ist.

Die nochmalige Integration giebt

$$s = s' + v_0' t + \frac{1}{2} \frac{a^2 g \sin\alpha}{a^2 + k^2} t^2, \qquad \varphi = \varphi' + \omega' t + \frac{1}{2} \frac{g \sin\alpha}{a^2 + k^2} t^2,$$

wenn s', φ' die Werte von s, φ am Ende der ersten Periode bezeichnen. Durch (2) und (4) bekommen wir

$$F = \frac{Mk^2}{a} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{Mk^2 g \sin\alpha}{a^2 + k^2},$$

welches der erforderliche Wert des statischen Reibungswiderstandes ist, um vollkommenes Rollen während der zweiten Periode der Bewegung zu erhalten.

Ist die statische Reibung kleiner als dieser Betrag, dann wird die dynamische Reibung anfangen und offenbar hinauf die Ebene zu wirken beginnen. Folglich ist für die Bewegung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \quad (\alpha) \qquad k^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mu a g \cos\alpha. \quad (\beta)$$

Wir können nun leicht zeigen, dass der Coëfficient von g in dem Ausdrucke für $\frac{d^2 s}{dt^2}$ positiv ist. Für den zum vollkommenen Rollen erforderlichen Reibungscoëfficienten f besteht die Beziehung

$$f = \frac{F}{R} = \frac{F}{Mg\cos\alpha} = \frac{k^2}{a^2 + k^2} tg\,\alpha,$$

und weil der Wert von μ kleiner als dieser hypothetische Wert, so haben wir

$$\mu < \frac{k^2}{a^2 + k^2} tg\,\alpha, \qquad \text{und daher} \qquad \mu < tg\,\alpha, \qquad \mu\cos\alpha < \sin\alpha.$$

Mit (α) und (β) folgt

$$\frac{ds}{dt} = v_0' + g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega' + \mu \frac{ag}{k^2} \cos\alpha \,.\, t.$$

Während des zweiten Statiums der Bewegung wird $\frac{ds}{dt} - a\frac{d\varphi}{dt}$, d. i. die Geschwindigkeit des Berührungspunktes, nie gleich Null, bleibt stets positiv. Berücksichtigen wir, dass $v_0' = a\omega'$, so erhalten wir

$$\frac{ds}{dt} - a\frac{d\varphi}{dt} = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha - \mu\frac{a^2}{k^2}\cos\alpha\right)t,$$

$$= g\frac{a^2 + k^2}{k^2}\cos\alpha\left(\frac{k^2}{a^2 + k^2} tg\,\alpha - \mu\right)t,$$

folglich ist die Grösse links stets positiv, weil diejenige rechts stets positiv ist, die Kugel wird im Vergleich mit der Translationsgeschwindigkeit immer zu langsam rotieren, um vollkommenem Rollen entsprechen zu können.

Bezeichnet s' die Länge der Bahn, welche die Kugel während der zweiten Periode der Bewegung auf der geneigten Ebene infolge des Gleitens zurücklegt, so ist noch

$$\frac{ds'}{dt} = \frac{ds}{dt} - a\frac{d\varphi}{dt} = g\left(\sin\alpha - \mu\frac{a^2+k^2}{k^2}\cos\alpha\right)t,$$

$$s' = \frac{1}{2}g\left(\sin\alpha - \mu\frac{a^2+k^2}{k^2}\cos\alpha\right)t^2.$$

Euler, Acta Acad. Petrop., P. II, p. 131. 1781. Walton, p. 503.

12. Eine sich um einen horizontalen Diameter drehende, homogene Kugel befindet sich auf einer unvollkommen rauhen Ebene, die parallel zu diesem Durchmesser und unter einem Winkel $arc\,(tg = \mu)$ gegen den Horizont geneigt ist, wo μ den Coëfficienten der dynamischen Reibung bezeichnet. Die Richtung der Rotation der Kugel ist entgegengesetzt derjenigen, welche dem vollkommenen Abwärtsrollen entsprechen würde. Wie ist die Bewegung der Kugel beschaffen?

Indem wir die bei der Lösung des vorhergehenden Problemes angewendeten Bezeichnungen beibehalten, sind hier die Bewegungsgleichungen der Kugel:

$$M\frac{d^2s}{dt^2} = Mg\sin\alpha - \mu R, \qquad Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\mu a R.$$

Aber es ist $R = Mg\cos\alpha$, folglich haben wir durch die Annahme

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\mu\frac{ag}{k^2}\cos\alpha.$$

Die Integration dieser Gleichungen in Bezug auf t giebt

$$\frac{ds}{dt} = C, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = C' - \mu\frac{ag}{k^2}\cos\alpha \,.\, t,$$

wo C und C' willkürliche Konstanten bedeuten. Beim Beginne der Bewegung ist $\frac{ds}{dt} = 0$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, daher $C = 0$, $C' = \omega$, mithin

$$\frac{ds}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega - \mu\frac{ag}{k^2}\cos\alpha \,.\, t.$$

In der vorhergehenden Untersuchung haben wir vorausgesetzt, dass die Reibung der Ebene auf die Kugel die Ebene hinauf wirke. Dieses wird aufhören der Fall zu sein, wenn $\frac{ds}{dt} + a\frac{d\varphi}{dt}$, oder weil $\frac{ds}{dt} = 0$, wenn $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ wird. Folglich sehen wir, dass für eine Zeit gleich

$$\frac{k^2 \omega}{\mu a g \cos \alpha}$$

der Mittelpunkt der Kugel stationär bleiben wird, und dass am Ende dieser Zeit die Winkelgeschwindigkeit der Kugel in Null übergeht.

Ehe wir dazu übergehen, die Beschaffenheit der Bewegung des Mittelpunktes der Kugel nach dem Ende der stationären Periode zu untersuchen, wird es nötig sein, den Betrag des aufwärts gerichteten Reibungswiderstandes zu bestimmen, welcher erforderlich ist, um die Kugel zur Annahme einer vollkommen rollenden Bewegung zu veranlassen. Der für diesen Zweck erforderliche Reibungscoëfficient (siehe die vorhergehende Aufgabe) ist gleich

$$\frac{k^2}{a^2 + k^2} tg\, \alpha.$$

Aber es ist $\mu = tg\, \alpha$, übersteigt mithin die erforderliche Grösse. Die Kugel wird demnach fortschreiten, die Ebene ohne Gleiten hinunter zu rollen, und der von ihrem Schwerpunkte am Ende einer Zeit t, von dem Schlusse seines stationären Intervalles an gerechnet, beschriebene Weg wird gleich sein

$$\frac{1}{2} \frac{a^2}{a^2 + k^2} g \sin \alpha \,.\, t^2 = \frac{5}{14} g \sin \alpha \,.\, t^2,$$

weil $k^2 = \frac{2}{5} a^2$ ist. Auch ist mit diesem Werte von k^2 die Grösse des stationären Intervalles

$$\frac{2}{5} \frac{a \omega}{g \sin \alpha}.$$

Euler, Acta Acad. Petrop, P. II, p. 131, 1781. Walton, p. 507.

13. Ein rauher, gleichförmiger Stab befindet sich auf einem Tische rechtwinkelig zu seiner Kante, über welche er mehr als zur Hälfte seiner Länge hinwegragt. Zu bestimmen, ob der Stab während der daraus folgenden Bewegung auf der Kante gleiten wird.

Wenn $2a$ die Länge des Stabes, b den Anfangsabstand seines Schwerpunktes von der Kante und μ den Coëfficienten des Reibungswiderstandes bezeichnet, so wird der Stab beginnen zu gleiten, nachdem er sich durch einen Winkel gedreht hat, dessen trigonometrische Tangente gleich ist

$$\frac{\mu a^2}{a^2 + 9 b^2}.$$

14. Ein Rad rollt auf einer vollkommen rauhen, horizontalen Ebene, sein Schwerpunkt ist um die Strecke c von seinem Mittelpunkte entfernt und sein Halbmesser ist gleich a. Die Geschwindigkeit des Mittelpunktes, wenn der Schwerpunkt vertikal unter ihm liegt, soll so bestimmt werden, dass der Normaldruck auf die Ebene Null sein kann, wenn der Schwerpunkt vertikal über dem Mittelpunkte liegt. Ferner soll der Reibungswiderstand für diese zwei Lagen des Schwerpunktes und der Normaldruck, wenn der Schwerpunkt vertikal unter dem Mittelpunkte liegt, gesucht werden.

Es sei k der Trägheitsradius für den Schwerpunkt, F der Reibungswiderstand, wenn der Schwerpunkt am tiefsten liegt, F' derjenige, wenn er sich in seiner höchsten Lage befindet, R der Normaldruck, wenn der Schwerpunkt vertikal unter dem Mittelpunkte liegt, v die verlangte Geschwindigkeit, dann ist

$$v^2 = \frac{a^2 g}{c} \cdot \frac{4 c^2 + (a + c)^2 + k^2}{(a - c)^2 + k^2}, \qquad F = 0, \qquad F' = 0,$$

$$R = 2 M g \frac{a^2 + 3 c^2 + k^2}{(a - c)^2 + k^2}.$$

Eine vollständige Discussion der rollenden Bewegung eines Cylinders auf einer rauhen Ebene und andere interessante Probleme findet der Leser in einer Abhandlung von dem Rev. Henry Moseley, in the Philosophical Transactions of London, Part II, for 1851.

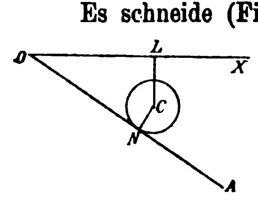
13 und 14. Walton, p. 513.

Zweiter Abschnitt.

Bewegung mehrerer Körper.

1. Ein homogener Kreiscylinder bewegt sich aus der Ruhelage auf einer vollkommen rauhen Ebene von unendlicher Ausdehnung, welche sich aus einer horizontalen Anfangslage mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um eine feste, horizontale Axe in ihr selbst dreht. Die Berührungslinie des Cylinders und der Ebene ist parallel zu der Drehaxe der Ebene und anfangs fallen beide zusammen. Wie ist die Bewegung des Cylinders beschaffen?

Es schneide (Fig. 139) eine vertikale Ebene durch den Schwerpunkt C des Cylinders und senkrecht zu der Umdrehungsaxe die sich drehende Ebene zu einer beliebigen Zeit t in der Geraden OA, OX sei die Anfangslage von OA. Ziehe CL, CN rechtwinkelig zu OX, OA. Ferner sei $OL = x$, $CL = y$, $ON = r$, $CN = a$, $\omega =$ der Winkelgeschwindigkeit von OA um O, $\sphericalangle AOX = \omega t$, $k =$ dem Trägheitshalbmesser des Cylinders um seine Axe, $R =$ der normalen Reaktion der Ebene in der Richtung NC, $T =$ der Tangentialreaktion entlang NO, $\vartheta =$ dem Winkel, durch welchen der Cylinder sich um seine Axe in der Zeit t dreht, $M =$ der Masse des Cylinders.



Figur 139.

Damit sind die drei Gleichungen für die Bewegung des Cylinders

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = R \sin \omega t - T \cos \omega t, \tag{1}$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = M g - R \cos \omega t - T \sin \omega t, \tag{2}$$

$$M k^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = T a. \tag{3}$$

Der Winkel, durch welchen sich der Cylinder um C drehen würde, wenn er entlang OX auf einem Wege r rollte, wäre $\frac{r}{a}$, und der Winkel, durch den er sich drehte bei der Bewegung von OX in die Lage OA, wäre ωt, folglich ist der Winkel, durch den sich der Cylinder um seine Axe in der Zeit t dreht, gleich der Summe dieser beiden, so dass

$$\vartheta = \frac{r}{a} + \omega t. \tag{4}$$

Die Vereinigung der Gleichungen (1) und (2) giebt

$$\sin \omega t \frac{d^2 x}{dt^2} - \cos \omega t \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{R}{M} - g \cos \omega t. \tag{5}$$

Mit (1), (2) und (3) erhalten wir

$$\cos \omega t \frac{d^2 x}{dt^2} + \sin \omega t \frac{d^2 y}{dt^2} = g \sin \omega t - \frac{k^2}{a} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}.$$

Weil aber mit (4) $a \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2}$ ist, so haben wir auch

$$\cos \omega t \frac{d^2 x}{dt^2} + \sin \omega t \frac{d^2 y}{dt^2} = g \sin \omega t - \frac{k^2}{a^2} \frac{d^2 r}{dt^2}. \tag{6}$$

Für x und y liefert die Geometrie die Relationen

$$x = r \cos \omega t + a \sin \omega t, \qquad y = r \sin \omega t - a \cos \omega t,$$

durch deren zweimalige Differentiation nach t bekommen wir

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \cos \omega t \frac{d^2 r}{dt^2} - 2 \omega \sin \omega t \frac{dr}{dt} - \omega^2 r \cos \omega t - a \omega^2 \sin \omega t,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \sin \omega t \frac{d^2 r}{dt^2} + 2 \omega \cos \omega t \frac{dr}{dt} - \omega^2 r \sin \omega t + a \omega^2 \cos \omega t.$$

Durch die Einführung dieser Werte von $\frac{d^2 x}{dt^2}$ und $\frac{d^2 y}{dt^2}$ in die Gleichungen (5) und (6) ergiebt sich

$$2 \omega \frac{dr}{dt} + a \omega^2 = g \cos \omega t - \frac{R}{M}, \tag{7}$$

$$\frac{a^2 + k^2}{a^2} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r = g \sin \omega t. \tag{8}$$

Mit $a^2 = 2 k^2$ wird die Gleichung (8) zu

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{2}{3} \omega^2 r = \frac{2}{3} g \sin \omega t,$$

das Integral hiervon ist

$$r = -\frac{2g}{5 \omega^2} \sin \omega t + A e^{\omega' t} + B e^{-\omega' t},$$

wo $\omega \sqrt{\frac{2}{3}} = \omega'$ gesetzt wurde, A und B willkürliche Konstante sind.

Wenn wir diese Konstanten aus der Bedingung bestimmen, dass mit $t=0$, $r=0$, $\frac{dr}{dt}=0$, dann finden wir

$$r=-\frac{2g}{5\omega^2}\sin\omega t+\frac{g}{5\omega^2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,(e^{\omega' t}-e^{-\omega' t}),$$

womit die Lage des Cylinders zu einer beliebigen Zeit t, bevor er sich von der Ebene trennt, bestimmt ist. Die Differentiation dieser Gleichung nach t giebt die Geschwindigkeit der Cylinderaxe in der Richtung OA, nämlich

$$v=\frac{dr}{dt}=-\frac{2g}{5\omega}\cos\omega t+\frac{g}{5\omega}(e^{\omega' t}+e^{-\omega' t}).$$

Mit diesem Werte von $\frac{dr}{dt}$ in die Gleichung (7) eingegangen, bekommen wir für den Druck R der Ebene auf den Cylinder zur Zeit t

$$\frac{R}{M}=g\cos\omega t-a\omega^2+\frac{4}{5}g\cos\omega t-\frac{2g}{5}(e^{\omega' t}+e^{-\omega' t})$$
$$=\frac{9}{5}g\cos\omega t-a\omega^2-\frac{2g}{5}(e^{\omega' t}+e^{-\omega' t}).$$

Der Moment, in welchem der Cylinder die Ebene verlässt, ist bedingt durch $R=0$, so dass für diesen Fall die Relation gegeben ist

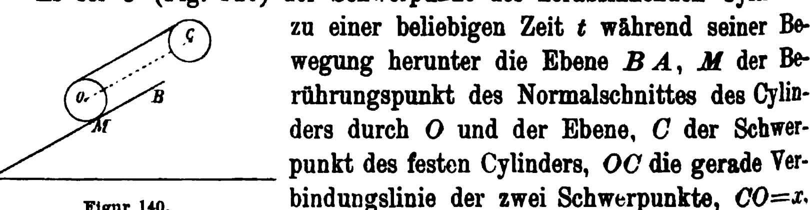
$$9g\cos\omega t=5a\omega^2+2g(e^{\omega' t}+e^{-\omega' t}),$$

eine Gleichung, welche die Epoche der Trennung festsetzt.

Walton, p. 501.

2. Ein Kreiscylinder rollt direkt auf einer vollkommen rauhen, geneigten Ebene herab. Während dieser Bewegung wickelt sich um seinen Normalschnitt ein Faden, welcher sich von einem gleichen, parallelen, um seine feste Axe rotierenden Cylinder abwindet. Die Lage des letzteren Cylinders ist so beschaffen, dass der Faden zu der Falllinie der Ebene parallel ist. Welches ist die Bewegung der Cylinder, die Spannung des Fadens und der Reibungswiderstand zwischen Cylinder und Ebene?

Es sei O (Fig. 140) der Schwerpunkt des herabsinkenden Cylinders zu einer beliebigen Zeit t während seiner Bewegung herunter die Ebene BA, M der Berührungspunkt des Normalschnittes des Cylinders durch O und der Ebene, C der Schwerpunkt des festen Cylinders, OC die gerade Verbindungslinie der zwei Schwerpunkte, $CO=x$,



Figur 140.

$a=$ dem Radius eines jeden der Cylinder, $\alpha=$ der Horizontalneigung der Ebene BMA, $T=$ der Spannung des sich auf- und abwickelnden, unelastischen Fadens, $F=$ dem Reibungswiderstande der geneigten Ebene

bei M in der Richtung MB, $Mk^2 =$ dem Trägheitsmomente eines jeden Cylinders um seine Axe. Ferner seien ϑ, ϑ' die Winkel, durch welche sich die Cylinder O, C um ihre Axen während der Zeit t drehen. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir für die Bewegung des Cylinders O die Gleichungen

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F - T, \quad (1) \qquad M\frac{d^2y}{dt^2} = Mg\cos\alpha - R = 0, \quad (2)$$

$$Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = (F - T)\,a, \tag{3}$$

und für die Rotationsbewegung des Cylinders C

$$Mk^2\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} = Ta. \tag{4}$$

Ferner zeigt sich durch geometrische Betrachtung, dass

$$a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} = 2\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{5}$$

Die Multiplikation der Gleichung (1) mit a, der (4) mit 2 und die Addition der resultierenden Gleichungen zu der (3) giebt

$$k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2k^2\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} + a\frac{d^2x}{dt^2} = ag\sin\alpha,$$

welche Gleichung zufolge der Relationen (5) übergeht in

$$(a^2 + 5k^2)\frac{d^2x}{dt^2} = a^2 g\sin\alpha,$$

so dass, weil $2k^2 = a^2$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{7}g\sin\alpha,$$

womit die Beschleunigung des Cylinders O bestimmt ist.

Nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $x = b$, so folgt hieraus

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{7}g\sin\alpha\,.\,t, \qquad x = b + \frac{1}{7}g\sin\alpha\,.\,t^2.$$

Ferner ist

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{2}{7}\cdot\frac{g}{a}\sin\alpha, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2}{7}\cdot\frac{g}{a}\sin\alpha\,.\,t, \qquad \vartheta = \frac{1}{7}\cdot\frac{g}{a}\sin\alpha\,.\,t^2,$$

$$\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} = \frac{4}{7}\cdot\frac{g}{a}\sin\alpha, \qquad \frac{d\vartheta'}{dt} = \frac{4}{7}\cdot\frac{g}{a}\sin\alpha\,.\,t, \qquad \vartheta' = \frac{2}{7}\cdot\frac{g}{a}\sin\alpha\,.\,t^2.$$

Die Bewegung der zwei Cylinder ist mithin in jeder Hinsicht eine gleichförmig beschleunigte.

Weiter erhalten wir mit (4)

$$T = \frac{Mk^2}{a}\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} = \frac{2Mk^2}{a^2}\frac{d^2x}{dt^2} = M\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{7}Mg\sin\alpha,$$

mit Hilfe der Gleichung (3)

$$F = T + \frac{Mk^2}{a}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = T + \frac{1}{2} M a \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = T + \frac{1}{2} M \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$F = \frac{2}{7} Mg \sin\alpha + \frac{1}{7} Mg \sin\alpha = \frac{3}{7} Mg \sin\alpha.$$

Schliesslich ist noch durch (2)

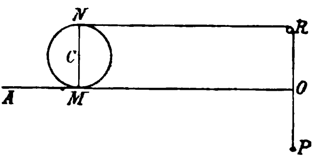
$$R = Mg \cos\alpha,$$

womit die sämtlichen verlangten Grössen bestimmt sind.

Walton, p. 515.

3. An das eine Ende eines unelastischen, durch einen kleinen, glatten, festen Ring laufenden Fadens ist ein Gewicht P gefesselt; das andere Ende desselben ist in einem beliebigen Punkte desjenigen Kreisschnittes eines homogenen, auf einer rauhen, horizontalen Ebene liegenden Cylinders befestigt, welcher in der zu seiner Axe senkrechten, durch den Ring gehenden Ebene sich befindet, und ist der Faden teilweise um diesen Kreisschnitt so gewunden, dass der Punkt, wo er den Cylinder verlässt, senkrecht über dem Mittelpunkte des Schnittes liegt. Der Durchmesser des Cylinders ist gleich der Höhe des Ringes über der horizontalen Ebene. Welches ist die Bewegung des Gewichtes und diejenige des Cylinders, wenn anfangs beide sich in einem Zustande momentaner Ruhe befunden haben?

Es sei (Fig. 141) R die Lage des Ringes, NOP der freie Teil des Fadens zur Zeit t, welcher in O den Ort AMO des Berührungspunktes M zwischen Cylinderkreisschnitt und Ebene trifft, C die Lage des Schwerpunktes zur Zeit t. Ferner sei $a =$ dem Halbmesser des Cylinders, $OP = y$, $OM = x$, $\varphi =$ dem Winkel, durch welchen sich der Cylinder während der Zeit t um seine horizontale Axe dreht, $F =$ dem Reibungswiderstande der Ebene in der Richtung AO, $M =$ der Masse des Cylinders, k sein Trägheitsradius um seine Axe, $m =$ der Masse des Gewichtes P, $T =$ der Spannung des Fadens, $R =$ der Reaktion der Ebene.



Figur 141.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir für die Bewegung des Gewichtes P

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = mg - T, \tag{1}$$

und für diejenige des Cylinders, welche in einer Translation und einer Rotation besteht,

$$M\frac{d^2 x}{dt^2} = -T - F, \quad (2) \qquad M\frac{d^2 y'}{dt^2} = Mg - R = 0, \tag{3}$$

$$Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = (T - F)\,a. \tag{4}$$

Weil nun die horizontale Ebene, auf welcher sich der Cylinder bewegt, entweder vollkommen, oder unvollkommen rauh sein kann, so haben wir zwei Fälle der Bewegung zu betrachten.

1) Die Ebene sei vollkommen rauh, dieses ist genügend rauh genug, um alles Gleiten zu verhindern.

Weil der Cylinder ohne zu gleiten rollt, so haben wir offenbar die geometrische Relation

$$x = -a\varphi, \quad \text{also auch} \quad \frac{dx}{dt} = -a\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Daher ist mit (4) und (2)

$$-Mk^2\frac{d^2x}{dt^2} = (T-F)a^2, \quad (5) \qquad -Ma^2\frac{d^2x}{dt^2} = (T+F)a^2. \quad (6)$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen giebt

$$-M(a^2+k^2)\frac{d^2x}{dt^2} = 2Ta^2, \quad (7)$$

und folglich ist, durch (1),

$$2ma^2\frac{d^2y}{dt^2} - M(a^2+k^2)\frac{d^2x}{dt^2} = 2ma^2g.$$

Wenn wir nun mit l die Länge des anfangs freien Teiles des Fadens bezeichnen, so ist es klar, dass

$$x + y = l + a\varphi, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2\frac{d^2x}{dt^2},$$

mithin bekommen wir

$$\left\{4ma^2 + M(a^2+k^2)\right\}\frac{d^2x}{dt^2} = -2ma^2g. \quad (8)$$

Integrierend und dabei beachtend, dass $\frac{dx}{dt} = 0$ ist, wenn $t = 0$, wird

$$\left\{4ma^2 + M(a^2+k^2)\right\}\frac{dx}{dt} = -2ma^2gt,$$

womit die Translationsgeschwindigkeit des Cylinders bestimmt ist. Nochmals integrierend und c als Anfangswert von x nehmend, finden wir für den Weg des Cylinderschwerpunktes in der Zeit t

$$c - x = \frac{ma^2gt^2}{4ma^2 + M(a^2+k^2)}.$$

Wir können nun auch leicht zeigen, dass

$$y = l - c + \frac{2ma^2gt^2}{4ma^2 + M(a^2+k^2)},$$

und daher, weil $a\varphi = x + y - l$ ist, dass

$$\varphi = \frac{magt^2}{4ma^2 + M(a^2+k^2)}.$$

Ferner erhalten wir durch (5) und (6)

$$2 F a^2 = - M(a^2 - k^2)\frac{d^2 x}{dt^2},$$

und folglich mit (8)

$$F = \frac{M m (a^2 - k^2) g}{4 m a^2 + M(a^2 + k^2)}.$$

Weiter giebt die Gleichung (2) für den Druck auf die horizontale Ebene

$$R = Mg.$$

Endlich ist mit (7)

$$T = \frac{M(a^2 + k^2)}{2 a^2}\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{M m g (a^2 + k^2)}{4 m a^2 + M(a^2 + k^2)}.$$

Mit $k^2 = \frac{1}{2} a^2$ gehen die erlangten Resultate über in

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{4 m g t}{8 m + 3 M}, \quad x = c - \frac{2 m g t^2}{8 m + 3 M}, \quad y = l - c + \frac{4 m g t^2}{8 m + 3 M},$$

$$\varphi = \frac{2 m g t^2}{8 m + 3 M}, \quad F = \frac{M m g}{8 m + 3 M}, \quad T = \frac{3 M m g}{8 m + 3 M}.$$

Wir sehen dadurch, dass der Reibungswiderstand und die Spannung des Fadens während der ganzen Bewegung konstant sind.

2) Die Ebene ist nicht genügend rauh, um Gleiten zu verhindern. Weil der Wert, welchen wir für F erhalten haben, nämlich für diejenige Reibung, welche zur Verhinderung eines jeglichen Gleitens erforderlich ist, positiv ist, so würde daher diese Kraft während der ganzen Bewegung in der Richtung AO wirken, was zeigt, dass in dem Falle, wo die Wirkung der Ebene auf den Cylinder nicht genügt, um vollkommenes Rollen zu sichern, die dynamische Reibung in der Richtung AO ausgeübt wird. Bezeichnet nun μ den Coëfficienten des dynamischen Reibungswiderstandes, so haben wir in den Gleichungen (3) und (4) anstatt F $\mu M g$ zu setzen, was giebt

$$M\frac{d^2 x}{dt^2} = - T - \mu M g, \quad M k^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = T a - \mu M a g.$$

Mit diesen zwei Gleichungen, der Gleichung (1) und den betreffenden geometrischen Relationen finden wir leicht, dass

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{(1 - 2\mu) m - \mu M}{M k^2 + m(a^2 + k^2)} a g t^2, \quad x = c - \frac{1}{2}\frac{(2 \mu a^2 + k^2) m + \mu M k^2}{M k^2 + m(a^2 + k^2)} g t^2,$$

$$y = l - c + \frac{1}{2}\frac{(a^2 + k^2) m - \mu M(a^2 - k^2)}{M k^2 + m(a^2 + k^2)} g t^2, \quad T = \frac{\mu a^2 + (1 - \mu) k^2}{M k^2 + m(a^2 + k^2)} M m g,$$

oder, mit $k^2 = \frac{1}{2} a^2$,

$$\varphi = \frac{(1 - 2\mu) m - \mu M}{(M + 3 m) a} g t^2, \quad x = c - \frac{1}{2}\frac{(4\mu + 1) m + \mu M}{M + 3 m} g t^2.$$

$$y = l - c + \frac{1}{2}\frac{3 m - \mu M}{M + 3 m}, \quad T = \frac{1 + \mu}{M + 3 m} M m g.$$

In einem Aufsatze von Fuss, welchem diese Aufgabe entlehnt wurde, ist der allgemeinere Fall erörtert, nämlich der, wenn der Cylinder sich auf einer geneigten Ebene herunter bewegt und der Ring durch eine Rolle von beträchtlichem Trägheitsmomente ersetzt wird.

Fuss, Nova Acta Acad. Petrop. 1787, p. 176. Walton, p. 517.

4. Ein Wagen mit n Räderpaaren wird auf einer horizontalen Fläche durch eine horizontale Kraft $2P$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortgezogen. Welches ist die Grösse von P?

Lasse sein $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die Halbmesser der Räder, $w_1, w_2, w_3, \ldots$ ihre Gewichte, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ die Halbmesser der Axen, $2W$ das ganze Gewicht des Wagens, $2Q_1, 2Q_2, 2Q_3, \ldots$ die Pressungen auf die verschiedenen Axen, so dass $W = \Sigma Q$, $R_1, R_2, R_3, \ldots$ die Pressungen zwischen den Rädern und den Axen, $R_1', R_2', R_3', \ldots$ die Pressungen der Räder auf die Fläche. Ferner sei C der gemeinschaftliche Mittelpunkt eines beliebigen Rades und seiner Axe, P beider Berührungspunkt, A der Berührungspunkt des Rades und der Fläche, $\measuredangle ACP = \vartheta$, positiv gedacht, wenn P hinter AC ist, μ der Coëfficient der gleitenden Reibung bei P und f der Coëfficient der rollenden Reibung in A.

Indem wir die Kräfte in vertikaler und horizontaler Richtung zerlegen und Momente um A nehmen, sind die Gleichgewichtsbedingungen für irgend ein Rad

$$R' = Q + w, \quad (1) \qquad \mu R(r\cos\vartheta - \varrho) - Rr\sin\vartheta = fR'. \quad (2)$$

Die Gleichungen für das Gleichgewicht des Wagens sind, wenn wir die Kräfte in vertikaler und horizontaler Richtung zerlegen,

$$R\cos\vartheta + \mu R\sin\vartheta = Q, \quad (3) \qquad \Sigma(R\sin\vartheta - \mu R\cos\vartheta) + P = 0. \quad (4)$$

Die Effektivkräfte sind vernachlässigt worden, weil wir angenommen haben, dass sich der Wagen gleichförmig bewegt, so dass die Grössen $M\frac{dv}{dt}$ für den Wagen und $mk^2\frac{d\omega}{dt}$ für das Rad beide gleich Null sind.

Die drei ersten Gleichungen geben durch Elimination von R und R'

$$\frac{\mu\left(\cos\vartheta - \frac{\varrho}{r}\right) - \sin\vartheta}{\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta} = \frac{f}{r}\left(1 + \frac{w}{Q}\right), \quad (5)$$

womit sich der Wert von ϑ bestimmen lässt. Bei den meisten Rädern sind $\frac{\varrho}{r}$ und $\frac{w}{Q}$ beide kleine Grössen, ebenso ist auch f klein. In einem solchen Falle ist $\mu\cos\vartheta - \sin\vartheta$ eine kleine Grösse. Wenn daher $\mu = tg\,\varepsilon$ gesetzt wird, so haben wir sehr nahe $\vartheta = \varepsilon$.

Die dritte und vierte unserer Grundgleichungen geben durch Elimination von R

$$P = \Sigma \frac{\mu \cos\vartheta - \sin\vartheta}{\mu \sin\vartheta + \cos\vartheta} \cdot Q = \Sigma \left\{ \frac{\mu}{\mu \sin\vartheta + \cos\vartheta} \frac{\varrho}{r} Q + \frac{f}{r}(Q + w) \right\},$$

letzteren Ausdruck bekommen wir durch (5). Wenn $\frac{\varrho}{r}$ eine kleine Grösse ist, so wird es genügen für ϑ in den ersten Teil des Wertes von P seinen Näherungswert ε zu substituieren, was giebt

$$P = \Sigma \left\{ \sin\varepsilon \frac{\varrho}{r} Q + f \frac{Q + w}{r} \right\}, \tag{6}$$

wobei wir hier die Grösse $\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 Q$ vernachlässigt haben.

Wenn alle Räder kongruent sind, so erhalten wir, weil dann $\Sigma Q = W$,

$$P = \sin\varepsilon \frac{\varrho}{r} W + f \frac{W + n w}{r}. \tag{7}$$

Daraus geht hervor, dass die verlangte Kraft, welche einen Wagen von gegebenem Gewichte mit irgend einer konstanten Geschwindigkeit zieht, sehr nahe unabhängig von der Zahl der vorhandenen Räder ist.

An einem zweiräderigen Wagen sind gewöhnlich die Räder grösser als an einem vierräderigen und ist daher die Kraft zur Fortbewegung gewöhnlich kleiner. An einem vierräderigen Wagen müssen die zwei Vorderräder kleiner als die beiden Hinterräder sein, damit sie unter dem Wagen hinweggehen können, wenn er gedreht wird. Dieses verursacht, dass das Glied $\sin\varepsilon \frac{\varrho_1}{r_1} Q_1$ in dem Ausdrucke für P, enthaltend den Radius r_1 eines Vorderrades, gross wird. Um die Wirkung dieses Gliedes zu vermeiden, sollte die Last stets so gelegt werden, dass ihr Schwerpunkt sehr nahe über der Axe der grossen Räder liegt, denn dann wird der Druck Q_1 in dem Zähler dieses Gliedes klein ausfallen.

Von dem französischen Ingenieur A. Morin wurden zu Metz in den Jahren 1837, 1838 und später zu Courbevie in den Jahren 1839 und 1841 mannigfache Versuche in der Absicht angestellt, mit möglichster Genauigkeit die Kraft zu bestimmen, welche erforderlich ist, Wagen verschiedener Art über die gewöhnlichen Strassen zu ziehen. Diese Experimente wurden auf Befehl des französischen Kriegsministers unternommen und später unter der Leitung des Ministers der öffentlichen Arbeiten fortgesetzt. Die Wirkung eines jeden Elementes wurde besonders bestimmt. Der nämliche Wagen wurde mit verschiedenen Gewichten belastet, um die Wirkung des Druckes kennen zu lernen, und auf demselben Wege von demselben Feuchtigkeitsgrade fortgezogen. Dann wurden bei gleicher Belastung Räder von verschiedenen Halbmessern, aber von derselben Breite gebraucht u. s. f. Es ergab sich als allgemeines Resultat, dass für Wagen mit gleichen Rädern der Widerstand direkt wie der Druck und umgekehrt proportional dem Durchmesser der Räder sich änderte und dass derselbe von der Anzahl der Räder unabhängig war. Auf nassen Wegen wuchs der Widerstand mit abnehmender Radkranz-

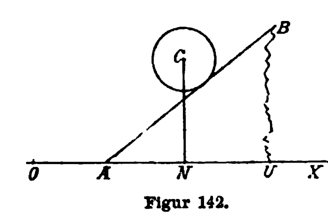
breite. Wenn die Geschwindigkeiten vom langsamen Schritt bis zum Galopp sich steigerten, so wuchs der Widerstand auf nassen Wegen nicht fühlbar mit der Geschwindigkeit, aber auf soliden Wegen nahm er mit der Geschwindigkeit zu, wenn viele Unebenheiten in der Bahn vorhanden waren. Als annäherndes Resultat wurde gefunden, dass der Widerstand durch eine Formel von der Gestalt $a + b\,V$ ausgedrückt werden könnte, wo a und b Konstante bedeuten, die von der Beschaffenheit des Weges und der Starrheit des Wagens abhängen, und V die Geschwindigkeit des Wagens bezeichnet.

Morin's analytische Bestimmung des Wertes von P stimmt mit der hier gegebenen im Ganzen nicht überein, aber dieses beeinflusst nicht materiell den Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung. Siehe seine Notions Fondamentales de Mécanique, Paris 1855. Es ist leicht zu sehen, dass Morin's Versuchsresultate geneigt sind, die Gesetze der rollenden Reibung zu bestätigen.

Routh, Dynamics, p. 129.

5. Ein Cylinder rollt, ohne zu gleiten, auf einer geneigten Ebene herab, welche eine Fläche eines sich mit seiner Basisebene auf eine vollkommen glatte, horizontale Ebene stützenden Körpers bildet. Der Körper ist frei entlang der Stützfläche beweglich. Wie ist die Bewegung der Ebene und diejenige des Cylinders beschaffen?

Wir setzen voraus, dass die Axe des Cylinders horizontal ist und eine zu der Axe rechtwinkelige, durch den Schwerpunkt C des Cylinders gehende vertikale Ebene den Schwerpunkt des Körpers enthält. Es sei OX die Projektion des Schnittes dieser vertikalen Ebene und der glatten horizontalen Fläche, AB diejenige der geneigten Ebene (Fig. 142), C die Projektion des Schwerpunktes des Cylinders zu einer beliebigen Zeit während der Bewegung, CN eine zu OAX normale gerade Linie. Ferner sei R die Reaktion der geneigten Ebene auf den Cylinder, F die Wirkung dieser Ebene auf den Cylinder, entlang AB, $M =$ der Masse des Cylinders, Mk^2 sein Trägheitsmoment für seine Axe, $m =$ der Masse des Körpers BAU, O ein fester Punkt in der Geraden AX, $ON = x$, $CN = y$, $OA = x'$, $\vartheta =$ dem Winkel, durch welchen sich der Cylinder um seine Axe in der Zeit t dreht, $\alpha =$ der Horizontalneigung von AB, $a =$ dem Halbmesser des Cylinders.



Figur 142.

Damit erhalten wir für die Bewegung des Cylinders

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -R\sin\alpha + F\cos\alpha, \quad (1) \qquad M\frac{d^2y}{dt^2} = R\cos\alpha + F\sin\alpha - Mg, \quad (2)$$

$$Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Fa, \quad (3)$$

und für die Bewegung des Körpers ABU, welche nur translatorisch ist,

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = R\sin\alpha - F\cos\alpha. \quad (4)$$

Die Gleichungen (1) und (4) geben

$$M\frac{d^2 x}{dt^2} + m\frac{d^2 x'}{dt^2} = 0. \tag{5}$$

Ferner besteht die geometrische Relation

$$y \cos\alpha = a + (x - x')\sin\alpha,$$

so dass
$$\cos\alpha\frac{d^2 y}{dt^2} = \sin\alpha\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{d^2 x'}{dt^2}\right),$$

und demnach mit (5)

$$m\cos\alpha\frac{d^2 y}{dt^2} = (M+m)\sin\alpha\frac{d^2 x}{dt^2}. \tag{6}$$

Auch muss sein, weil kein Gleiten zwischen Cylinder und Ebene stattfindet,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} - a\cos\alpha\frac{d\vartheta}{dt},$$

und daher
$$a\cos\alpha\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2} - \frac{d^2 x}{dt^2},$$

folglich erhalten wir mit (5)

$$m\, a\cos\alpha\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -(M+m)\frac{d^2 x}{dt^2}. \tag{7}$$

Weiter ist mit (1) und (2)

$$M\cos\alpha\frac{d^2 x}{dt^2} + M\sin\alpha\frac{d^2 y}{dt^2} = F - Mg\sin\alpha,$$

und daher durch (3)

$$a\cos\alpha\frac{d^2 x}{dt^2} + a\sin\alpha\frac{d^2 y}{dt^2} = k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - a g\sin a.$$

Indem wir nun die durch (6) und (7) gegebenen Werte von $\frac{d^2 y}{dt^2}$ und $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ in diese Gleichung einführen, bekommen wir

$$\{m\, a^2\cos^2\alpha + (M+m)(a^2\sin^2\alpha + k^2)\}\frac{d^2 x}{dt^2} = -m\, a^2 g\sin\alpha\cos\alpha. \tag{8}$$

Damit zeigt es sich, dass der Wert von $\frac{d^2 x}{dt^2}$ während der ganzen Bewegung konstant ist. Die Werte von $\frac{d^2 x'}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ können nun leicht mit Hilfe der Gleichungen (5), (6), (7) erhalten werden. Setzen wir in (8) $k^2 = \frac{1}{2}a^2$, so wird

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{m g\sin 2\alpha}{2m\cos^2\alpha + (M+m)(2\sin^2\alpha + 1)} = -b. \tag{9}$$

Damit geben die Gleichungen (5), (6), (7)

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{M}{m} b, \quad (10) \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{M+m}{m} b \, tg\, \alpha, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \frac{M+m}{m a} b \sec \alpha, \quad (12)$$

welche Werthe also ebenfalls während der ganzen Bewegung konstant sind.

Nun sei beim Beginn der Bewegung $t=0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $x'=x'_0$, $\vartheta=0$, $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=0$, $\frac{dx'}{dt}=0$, $\frac{d\vartheta}{dt}=0$, dann giebt die Integration der Gleichungen (9) bis (12)

$$\frac{dx}{dt} = -b t, \qquad x = x_0 - \frac{1}{2} b t^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{M+m}{m} b \, tg\, \alpha \, . \, t, \qquad y = y_0 - \frac{1}{2} \frac{M+m}{m} b \, tg\, \alpha \, . \, t^2,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{M+m}{m a} b \sec \alpha \, . \, t, \qquad \vartheta = \frac{1}{2} \frac{M+m}{m a} b \sec \alpha \, . \, t^2,$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{M}{m} b t, \qquad x' = x'_0 + \frac{1}{2} \frac{M}{m} b t^2,$$

womit die Bewegungen nun durchweg bekannt sind.

Eliminieren wir zwischen den Gleichungen für x und y die Zeit t, so erhalten wir die Gleichung der absoluten Bahn des Schwerpunktes C des Cylinders, nämlich

$$y = y_0 - \frac{M+m}{m} tg\, \alpha (x_0 - x),$$

was zeigt, dass dieser Punkt eine gerade Linie beschreibt.

Der Reibungswiderstand F bestimmt sich mittelst der Gleichungen (3) und (12), es ist

$$F = \frac{M k^2}{a} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \frac{M a}{2} \frac{d^2 \vartheta}{d^2 t} = \frac{1}{2} (M+m) b \sec \alpha. \quad (13)$$

Die Reaktion R kann nun durch die Gleichungen (1), (9) und (13) gefunden werden, wir bekommen

$$-b M = -R \sin \alpha + \frac{1}{2} (M+m) b, \qquad R \sin \alpha = \frac{1}{2} b (3 M + m),$$

$$R = \frac{1}{2} b \frac{3 M + m}{\sin \alpha}. \quad (14)$$

Der Reibungswiderstand und die Reaktion R sind also auch konstant während der ganzen Bewegung.

Walton, p. 520.

6. Ein rauher Körper befindet sich auf der flachen Fläche eines rauhen Brettes, welches auf einer horizontalen Ebene liegt. Das Brett

wird entlang der Ebene mit einer gegebenen Geschwindigkeit bewegt. Welches ist die Bewegung des Körpers und des Brettes, wenn die durch die Schwerpunkte des Körpers und des Brettes gehende vertikale Ebene zu der Bewegungsrichtung des Brettes parallel ist?

Es sei (Fig. 143) OA der Schnitt dieser vertikalen Ebene mit der horizontalen Ebene, beim Beginne der Bewegung mögen die Schwerpunkte S, S' des Brettes und des Körpers in einer vertikalen Linie liegen, welche die horizontale Ebene in O schneidet. Ferner sei zu einer beliebigen Zeit t, gerechnet vom Beginne der Bewegung an, $OS = x$, $OS' = x'$, $v_0 =$ der Anfangsgeschwindigkeit des Brettes, $m_1 =$ seiner Masse, $m_2 =$ derjenigen des Körpers, $\mu =$ dem Coëfficienten der gleitenden Reibung zwischen Körper und Brett.

Figur 143.

Die Kraft der Reibung, welche das Brett verzögert und den Körper beschleunigt, ist gleich $\mu m_2 g$, daher die an dem Brette thätige Verzögerung $\frac{\mu m_2 g}{m_1}$, welche konstant ist, so dass wir für die Bewegung des Brettes erhalten

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \mu \frac{m_2}{m_1} g t, \qquad x = v_0 t - \frac{1}{2} \mu \frac{m_2}{m_1} g t^2.$$

Die Beschleunigung des Körpers ist μg, welche also auch konstant ist, daher für seine Bewegung

$$\frac{dx'}{dt} = \mu g t, \qquad x' = \frac{1}{2} \mu g t^2.$$

Die gleitende Reibung wirkt so lange als das Brett sich rascher wie der Körper bewegt und hört in dem Momente auf thätig zu sein, in welchem die Geschwindigkeiten beider Körper gleich sind. Die Zeit, wann dieses stattfindet, wird daher durch die Gleichung gefunden

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt},$$

d. i.

$$v_0 - \mu \frac{m_2}{m_1} g t = \mu g t,$$

woraus folgt

$$t = \frac{m_1 v_0}{\mu (m_1 + m_2) g}.$$

In diesem Momente ist

$$\frac{dx'}{dt} = \mu g t = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

Mit dieser, von der Grösse des Reibungswiderstandes unabhängigen Geschwindigkeit werden sich sodann das Brett und Körper für immer zu-

sammen weiter bewegen. Der Weg s, welchen das System zu beschreiben hat, ehe es in diesen Zustand eintritt, ist

$$s = \frac{1}{2} \mu g t^2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{v_0{}^2}{2 \mu g}.$$

7. Ein rauher Kreiscylinder, dessen Schwerpunkt nicht in seiner Axe liegt, befindet sich in einer nahe mit einer stabilen Gleichgewichtslage zusammenfallenden Stellung auf einem Brette, welches sich auf eine glatte, horizontale Ebene stützt. Wie gross ist die Länge des einfachen Pendels, welches mit den Schwingungen des Systemes isochron vibriert?

Wenn c die kürzeste Distanz des Schwerpunktes des Brettes von der Oberfläche des Cylinders, k den Trägheitshalbmesser des Cylinders für eine durch seinen Schwerpunkt gehende zu seiner Axe parallele Linie, m_1 die Masse des Cylinders, m_2 diejenige des Brettes bezeichnet, dann ist die Länge des Pendels durch die Gleichung gegeben

$$l h = k^2 + \frac{m_2 c^2}{m_1 + m_2}.$$

Walton, p. 522.

Siebentes Kapitel.

Bewegung eines unveränderlichen Systemes in drei Richtungen.

„Wenn ein Körper sich um eine seiner Hauptaxen bewegt und die auf denselben wirkenden Kräfte die Richtung dieser Axe nicht verändern, dann wird diese Hauptaxe, da die Bewegung des Schwerpunktes des Körpers so beschaffen ist, als wenn alle auf den Körper wirkenden Kräfte bei unveränderter Richtung daselbst ihren Angriffspunkt besässen und die ganze Masse des Körpers in diesem Punkte vereinigt wäre, stets eine zu sich selbst parallele Richtung, wie eine permanente Rotationsaxe besitzen, und die Winkelbeschleunigung um diese Axe wird dieselbe sein, als wenn sie eine feste Axe wäre". Dieses ist die durch Euler gegebene Erklärung der Prinzipalaxen. (Theoria Motus Corporum Solidorum, p. 175: „Axes principales cujusque corporis sunt tres illi axes per ejus centrum inertiae transeuntes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima".) Die Entdeckung der Existenz von drei Hauptaxen, als Axen permanenter Rotation, in jedem Körper ist dem Göttinger Professor Segner zu verdanken, sie wurde von ihm der Welt durch eine Abhandlung mitgeteilt, welche den Titel führt „Specimen Theoriae Turbinum" und im Jahre 1755 in Halle erschien. Eine vollständige Entwickelung der Theorie der Rotation um permanente Axen findet der Leser in Euler's Theoria Motus Corporum Solidorum, cap. VIII, einem Werke von dem grössten Werte für jene, welche eine gründliche Einsicht von dem Wesen der Bewegung fester Körper zu erlangen wünschen.

Wenn ein Körper sich in einem beliebigen Zeitmomente um eine Axe dreht, welche nicht Hauptaxe ist, so wird diese Axe keine permanente Rotationsaxe sein,

der Körper wird sich vielmehr nach und nach um eine Reihe von Momentanaxen drehen, deren Lagen sowohl in Bezug auf den Körper als auch in Bezug auf den absoluten Raum verschieden sind. Die Lösung des grossen physikalischen Problemes der Verrückung der Tag- und Nachtgleichen, veröffentlicht durch D'Alembert in dem Jahre 1749 (Recherches sur la Précession des Équinoxes, 1749), entfaltete eine vollständige Methode für die Untersüchung des allgemeinen Problemes der Rotation. In dem folgenden Jahre wurde durch Euler eine Arbeit der Öffentlichkeit übergeben, welche den Titel führt „Découverte d'un nouveau principe de Mécanique", sie hatte den Zweck allgemeine Formeln für die Bewegung eines Körpers unter den allgemeinsten Verhältnissen von Bewegung und Kraft zu erforschen (Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1750). Jedoch wurden die Gleichungen, welche unter der einfachsten Gestalt die allgemeinen Bedingungen für die Rotation geben, erst im Jahre 1758 durch Euler (Ibid. 1758) mitgeteilt; er bediente sich bei seiner Entwickelung des Vereinfachungsprinzipes, welches durch die kürzliche Entdeckung Segner's (Specimen Theoriae Turbinum, 1755), betreffend die Existenz dreier Hauptaxen in einem materiellen Körper, bekannt geworden war. Die Betrachtung des allgemeinen Rotationsproblemes wurde von D'Alembert wieder aufgenommen und unter seiner allgemeinsten Beziehung dargestellt in dem ersten Bande seiner Opuscules Mathématiques, veröffentlicht in dem Jahre 1761, woselbst er sich missbilligend über den Titel ausdrückte, welchen Euler seiner Abhandlung von 1749 vorangesetzt hat, mit Rücksicht auf seine eigene Untersuchung der Verrückung der Tag- und Nachtgleichen. Der Gegenstand der Rotation wurde gründlich erforscht und durch Beispiele erläutert von Euler in seiner Theoria Motus Corporum Solidorum et Rigidorum, welche in dem Jahre 1767 erschien. Dieselbe Sache untersuchte später Lagrange mit Hilfe der allgemeineren Prinzipien der Analysis (Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1753; Mécanique Analytique, Seconde Partie, Section IX.). In dem Jahre 1777 erschien eine Arbeit von Landen (Philosophical Transactions, 1777) unter dem Titel: „A new Theory of the Rotatory Motion of Bodies affected by Forces disturbing such motion", in welcher er sich unzufrieden äussert über die Schlüsse der grossen kontinentalen Philosophen, betreffend den Gegenstand der Rotation. Einige Jahre später nahm Landen (Ibid. 1785) dieselbe Sache wieder auf, entwickelte vollständiger seine eigenen Anschauungen und bestand auf seinem Widerspruch gegen die Lehren seiner Vorgänger. Es existiert ein Aufsatz von Wildbore in den Philosophical Transactions für das Jahr 1790, in welchem dieser Gegenstand unter einem neuen Gesichtspunkte betrachtet worden ist. Die Schlüsse dieses Schriftstellers sind der Sache Landen's ungünstig, dessen Ansichten in der That nun allgemein erschöpft sind. Der Leser, welcher die Geschichte der Theorie der Rotation und Landen's Streit näher kennen zu lernen wünscht, wird verwiesen auf einen Aufsatz von Mr. Whewell in dem zweiten Bande der Cambridge Philosophical Transactions, 1827. Die Untersuchung von Euler's allgemeinen Gleichungen für die rotatorische Bewegung ist mit grosser Eleganz und Einfachheit von Mr. O'Brien in dem fünften Kapitel seiner Mathématical Tracts, Part. I bewirkt worden.

Die Probleme dieses Kapitels, welche vollständig gelöst oder zur Übung vorgeschlagen werden, erfordern die Kenntnis der Theorie der Bewegung eines unveränderlichen, materiellen Systemes in drei Richtungen, welche der Studierende in jedem Lehrbuche der höheren Mechanik findet, worauf verwiesen werden muss.

Erster Abschnitt.

Bewegung ohne Berücksichtigung der Reibungswiderstände.

1. Eine ebene, gleichförmig dicke und dichte Platte, auf welche keine äusseren Kräfte wirken, wird begrenzt von einer Curve mit der Polargleichung

$$r = a + b\,sin^2 2\,\vartheta$$

und bewegt sich um ihren Pol als einen festen Punkt. Wie ist der von ihrer Momentanaxe im Raume beschriebene Kegel beschaffen?

Die Trägheitsmomente der Platte für den Primradiusvector und eine in der Ebene der Platte liegende, durch den Pol gehende, zu diesem Fahrstrahle senkrechte, gerade Linie, welche Hauptaxen für den Pol sind, sind einander gleich. Folglich erhalten wir durch Euler's Gleichungen, wenn ω_1, ω_2, ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten um diese zwei Axen und die in ihrem Schnitte auf der Ebene der Platte senkrecht stehende Hauptaxe bezeichnen,

$$\frac{d\,\omega_1}{d\,t} = -\,\omega_2\,\omega_3, \qquad \frac{d\,\omega_2}{d\,t} = \omega_3\,\omega_1, \qquad \frac{d\,\omega_3}{d\,t} = 0.$$

Daraus ergiebt sich

$$\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 = \alpha^2, \qquad \omega_3 = \gamma,$$

wo α und γ konstante Grössen bedeuten. Nennen wir nun die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe ω, so ist

$$\omega_2 = \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \omega_3{}^2 = \alpha^2 + \gamma^2.$$

Bezeichnet ferner ϱ den Radiusvector des zu der Platte gehörigen Trägheitsellipsoides von Poinsot, welcher mit der Momentanaxe zusammenfällt, p das von dem Centrum auf die Tangentialebene des Ellipsoides in dem Endpunkte dieses Fahrstrahles gefällte Perpendikel, so finden wir

$$\frac{p}{r} = \frac{T}{G\,\omega},$$

wenn $A\,(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2) + C\,\omega_3{}^2 = A\,(\alpha^2 + \beta^2) + C\,\gamma^2 = T$

$$\left\{ A^2\,(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2) + C^2\,\omega_3{}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (A^2\,\alpha^2 + C^2\,\gamma^2)^{\frac{1}{2}} = G$$

gesetzt wird, A, A, C die Trägheitsmomente für die Hauptaxen bedeuten.

Daraus ergiebt sich

$$\frac{p}{\varrho} = Konst.$$

Aber die Lage des Perpendikels p ist absolut fest im Raume, der Fahrstrahl ϱ fällt mit der Momentanaxe zusammen, folglich ist der von der Momentanaxe im Raume beschriebene Kegel ein gerader Kegel.

2. Ein von äusseren Kräften nicht beanspruchter Rotationskörper dreht sich um einen mit seinem Schwerpunkte zusammenfallenden festen Punkt. Die Momentanaxe und die geometrische Axe des Körpers sind zu der invariablen Linie gleich geneigt. Welches ist die Grösse dieser Neigung?

Es bezeichne C das Trägheitsmoment für die geometrische Axe, A dasjenige für eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende, zu der geometrischen Axe senkrechte Linie. Nehmen wir die Hauptaxen für den festen Punkt als Coordinatenaxen, so sind die Gleichungen der Momentanaxe

$$\frac{x}{\omega_1} = \frac{y}{\omega_2} = \frac{z}{\omega_3},$$

und diejenigen der invariablen Linie

$$\frac{x}{A\omega_1} = \frac{y}{A\omega_2} = \frac{z}{C\omega_3}.$$

Weil die Neigungen der invariablen Linie zu der Momentanaxe und der geometrischen Axe einander gleich sind, so erhalten wir mit der geometrischen Axe, welche eine Hauptaxe ist, als Axe der z

$$\frac{A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + C\omega_3^2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}\sqrt{A^2\omega_1^2 + A^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2}} = \frac{C\omega_3}{\sqrt{A^2\omega_1^2 + A^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2}},$$

$$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C\omega_3^2 = C\omega_3\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2},$$

$$A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + 2AC\omega_3^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) = C^2\omega_3^2(\omega_1^2 + \omega_2^2).$$

$$A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) = C(C - 2A)\omega_3^2. \tag{1}$$

Bezeichnet ϑ die Neigung der invariablen Linie zu einer der Axen, dann ist

$$\cos\vartheta = \frac{C\omega_3}{\sqrt{A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C^2\omega_3^2}},$$

$$\cos 2\vartheta = \frac{C^2\omega_3^2 - A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C^2\omega_3^2} = \frac{A}{C - A}.$$

Die Relation (1) zeigt, dass die Hypothese unmöglich ist, wenn C kleiner als $2A$ ist.

3. Von einer starren, ebenen, durch keine äusseren Kräfte in Anspruch genommenen Platte ist ein Punkt fest, um welchen sich die Platte frei drehen kann. Der Platte wird eine Winkelgeschwindigkeit um eine Linie in ihrer Ebene, für welche das Trägheitsmoment bekannt ist, mitgeteilt. Wie ist das Verhältnis aus der grössten und der kleinsten Winkelgeschwindigkeit der Platte beschaffen?

Es seien A, B die Trägheitsmomente für die Hauptaxen durch den

festen Punkt in der Ebene der Platte, C sei das Trägheitsmoment für die dritte Hauptaxe. Bei Anwendung der gewöhnlichen Bezeichnungen haben wir

$$\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \omega_3{}^2 = \omega^2,$$

$$A\,\omega_1{}^2 + B\,\omega_2{}^2 + C\,\omega_3{}^2 = T, \qquad A^2\,\omega_1{}^2 + B^2\,\omega_2{}^2 + C^2\,\omega_3{}^2 = G^2,$$

wo T und G bekanntlich gewisse Konstante sind.

Ist Q das gegebene Trägheitsmoment, α die Neigung der anfänglichen Rotationsaxe zu der dem Momente A entsprechenden Hauptaxe, ω' die anfängliche Winkelgeschwindigkeit, so bestehen die Relationen

$$\omega'^2 (A \cos^2\alpha + B \sin^2\alpha) = T, \qquad \omega'^2 (A^2 \cos^2\alpha + B^2 \sin^2\alpha) = G^2,$$

wodurch
$$\frac{T}{G^2} = \frac{Q}{Q(A+B) - A.B}. \tag{1}$$

Ferner haben wir

$$\omega^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = (\lambda_1 - \omega^2)(\lambda_2 - \omega^2)(\lambda_3 - \omega^2), \tag{2}$$

wo
$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 = \frac{T(B+C) - G^2}{B.C}, \qquad \lambda_2 = \frac{T(C+A) - G^2}{C.A}, \\ \lambda_3 = \frac{T(A+B) - G^2}{A.B}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt

$$\frac{\lambda_1}{T} = \frac{Q(C-A) + A.B}{B.C.Q} = \frac{Q+A}{C.Q},$$
$$\frac{\lambda_2}{T} = \frac{Q(C-B) + A.B}{A.C.Q} = \frac{Q+B}{C.Q},$$
$$\frac{\lambda_3}{T} = \frac{1}{Q} = \frac{A+B}{C.Q}.$$

Nehmen wir A grösser als B an, dann ist durch die Relation $Q = A \cos^2\alpha + B \sin^2\alpha$ klar, dass Q kleiner als A und grösser als B ist. Folglich ist es durch die Formeln für λ_1, λ_2, λ_3 offenbar, dass λ_1 am grössten und λ_3 grösser als λ_2 ist. Auch haben wir, weil $C = A + B$, $\lambda_3 = \frac{T}{Q} = \omega'^2$. Mithin ist anfangs ω^2 grösser als λ_2, und daher kann, weil $\omega^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$ positiv ist, nach (2) ω^2 nicht grösser als λ_1 sein und nicht kleiner als λ_3 werden. Sonach ist das Verhältnis der grössten zu der kleinsten Winkelgeschwindigkeit der Platte

$$\sqrt{A+Q} : \sqrt{A+B}.$$

4. Die Axe eines Umdrehungskörpers, dessen Scheitel fest ist, ist um die Vertikale mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit, bei gegebener

Neigung in Rotation versetzt, ohne irgend eine Drehung des Körpers um seine geometrische Axe. Welches ist die Differentialgleichung zur Bestimmung der Vertikalneigung der geometrischen Axe in irgend einer zukünftigen Zeit?

Es sei α die Vertikalneigung der geometrischen Axe zu Anfang, ϑ ihre Vertikalneigung am Ende einer beliebigen Zeit t, A das Trägheitsmoment für eine durch den Scheitel O gehende, zu der geometrischen Axe rechtwinkelige Linie, h der Abstand des Schwerpunktes des Körpers von seinem Scheitel. Ferner sei ω_3 die Winkelgeschwindigkeit um die geometrische Axe OC zu einer beliebigen Zeit; ω_1, ω_2 seien die Winkelgeschwindigkeiten um die beiden anderen Hauptaxen OA, OB, welche in fester Relation zu dem Körper, während der ganzen Bewegung, stehend gedacht sind, zu derselben Zeit. Endlich bezeichne m die Masse des Körpers, ω die gegebene anfängliche Winkelgeschwindigkeit seiner Axe, und Z sei vertikal unter O. Die Vertikalkraft mg ist äquivalent den beiden Kräften $mg\cos\vartheta$, welche entlang OC, und $mg\sin\vartheta$, welche rechtwinkelig zu OC in der Ebene ZC wirkt, wovon die erstere Componente keinen Einfluss auf die Bewegung besitzt. Die Componente $mg\sin\vartheta$ ist äquivalent den zwei Kräften $mg\sin\vartheta\sin\varphi$ in der Ebene BOC und $mg\sin\vartheta\cos\varphi$ in der Ebene COA, die Momente dieser zwei Kräfte um OA, OB sind $-mgh\sin\vartheta\sin\varphi$, $-mgh\sin\vartheta\cos\varphi$ resp.

Durch die dritte der Bewegungsgleichungen von Euler ist $\frac{d\omega_3}{dt}=0$, daher $\omega_3 = Konst$; diese Geschwindigkeit ist aber anfangs gleich Null, folglich ist sie immer gleich Null.

Die zwei ersten Euler'schen Gleichungen geben

$$A\frac{d\omega_1}{dt} = -mgh\sin\vartheta\sin\varphi, \quad (1) \qquad A\frac{d\omega_2}{dt} = -mgh\sin\vartheta\cos\varphi. \quad (2)$$

Die Relationen zwischen ω_1, ω_2, ω_3, ϑ, φ, ψ sind, weil $\omega_3 = 0$ ist,

$$\omega_1 = \frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi - \frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta\cos\varphi, \tag{3}$$

$$\omega_2 = \frac{d\vartheta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta\sin\varphi, \tag{4}$$

$$0 = \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}. \tag{5}$$

Mit (3) und (5) bekommen wir

$$\omega_1\cos\vartheta = \frac{d}{dt}(\sin\vartheta\sin\varphi), \tag{6}$$

mit (4) und (5)

$$\omega_2 \cos\vartheta = \frac{d}{dt}(\sin\vartheta\cos\varphi). \tag{7}$$

Nun geben die Gleichungen (1) und (6), sowie die Gleichungen (2) und (7)

$$A\frac{d^2\omega_1}{dt^2} = -mgh\omega_1\cos\vartheta, \qquad A\frac{d^2\omega_2}{dt^2} = -mgh\omega_2\cos\vartheta,$$

daher ist

$$\omega_2\frac{d^2\omega_1}{dt^2} - \omega_1\frac{d^2\omega_2}{dt^2} = 0, \qquad \omega_2\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_1\frac{d\omega_2}{dt} = C, \tag{8}$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet.

Mit (1), (2), (6), (7), (8) finden wir, dass

$$\sin\vartheta\sin\varphi\left(\frac{d\vartheta}{dt}\cos\vartheta\cos\varphi - \frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta\sin\varphi\right)$$
$$-\sin\vartheta\cos\varphi\left(\frac{d\vartheta}{dt}\cos\vartheta\sin\varphi + \frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta\cos\varphi\right) = C'\cos\vartheta,$$

wo C' konstant ist, daher erhalten wir

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{C'\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}. \tag{9}$$

Weiter ergiebt sich durch (3), (4), (5), (9)

$$\omega_1 = \frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi - \frac{C'\cos\varphi}{\sin\vartheta}, \qquad \omega_2 = \frac{d\vartheta}{dt}\cos\varphi + \frac{C'\sin\varphi}{\sin\vartheta},$$

demnach ist

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{C'^2}{\sin^2\vartheta}. \tag{10}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{1}{2}A\frac{d}{dt}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = -mgh\sin\vartheta(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)$$
$$= -mgh\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \text{durch (3) und (4).}$$

Sonach wird

$$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) = C'' + 2mgh\cos\vartheta,$$

und mithin durch (10)

$$A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{A\,.\,C'^2}{\sin^2\vartheta} = C'' + 2mgh\cos\vartheta.$$

Aber anfangs ist $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, $\vartheta = \alpha$, folglich

$$\frac{A\,.\,C'^2}{\sin^2\alpha} = C'' + 2mgh\cos\alpha,$$

daher

$$A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + A\,.\,C'^2\left(\frac{1}{\sin^2\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = 2mgh(\cos\vartheta - \cos\alpha).$$

Weil ferner anfangs $\frac{d\psi}{dt} = \omega$, $\vartheta = \alpha$, so ist vermöge (5) der Anfangswert von $\frac{d\varphi}{dt} = -\omega \cos\alpha$, sonach durch (9)

$$\omega \cos\alpha = \frac{C' \cos\alpha}{\sin^2\alpha}, \qquad C' = \omega \sin^2\alpha.$$

Mithin geht unsere Gleichung über in

$$A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + A\,\omega^2 \sin^4\alpha \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = 2\,m\,g\,h\,(\cos\vartheta - \cos\alpha),$$

$$A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\,m\,g\,h\,(\cos\vartheta - \cos\alpha) + \frac{A\,\omega^2 \sin^2\alpha}{\sin^2\vartheta}(\cos^2\alpha - \cos^2\vartheta),$$

$$A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = (\cos\vartheta - \cos\alpha)\cdot\left\{2\,m\,g\,h - \frac{A\,\omega^2 \sin^2\alpha}{\sin^2\vartheta}(\cos\vartheta + \cos\alpha)\right\},$$

welches die verlangte Relation ist.

5. Eine kreisförmige Platte rotiert um eine durch ihren Mittelpunkt gehende zu ihrer Ebene senkrechte Axe. Die Platte besitzt eine gegebene Horizontalneigung und befindet sich auf einer glatten, horizontalen Ebene. Wie ist die Bewegung dieses Körpers beschaffen?

Es sei a der Halbmesser der Platte, m ihre Masse, A ihr Trägheitsmoment für einen Durchmesser, R die Reaktion der glatten Ebene. Ferner seien ω_1, ω_2, ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten um die Hauptaxen durch das Centrum der Platte zu einer beliebigen Zeit t. Weiter bezeichne γ den Anfangswert von ω_3, welches die Winkelgeschwindigkeit um die zu der Ebene der Platte senkrechte Hauptaxe ist, ϑ die Horizontalneigung der Platte zu der Zeit t

Mit diesen Notationen haben wir hier

$$R = m\left(g + a\frac{d^2}{dt^2}\sin\vartheta\right).$$

Nun ist R äquivalent den beiden Kräften $R \sin\vartheta$, entlang der Ebene der Platte, welche keinen Einfluss auf die Rotation besitzt, und $R\cos\vartheta$, rechtwinkelig zu dieser Ebene. Die letztere Componente hat die Momente $-R\,a \cos\vartheta \sin\varphi$, $-R\,a\cos\vartheta\cos\varphi$ um die Hauptaxen, auf welche sich die Geschwindigkeiten ω_1, ω_2 resp. beziehen. Folglich erhalten wir durch Euler's Gleichungen:

$$A\frac{d\omega_1}{dt} = -A\,\omega_2\,\omega_3 - m\,a\cos\vartheta\sin\varphi\left(a\frac{d^2}{dt^2}\sin\vartheta + g\right), \tag{1}$$

$$A\frac{d\omega_2}{dt} = A\,\omega_3\,\omega_1 - m\,a\cos\vartheta\cos\varphi\left(a\frac{d^2}{dt^2}\sin\vartheta + g\right), \tag{2}$$

$$\omega_3 = \gamma. \tag{3}$$

Ferner ist

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi, \quad (4) \qquad \sin\vartheta \frac{d\psi}{dt} = -\omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi, \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (6)$$

Nun erhalten wir mit (1) und (2)

$$A\left(\cos\varphi \frac{d\omega_1}{dt} - \sin\varphi \frac{d\omega_2}{dt}\right) = -A\omega_3(\omega_2\cos\varphi + \omega_1\sin\varphi),$$

$$= -A\omega_3 \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \text{mit (4)},$$

folglich

$$A\frac{d}{dt}(\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi) + A(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = -A\omega_3\frac{d\vartheta}{dt},$$

daher zufolge (4)

$$A\frac{d}{dt}(\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi) + A\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -A\omega_3\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi) + \left(\omega_3 + \frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

Aber mit (5) und (6) ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \gamma - \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta = \gamma - \operatorname{cotg}\vartheta(\omega_2\sin\varphi - \omega_1\cos\varphi),$$

folglich, wenn wir die Gleichung (3) beachten,

$$\frac{d}{dt}(\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi) + \frac{d\vartheta}{dt}\left\{2\gamma - \operatorname{cotg}\vartheta(\omega_2\sin\varphi - \omega_1\cos\varphi)\right\} = 0,$$

$$\sin\vartheta\, d(\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi) + d\vartheta\left\{2\gamma\sin\vartheta + \cos\vartheta(\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi)\right\} = 0,$$

$$\sin\vartheta(\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi) - 2\gamma\cos\vartheta = C.$$

Aber anfangs ist $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, so dass, wenn ε den Anfangswert von ϑ bezeichnet,

$$\sin\vartheta(\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi) = 2\gamma(\cos\vartheta - \cos\varepsilon). \qquad (7)$$

Weiter erhalten wir mit (1), (2) und (4)

$$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) = Konst. - m a^2\left(\frac{d}{dt}\sin\vartheta\right)^2 - 2mga\sin\vartheta$$

und, weil $A = \frac{1}{4}ma^2$ ist,

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = Konst. - 4\cos^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - 8\frac{g}{a}\sin\vartheta.$$

Anfangs ist aber $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\vartheta = \varepsilon$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, folglich

$$0 = Konst. - 8\frac{g}{a}\sin\varepsilon,$$

mithin

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4 \cos^2\vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 8\frac{g}{a}(\sin\varepsilon - \sin\vartheta). \tag{8}$$

Quadrieren wir die Gleichungen (4), (5) und addieren die Resultate, so kommt

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2,$$

daher wird mittelst (8)

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 8\frac{g}{a}(\sin\varepsilon - \sin\vartheta) - 4\cos^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2. \tag{9}$$

Ferner geben die Gleichungen (5) und (7)

$$\sin^2\vartheta\frac{d\psi}{dt} = 2\gamma(\cos\varepsilon - \cos\vartheta), \tag{10}$$

sowie die Gleichungen (9) und (10)

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2(1 + 4\cos^2\vartheta) = 8\frac{g}{a}(\sin\varepsilon - \sin\vartheta) - \frac{4\gamma^2}{\sin^2\vartheta}(\cos\varepsilon - \cos\vartheta)^2. \tag{11}$$

Die Gleichung (11) bestimmt ϑ als Funktion der Zeit, sodann giebt die (10) ψ als Funktion von t und daher liefert die (6) φ als Funktion von t.

Wählen wir $a\gamma^2$ im Vergleich zu g sehr gross, dann ist offenbar in (11) die positive Grösse $\left(\frac{\cos\varepsilon - \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2$ im Vergleich mit $(\sin\varepsilon - \sin\vartheta)$ klein, d. h. $\frac{(\cos\varepsilon - \cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta(\sin\varepsilon - \sin\vartheta)}$ ist eine kleine Grösse. Weil indessen der Nenner nicht gross sein kann, so muss der Zähler klein sein, folglich $\vartheta = \eta + \varepsilon$, wenn η eine kleine Grösse bedeutet. Dadurch nimmt die Gleichung (11) die Gestalt an

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2(1 + 4\cos^2\varepsilon) = \frac{8g}{a}\left(\frac{1}{2}\eta^2\sin\varepsilon - \eta\cos\varepsilon\right) - 4\gamma^2\eta^2,$$

so dass

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}(1 + 4\cos^2\varepsilon) + \frac{4}{a}(a\gamma^2 - g\sin\varepsilon)\eta + \frac{4g}{a}\cos\varepsilon = 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\eta + \frac{g\cos\varepsilon}{a\gamma^2 - g\sin\varepsilon}\right) + \frac{4}{a}\cdot\frac{a\gamma^2 - g\sin\varepsilon}{1 + 4\cos^2\varepsilon}\left(\eta + \frac{g\cos\varepsilon}{a\gamma^2 - g\sin\varepsilon}\right) = 0,$$

woraus folgt, wenn λ und μ konstante Grössen bezeichnen,

$$\eta + \frac{g\cos\varepsilon}{a\gamma^2 - g\sin\varepsilon} = \lambda\cos\left\{\left(\frac{4}{a}\cdot\frac{a\gamma^2 - g\sin\varepsilon}{1 + 4\cos^2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} t + \mu\right\}.$$

Aber anfangs ist $\eta = 0$, und $\frac{d\eta}{dt} = 0$, folglich

$$\mu = 0, \qquad \lambda = \frac{g\cos\varepsilon}{a\gamma^2 - g\sin\varepsilon},$$

wodurch

$$\eta = -\frac{g \cos \varepsilon}{a\gamma^2 - g \sin \varepsilon} \operatorname{vers} \left\{ \left(\frac{4}{a} \cdot \frac{a\gamma^2 - g \sin \varepsilon}{1 + 4 \cos^2 \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} t \right\}.$$

Somit wird, wenn z die Höhe des Schwerpunktes der Platte über der glatten Ebene bezeichnet,

$$z = a \sin \vartheta = a (\sin \varepsilon + \eta \cos \varepsilon),$$

$$z = a \sin \varepsilon - \frac{a g \cos^2 \varepsilon}{a\gamma^2 - g \sin \varepsilon} \operatorname{vers} \left\{ \left(\frac{4}{a} \cdot \frac{a\gamma^2 - g \sin \varepsilon}{1 + 4 \cos^2 \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} t \right\},$$

womit die Bewegung des Schwerpunktes der Platte vollständig bestimmt ist, es zeigt sich, dass die Periode seiner Schwingungen gleich

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{a(1 + 4 \cos^2 \varepsilon)}{2 a\gamma^2 - g \sin \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist.

1—5. Walton, p. 459—469.

6. **Ein starrer Körper dreht sich um einen festen Punkt. Die Winkelgeschwindigkeiten um seine, durch diesen Punkt gehenden Hauptaxen sind $\omega_1 = \alpha \sin n t$, $\omega_2 = \alpha \cos n t$, $\omega_3 = \beta$, wo α und β konstante Grössen bedeuten. Wie ist die Bewegung dieses Körpers beschaffen?**

Werden die festen Axen so gewählt, dass $\varphi = 0$, wenn $t = 0$ ist, dann wird die Bewegung durch die Gleichungen bestimmt

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \alpha, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \beta, \qquad \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Griffin, Solutions of the Examples on the Motion of a Rigid Body, p. 34.

7. **Ein Körper bewegt sich um einen festen Punkt. Zwei der Hauptträgheitsmomente für diesen Punkt sind einander gleich und es seien die Hauptträgheitsmomente für denselben A, A, C. Die Momente der Paare der äusseren Kräfte um die Hauptaxen durch den festen Punkt seien $a \sin n t$, $a \cos n t$, 0, resp. Die Momentanaxe falle anfangs mit der Hauptaxe zusammen, welcher das Trägheitsmoment C entspricht. Bestimme die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die Hauptaxen zu einer beliebigen Zeit t.**

Die Winkelgeschwindigkeit ω_3 ist konstant, für die beiden anderen Winkelgeschwindigkeiten ergeben sich die Relationen

$$\omega_1 = \frac{a}{A(m-n)} (\cos n t - \cos m t), \qquad \omega_2 = \frac{a}{A(m-n)} (\sin m t - \sin n t),$$

wenn $m = \frac{A - C}{A} \omega_3$ gesetzt wird.

Griffin, Ib. p. 39.

8. **Ein Würfel, dessen Schwerpunkt fest ist, wird um eine beliebig angenommene Axe in Bewegung gesetzt. Wie ist die daraus hervorgehende Bewegung beschaffen?**

Der Körper fährt fort, sich um die anfängliche Rotationsaxe zu drehen.

Griffin, Ib. p. 40.

9. Ein gerader Kreiskegel, dessen Höhe gleich dem Durchmesser seiner Basis ist, kann sich um seinen festgehaltenen Schwerpunkt frei bewegen. Der Kegel wird um eine zu seiner geometrischen Axe unter gegebenem Winkel geneigte Gerade in Bewegung gesetzt. Wie ist die daraus hervorgehende Bewegung beschaffen?

Der Kegel dreht sich permanent um die anfängliche Rotationsaxe.

Griffin, Ib. p. 40.

10. Ein gerader Kreiskegel bewegt sich um eine durch seinen Schwerpunkt gehende, gegebene Axe. Welches ist die Lage der invariablen Ebene?

Es sei der Schwerpunkt des Kegels Ursprung der Coordinaten, die Axe des Kegels Axe der z. Ferner seien l, m, n die Richtungscosinus der anfänglichen Rotationsaxe, $tg\,\alpha$ stelle das Verhältnis des Durchmessers der Basis zu der Höhe des Kegels dar. Damit ist die Gleichung der invariablen Ebene

$$l x + m y + n z \,.\, vers\,\alpha = 0.$$

Griffin, Ib p. 40.

11. Eine ruhende, kreisförmige Platte kann sich um ihren Schwerpunkt, welcher fest ist, frei bewegen. Der Platte wird eine gegebene Winkelgeschwindigkeit um eine gegebene Axe mitgeteilt. Wie ist die Bewegung der Platte beschaffen?

Es sei ω die gegebene Winkelgeschwindigkeit, α die Neigung der anfänglichen Rotationsaxe zu der Ebene der Platte. Die Normale zu der Ebene der Platte wird eine konstante Neigung zu einer Normalen der invariablen Ebene besitzen und eine Umdrehung im Raume in einer Zeit gleich $\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1+3\sin^2\alpha}}$ machen.

Griffin, Ib. p. 41.

12. Ein Rotationskörper dreht sich anfangs um eine Momentanaxe, welche durch seinen Schwerpunkt geht und unter einem Winkel γ zu seiner geometrischen Axe geneigt ist. Die geometrische Axe ist anfangs unter einem Winkel α zu einer festen, geraden Linie im Raume geneigt. Während der Bewegung ist $A\,cotg\,\alpha = C\,cotg\,\gamma$, wo C, A die Trägheitsmomente bezüglich der geometrischen Axe und einer durch den Schwerpunkt gehenden, zu ihr senkrechten geraden Linie sind. Welches ist die Bewegung der geometrischen Axe?

Die geometrische Axe wird eine gerade Kreiskegelfläche um die feste Axe beschreiben.

Griffin, Ib. p. 41.

13. Ein um seinen Schwerpunkt beweglicher Rotationskörper bewegt sich anfangs um eine Axe, für welche das Trägheitsmoment des Körpers gegeben ist. Wie ist die daraus hervorgehende Bewegung beschaffen?

Es sei Q das gegebene Trägheitsmoment, C dasjenige bezüglich der geometrischen Axe, A dasjenige für eine durch den Schwerpunkt gehende, zu der geometrischen Axe senkrechte gerade Linie, dann ergiebt sich Folgendes:

1) Die Momentanaxe wird im Raume einen Kreiskegel beschreiben, dessen Vertikalwinkel am grössten, wenn Q ein harmonisches Mittel zwischen A und C ist.

2) Die geometrische Axe wird im Raume einen Kreiskegel beschreiben, dessen Vertikalwinkel gleich ist

$$2\,arc\left\{tg = \frac{A}{C}\sqrt{\frac{Q-C}{A-Q}}\right\}.$$

3) Die Momentanaxe wird im Raume relativ zu der geometrischen Axe einen Kreiskegel beschreiben, dessen Vertikalwinkel gleich ist

$$2\, arc\left\{tg = \sqrt{\frac{Q - C}{A - Q}}\right\}.$$

Griffin, Ib. p. 42.

14. Ein gerader Kreiskegel bewegt sich um seinen Schwerpunkt, welcher fest ist. Die anfängliche Neigung der Momentanaxe zu der geometrischen Axe ist bekannt. Wie ist die Bahn des Kegelscheitels beschaffen?

Es sei α die Anfangsneigung der Momentanaxe zu der geometrischen Axe, β der Halbwinkel des Kegels, h seine Höhe. Der Scheitel des Kegels wird im Raume einen Kreis beschreiben, dessen Halbmesser gleich ist

$$\frac{3}{32} h\, tg\, \alpha\, (4 + cotg^2 \beta).$$

15. Ein Körper bewegt sich um einen festen Punkt, zwei seiner Hauptträgheitsmomente bezüglich der Axen durch diesen Punkt sind einander gleich. Auf den Körper wird nur durch ein Paar gewirkt, dessen Moment um die Axe des ungleichen Trägheitsmomentes eine explicite Funktion der Zeit ist. Bestimme die Winkelgeschwindigkeiten um die Axen zu einer beliebigen Zeit.

Es sei a das Trägheitsmoment bezüglich der einen Axe, b dasjenige bezüglich der anderen zwei. Ferner seien $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkelgelschwindigkeiten zu einer beliebigen Zeit t, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Anfangswerte dieser Geschwindigkeiten. T bezeichne das Moment des Paares und α die Summe $\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2$. Damit wird gefunden werden

$$\omega_1 = \alpha_1 + \frac{1}{a}\int_0^t T\, d\, t,$$

$$b\, arc\left(sin = \frac{\omega_2}{\alpha}\right) = b\, arc\left(sin = \frac{\alpha_2}{\alpha}\right) + (a - b)\, \alpha_1\, t + \frac{1}{a}\int_0^t\int_0^t T\, d\, t^2,$$

$$b\, arc\left(sin = \frac{\omega_3}{\alpha}\right) = b\, arc\left(sin = \frac{\alpha_3}{\alpha}\right) + (b - a)\, \alpha_1\, t - \frac{1}{a}\int_0^t\int_0^t T\, d\, t^2.$$

16. Eine starre, durch das Auge einer Lemniscate begrenzte Platte, auf welche keine äusseren Kräfte wirken, beginnt sich zu bewegen mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit um eine der Tangentenlinien an dem Knotenpunkte der Curve, welcher fest ist. Bestimme das Verhältnis ihrer grössten zu ihrer kleinsten Winkelgeschwindigkeit.

Das verlangte Verhältnis ist gleich

$$\sqrt{1 + \frac{4}{3\pi}}.$$

5—16. Walton, p. 469—473.

17. Ein starrer Körper bewegt sich in irgend einer Weise in drei Richtungen. Beweise, dass wir Momente um die Momentanaxe nehmen können, wie wenn dieselbe eine im Raume und in dem Körper feste Axe wäre. Zeige, dass das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Momentanaxe während der ganzen Bewegung konstant ist.

18. Eine Platte, von welcher ein Punkt fest ist, bewegt sich, ohne von äusseren Kräften beansprucht zu sein. Beweise, dass die Summe der Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten um die zwei Hauptaxen durch den festen Punkt, in der Ebene der Platte, konstant ist.

19. Wenn während der ganzen Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt, unter der Wirkung eines Kräftesystemes, die Winkelbeschleunigung des Körpers um die Momentanaxe zu dem Trägheitsmomente bezüglich dieser Axe und den Kräften in derselben Beziehung steht, wie wenn die Axe fest wäre, beweise, dass, wenn die drei Hauptträgheitsmomente für den festen Punkt nicht alle gleich sind, der Ort der Axe relativ zu dem Körper ein Kegel zweiten Grades ist.

20. Ein starrer Körper, von welchem ein Punkt fest ist, bewegt sich, in einem beliebigen Augenblicke während der Bewegung geht die Rotationsaxe durch den Schwerpunkt des Körpers. Beweise, dass in diesem Augenblicke die Richtung des Druckes auf den festen Punkt rechtwinkelig zu der Rotationsaxe ist.

21. Zwei starre Körper, auf welche keine äusseren Kräfte wirken, bewegen sich um feste Punkte. Die Hauptträgheitsmomente des einen, bezüglich seines festen Punktes, stehen in dem doppelten Verhältnisse zu den entsprechenden des anderen. Die Anfangsverhältnisse können so gewählt werden, dass ihre Winkelgeschwindigkeiten gleich sind, wenn die Winkel, welche die Momentanaxen mit den entsprechenden Hauptaxen in einem gewissen Augenblicke machen, einander gleich sind, was zu beweisen ist.

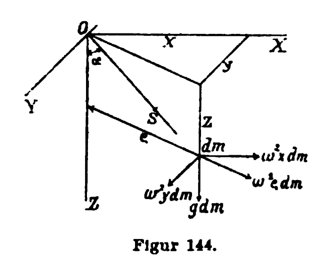
17—21. Walton, p. 658—659.

Zweiter Abschnitt.

Das Centrifugalpendel.

Ausser dem Kreispendel wird auch noch das Centrifugalpendel zur Regulierung des Ganges der Uhren benutzt. Im Maschinenbau dient dieses Pendel ausserdem zu manchen anderen Zwecken. Das mathematische Rotationspendel ist bereits früher betrachtet worden. Denken wir uns, ein materieller Punkt P sei mittelst eines gewichtslosen Fadens an einem festen Punkte O aufgehangen, so dass der Faden im Ruhezustande die vertikale Lage OZ einnimmt, diesen Faden sodann aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, wodurch er, stets gespannt bleibend, mit der Axe OZ den Winkel α einschliesst, hierauf dem materiellen Punkte P senkrecht zu der Ebene OPZ eine Geschwindigkeit v erteilt, dann beschreibt dieser Punkt eine ebene Curve, die, wenn der Winkel α klein, näherungsweise eine Ellipse ist. Besitzt der Punkt P eine konstante Geschwindigkeit, dann erzeugt die Gerade OP eine Kreiskegelfläche, deren Axe mit der Geraden OZ zusammenfällt, und ist diese Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{g\,l}{\cos\alpha}}\sin\alpha$, wenn l die Länge des Fadens OP bezeichnet. Die Winkelgeschwindigkeit des Punktes P ist $\omega = \frac{v}{l\sin\alpha} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}$, und die Zeit seines vollen Umlaufes $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$.

In Wirklichkeit dreht sich nun ein schwerer Körper um einen festen


Figur 144.

Punkt O (Fig. 144), S sei der Massenmittelpunkt dieses Körpers, der Abstand des Punktes S vom Aufhängepunkte $OS = r$. OZ sei die positiv nach unten gerechnete vertikale Axe der von der Geraden OS beschriebenen Fläche. Ein solches Pendel soll so um den Punkt O schwingen, dass die Gerade OS eine vertikale Kreiskegelfläche erzeugt, und es soll die Drehung mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit erfolgen. Wenn sich gezeigt hat, dass dieses möglich ist, dann soll die Schwingungsdauer ermittelt werden, und schliesslich wollen wir die rechnungsmässige Länge des physischen Centrifugalpendels bestimmen.

Zunächst nehmen wir an, dass die Stange bei der Drehung immer in der Ebene SOZ bleibt, welche sich mit umdreht; in dieser Ebene habe aber die Stange keine Drehung. Dieses wird der Fall sein, wenn die Stange in O ein Charnier besitzt, dessen Axe die auf der Ebene SOZ senkrechte Gerade OY ist. Denken wir uns noch die auf OZ und OY senkrechte Gerade OX gezogen, dann haben wir ein räumliches, rechtwinkeliges Coordinatensystem mit dem Drehpunkte als Ursprung. Im Schwerpunkte des physischen Pendels greifen bei dessen Rotation zwei verschiedene Kräfte an, diese sind die Schwerkraft und die Centrifugalkraft. Soll die Gerade OS mit der Axe OZ stets den konstanten Winkel α bilden, dann muss die Wirkung der Schwerkraft durch die Wirkung der Centrifugalkraft beseitigt werden. Es sei nun dm ein Massenelement des Körpers mit den Coordinaten x, y, z, welches im allgemeinen eine kleine Grösse dritter Ordnung sein wird. Fällen wir von dm ein Perpendikel ϱ auf die Axe OZ, so ist die auf dieses Element wirkende Centrifugalkraft $\varrho\omega^2 dm$. Diese Kraft lässt sich in zwei Componenten, deren Richtungen parallel mit den Axen OX, OY sind, zerlegen, diese Componenten sind $\omega^2 x\,dm$, $\omega^2 y\,dm$. Die Componente $\omega^2 y\,dm$ ist rechtwinkelig und windschief gegen die Axe OX gerichtet und besitzt deshalb in Beziehung auf OX das Moment $\omega^2 yz\,dm$. Denken wir uns nun die y-Componenten der auf alle Körperpunkte dm wirkenden Centrifugalkräfte und bezeichnen wir das durch ihre Summe hervorgehende Moment in Beziehung auf die Axe der x mit M_x, so haben wir

$$M_x = \omega^2 \int\int y\,z\,dm.$$

Hierbei wurde angenommen, dass das Massenelement unendlich klein der zweiten Ordnung sei, wodurch dm als ein zur Axe der x paralleles fadenförmiges Element anzusehen ist. Es kann dieses geschehen, weil bei der Aufstellung des Ausdruckes für das Elementarmoment die Abscisse x ausser

dem Spiele bleibt. Was von der Componente $\omega^2 y\,dm$ gesagt wurde, gilt auch von der Componente $\omega^2 x\,dm$ in Beziehung auf die Axe OY, das Elementarmoment dieser Componente bezüglich OY ist $\omega^2 xz\,dm$. Bezeichnet M_y das resultierende Moment der Summe der Elementarmomente für OY als Momentenaxe, dann haben wir, den ganzen Körper in fadenförmige Elemente parallel zu OY zerlegt denkend,

$$M_y = \omega^2 \int\int xz\,dm.$$

Weil der materielle Punkt dm stets in der Ebene $dm\,OZ$ während der Drehung bleiben soll, so ist zu verlangen, dass das Moment $M_x = 0$, denn sonst würde ein Drücken auf das Charnier bei O entstehen. Dieser Forderung kann aber leicht dadurch entsprochen werden, dass man dem Körper in Beziehung auf die Ebene SOZ eine symmetrische Gestalt giebt, denn dann ist die Momentensumme M_x in Beziehung auf OX notwendiger Weise gleich Null, da jedem positiven Massenelemente auch ein negatives entspricht, alsdann verschwindet der Ausdruck $\int\int yz\,dm$. Das resultierende Moment der anderen Componente der Centrifugalkraft in Beziehung auf die Axe OY möge mit $\omega^2 J$ bezeichnet werden. Damit nun der Winkel α sich nie ändere, muss die Bedingung erfüllt sein

$$m\,g\,r\sin\alpha = \omega^2 J,$$

wobei m die Masse des ganzen Körpers bedeutet. Aus dieser Gleichung ergiebt sich für die Winkelgeschwindigkeit des Pendels

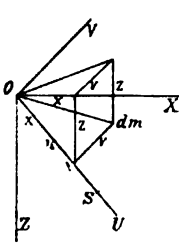
$$\omega = \sqrt{\frac{m\,g\,r\sin\alpha}{J}}.$$

Nun ist aber die Winkelgeschwindigkeit eines mathematischen Centrifugalpendels

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}},$$

so dass, wenn l die rechnungsmässige Länge des physischen Pendels bezeichnet, wir für dieselbe erhalten

$$l = \frac{J}{m\,r\sin\alpha\cos\alpha}.$$



Figur 145.

Der Wert von J ist nun so zu ermitteln, dass die Länge des Pendels von dem Winkel α unabhängig wird. Zu dem Ende bedeute dm ein zu der Ebene der Figur senkrechtes fadenförmiges Massenelement (Fig. 145), seine Coordinaten seien bezüglich der auf einander rechtwinkeligen Axen OX, OZ, x, z. Errichten wir in O eine Normale OV zu der Geraden OSU, dann entsteht ein zweites rechtwinkeliges Coordinatensystem mit den Axen OU, OV,

auf welches der Punkt dm durch die Coordinaten u, v bezogen werden kann. Zwischen den Coordinaten x, z und u, v bestehen hier die Relationen

$$x = u \sin\alpha + v \cos\alpha, \qquad z = u \cos\alpha - v \sin\alpha,$$

woraus folgt:

$$x z = (u^2 - v^2) \sin\alpha \cos\alpha + u v (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

$$x z = (u^2 - v^2) \frac{\sin 2\alpha}{2} + u v \cos 2\alpha.$$

Mithin erhalten wir

$$J = \iint x z\, dm = \frac{\sin 2\alpha}{2} \iint (u^2 - v^2)\, dm + \cos 2\alpha \iint u v\, dm.$$

Die Coordinaten u, v sind von dem Winkel α unabhängige Grössen. Setzen wir diesen Wert von J in den Ausdruck für die Länge l des physischen Pendels ein, so folgt:

$$l = \frac{1}{mr} \left\{ \iint (u^2 - v^2)\, dm + 2 \operatorname{cotg} 2\alpha \iint u v\, dm \right\}.$$

Weil nun die Länge des Pendels von dem Winkel α unabhängig sein soll, so muss offenbar $\iint u v\, dm = 0$ sein. Dieses ist aber erreichbar; wir haben nur nötig das Pendel so zu formen, dass es durch die Ebene OSY in zwei symmetrische Hälften geteilt wird. Somit ist dem Körper eine solche Gestalt zu geben, dass derselbe symmetrisch in Beziehung auf die zwei sich rechtwinkelig schneidende Ebenen SOZ und SOY wird. Mithin ist unter diesen Umständen die rechnungsmässige Länge des physischen Pendels

$$l = \frac{1}{mr} \iint (u^2 - v^2)\, dm.$$

In dieser Gleichung bedeutet m die ganze Masse des Körpers, dm ein fadenförmiges Element desselben, welches senkrecht auf der Ebene der Figur steht, und bestimmen die Coordinaten u, v die Lage eines solchen Massenelementes. Wir können das Doppelintegral passender Weise etwas umgestalten, indem wir schreiben:

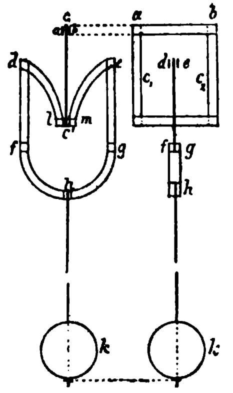
$$l = \frac{1}{mr} \left\{ \iint (u^2 + v^2)\, dm - 2 \iint v^2\, dm \right\}.$$

Hier ist $\sqrt{u^2 + v^2}$ der Abstand des fadenförmigen Massenelementes dm von der Axe OY, folglich ist das erste Glied der Klammergrösse das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf die Axe OY, welches mit Q bezeichnet werden möge. Der andere Ausdruck in der Klammer stellt das doppelte Trägheitsmoment q der ganzen Masse bezüglich der Axe OS dar. Mithin haben wir

$$l = \frac{Q - q}{mr}$$

als rechnungsmässige Länge des physischen Pendels.

Bei unserer Betrachtung wurde vorausgesetzt, dass OZ die Momentanaxe des beweglichen Systemes sei, wie solches bei einem gewöhnlichen Schwungkugelregulator einer Dampfmaschine der Fall ist. Dient das Centrifugalpendel hingegen als Regulator einer Uhr, dann ist die Sache eine etwas andere und OZ nicht mehr Momentanaxe des beweglichen Systemes. Das Centrifugalpendel wird in folgender Weise aufgehängt. An dem Uhrgestelle sind zwei horizontale Schienen a, b (Fig. 146) angebracht, zwischen denen zwei dünne Stahlplättchen c_1, c_2 eingeklemmt sind, die eine vertikale Richtung besitzen. An den unteren Enden dieser Plättchen sind zwei horizontale Schienen l, m befestigt, welche in ihrer Mitte einen Bügel de tragen. In den Punkten d und e sind zwei weitere Stahlplättchen df und eg befestigt, deren Ebene senkrecht auf der Ebene der zuerst genannten Stahlplättchen steht. Die Punkte f und g stehen mit einem zweiten Bügel in Verbindung, welcher in seiner Mitte h vermöge eines feinen Gewindes die in der Nähe ihres unteren Endes eine schwere Kugel k tragende Pendelstange aufnimmt. Durch diesen Mechanismus kann sich die Pendelstange fast ohne Arbeitsverlust in einer Kegelfläche bewegen. Die Stahlplättchen werden nur innerhalb ihrer Elastizitätsgrenze in Anspruch genommen, so dass es sich um eine periodische Bewegung eines Körpers innerhalb der Elastizitätsgrenze handelt. Bei der Drehung dieses Körpers ist die Axe OZ nicht in jedem Augenblicke die Momentanaxe des sich bewegenden Systemes, indem durch die Art der Aufhängung der Körper genötigt ist, eine doppelte Drehung zu machen. Das Pendel kehrt nicht immer die nämliche Stelle der Axe OZ zu, wie dieses bei der Bewegung des Mondes um die Erde der Fall ist, sondern es kehrt immer die nämliche Seite nach derselben Himmelsrichtung. Der Körper dreht sich gleichzeitig um die Axen OZ und OS, so dass die Momentanaxe den Winkel ZOS halbiert. Wenn die Voraussetzung beibehalten wird, dass der Körper zwei sich rechtwinkelig schneidende Symmetrieebenen besitzt, dann heben sich die entsprechenden Centrifugalkräfte durch die Rotation des Körpers um die Axe OS auf, die Centrifugalkräfte würden den Elongationswinkel α in keiner Weise ändern, dagegen könnte sich die Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers noch ändern, indem bei der Rotation um OS nicht immer ein gleichgrosser Körperquerschnitt in die Ebene ZOS fallen würde, dadurch entstände eine periodische Bewegung. Gestalten wir aber den Körper als Umdrehungskörper mit OS als Rotationsaxe, so ist jede durch OS gehende Diametralebene Symmetrieebene des Körpers, und die Winkel-



Figur 146.

geschwindigkeit ω bleibt konstant. Auf diese Weise gestaltet man nun stets das Centrifugalpendel, wodurch für dasselbe die oben entwickelten Formeln bestehen bleiben. Eine solche Uhr geht ganz ohne Geräusch. Soll für einen solchen Fall die rechnungsmässige Länge des physischen Pendels bestimmt werden, dann kann dieses leicht geschehen. Am unteren Ende desselben wirkt der Mechanismus der Uhr. Es bezeichne a die ganze Länge der Stange, b die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von dem Aufhängepunkte, A das Gewicht der Pendelstange, B dasjenige der Kugel. Die Trägheitsmomente Q und q lassen sich als aus zwei Teilen bestehend ansehen, wovon sich der eine Teil auf die Pendelstange, der andere auf die Kugel bezieht, so dass

$$Q = Q_1 + Q_2, \qquad q = q_1 + q_2,$$

Q_1 ist das Trägheitsmoment der Stange, bezogen auf die Axe OY. Da diese Stange in der Regel sehr dünn, so ist $Q_1 = \frac{1}{3}\frac{A}{g}a^2$. Die Grösse q_1 in Beziehung auf irgend eine Symmetrieebene ist gleich Null. Q_2 bezeichnet das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich der Axe OY, mithin ist $Q_2 = \frac{B}{g}b^2 + q_2$. Daher erhalten wir für die Länge des äquivalenten einfachen Pendels

$$l = \frac{\frac{1}{3}\frac{A}{g}a^2 + \frac{B}{g}b^2 + q_2 - q_2}{\frac{A}{g}\frac{a}{2} + \frac{B}{g}b} = \frac{1 + \frac{A a^2}{3 B b^2}}{1 + \frac{A a}{2 B b}} \cdot b.$$

Wir erkennen hieraus, dass die rechnungsmässige Länge des Pendels etwas kleiner als b ist, wir haben

$$\frac{a}{3b} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{b}{a} > \frac{2}{3}.$$

Was nun den Wert eines solchen Pendels als Regulator einer Uhr betrifft, so ist es vorteilhaft, den Winkel α klein zu wählen. Kleine unvermeidliche Änderungen des Elongationswinkels üben einen Einfluss auf die Schwingungsdauer aus, weshalb es nötig ist, dass $\frac{d\alpha}{dt}$ zu einem Minimum werde. Aus der Gleichung für t ergiebt sich

$$\frac{dt}{d\alpha} = -\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Je kleiner der Winkel α, um so kleiner fällt dieser Ausdruck aus.

Es ist übrigens zu bemerken, dass bei gleicher Grösse des Elongationswinkels α eine gleichgrosse Änderung von α bei einem Centrifugalpendel einen schädlicheren Einfluss ausübt, als bei einem ebenen Pendel.

Entwickeln wir $\cos\alpha$ in eine Reihe, so haben wir annähernd $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, $\sqrt{\cos\alpha} = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$, folglich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right).$$

Für ein ebenes Pendel ergab sich annähernd

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Daraus ersehen wir, dass bei einem ebenen Pendel die Änderungen von α nur einen $\frac{1}{4}$ so grossen Nachteil auf die Schwingungsdauer ausüben, als dieses unter sonst gleichen Umständen bei einem Centrifugalpendel der Fall ist.

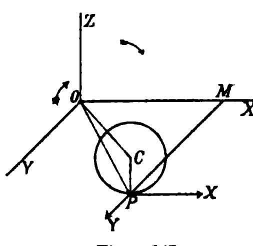
Grashof, Theoretische Maschinenlehre.

Dritter Abschnitt.

Bewegung bei vorhandenen Reibungswiderständen.

1. Eine homogene Kugel wird von einer der Entfernung proportionalen Centralkraft, mit gegebenem Sitze, angezogen. Die Kugel wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit entlang einer Ebene geworfen, welche durch das Kraftcentrum läuft. Die vorhandene Reibung verhindert alles Gleiten. Welches ist die von der Kugel beschriebene Bahn?

Wir wählen das Kraftcentrum O (Fig. 147) als Ursprung der Coordinaten, die Ebene, auf welcher die Kugel rollt, als Ebene der x und der y mit den aufeinander senkrechten Geraden OX, OY als Coordinatenaxen. Es sei C der Mittelpunkt der Kugel zur Zeit t, P ihr Berührungspunkt mit der Ebene XOY. Verbinde C mit O, C mit P durch gerade Linien; ziehe PM parallel zu OY, OZ rechtwinkelig zu der Ebene XOY. Lasse sein



Figur 147.

$OC = r$, $CP = c$, $OM = x$, $PM = y$, $M =$ der Kugelmasse, $\varepsilon =$ der Attraktion der Centralkraft auf die Masseneinheit der Kugel in der Einheit der Entfernung, X, Y die Componenten des Reibungswiderstandes im Punkte P, parallel zu den Axen OX, OY, in den den Pfeilen entsprechenden Richtungen, welche die Bewegungsrichtung der Kugel angeben, $k =$ dem Trägheitsradius der Kugel für einen Durchmesser.

Die Attraktion auf die ganze Kugel ist gleich einer Kraft $\varepsilon M r$ in

der Richtung CO, die Componenten dieser Kraft parallel zu OX, OY sind $-\varepsilon Mx$, $-\varepsilon My$. Damit erhalten wir für die Bewegung der Kugel das System von Gleichungen

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = X - \varepsilon Mx, \quad (1) \qquad M\frac{d^2y}{dt^2} = Y - \varepsilon My, \quad (2)$$

$$Mk^2\frac{d\omega_x}{dt} = cY, \quad (3) \qquad Mk^2\frac{d\omega_y}{dt} = -cX. \quad (4)$$

Weil wir vorausgesetzt haben, dass die Kugel nur rollen kann, ist offenbar

$$\frac{dx}{dt} = c\,\omega_y, \qquad \frac{dy}{dt} = -c\,\omega_x.$$

Dadurch bekommen wir mit (3) und (4)

$$Y = -\frac{Mk^2}{c^2}\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad X = -\frac{Mk^2}{c^2}\frac{d^2x}{dt^2},$$

so dass infolge (1) und (2)

$$\frac{c^2+k^2}{c^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -\varepsilon x, \qquad \frac{c^2+k^2}{c^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = -\varepsilon y,$$

oder, weil $k^2 = \frac{2}{5}c^2$ ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{5}{7}\varepsilon x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{5}{7}\varepsilon y.$$

Mit $\frac{5}{7}\varepsilon = \alpha^2$ sind die Integrale dieser Gleichungen

$$x = A_1 \sin\alpha t + B_1 \cos\alpha t, \qquad y = A_2 \sin\alpha t + B_2 \cos\alpha t.$$

Die Geschwindigkeiten parallel zu den Axen OX, OY sind daher

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(A_1 \cos\alpha t - B_1 \sin\alpha t), \qquad \frac{dy}{dt} = \alpha(A_2 \cos\alpha t - B_2 \sin\alpha t).$$

Nun sei zur Zeit $t = 0$, $x = a$, $y = b$, $\frac{dx}{dt} = v_1$, $\frac{dy}{dt} = v_2$, dann haben wir für die vier Integrationskonstanten

$$a = B_1, \qquad v_1 = A_1\alpha, \qquad b = B_2, \qquad v_2 = A_2\alpha,$$

mithin für die Bewegung der Kugel, welche keine Vertikalgeschwindigkeit besitzt,

$$x = \frac{v_1}{\alpha}\sin\alpha t + a\cos\alpha t, \qquad y = \frac{v_2}{\alpha}\sin\alpha t + b\cos\alpha t, \quad (5)$$

$$v_x = v_1 \cos\alpha t - a\alpha \sin\alpha t, \qquad v_y = v_2 \cos\alpha t - b\alpha\sin\alpha t.$$

Aus den Gleichungen (5) folgt

$$v_2 x - v_1 y = (av_2 - bv_1)\cos\alpha t, \quad (bx - ay)\alpha = -(av_2 - bv_1)\sin\alpha t.$$

Quadrieren wir diese Relationen und addieren die Resultate, so kommt

$$(v_2 x - v_1 y)^2 + (bx - ay)^2\alpha^2 = (av_2 - bv_1)^2,$$

welches die Gleichung der Bahn des Berührungspunktes P der Kugel und

der Ebene ist. Daraus geht hervor, dass dieser Berührungspunkt eine Ellipse beschreibt; der Mittelpunkt dieser Curve fällt mit dem Coordinatenursprunge O zusammen.

Walton, p. 509.

2. Eine homogene Kugel befindet sich auf einer unvollkommen rauhen, horizontalen Ebene. Der Schwerpunkt dieses Körpers bewegt sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit und er rotiert dabei mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit um einen horizontalen Diameter, welcher unter einem gegebenen Winkel zu der Bewegungsrichtung seines Mittelpunktes geneigt ist. Wie ist die daraus hervorgehende Bewegung des Schwerpunktes der Kugel beschaffen?

In der festen Ebene, auf welcher sich die Kugel bewegt, nehmen wir zwei sich rechtwinkelig schneidende, gerade Linien OX, OY als feste Coordinatenaxen an. Die Coordinaten der Projektion des Kugelmittelpunktes auf diese Ebene zu einer beliebigen Zeit t seien x, y, die Winkelgeschwindigkeiten der Kugel um durch ihren Mittelpunkt gehende, zu OX, OY parallele Axen seien ω_x, ω_y. Ferner bezeichne μ den Coëfficienten des Reibungswiderstandes, welchen die Ebene auf die Kugel ausübt, ϑ die Neigung der Richtung des Reibungswiderstandes gegen die Axe der x zu der Zeit t, a den Kugelradius.

Damit ist das Gleichungensystem für die Bewegung der Kugel

$$\frac{2}{5} a \frac{d\omega_x}{dt} = -\mu g \sin\vartheta, \quad (1) \qquad \frac{2}{5} a \frac{d\omega_y}{dt} = \mu g \cos\vartheta, \quad (2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu g \cos\vartheta, \quad (3) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu g \sin\vartheta. \quad (4)$$

Die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes von Kugel und Ebene parallel zu den Coordinatenaxen sind $\frac{dx}{dt} - a\omega_y$, $\frac{dy}{dt} + a\omega_x$, folglich ist

$$tg\,\vartheta = \frac{\frac{dy}{dt} + a\omega_x}{\frac{dx}{dt} - a\omega_y}. \quad (5)$$

Wir denken uns die Axe der x so gewählt, dass sie parallel mit der anfänglichen Rotationsaxe der Kugel läuft, bezeichnen mit ω die anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Kugel, mit $v_0 \cos\alpha$, $v_0 \sin\alpha$ die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit ihres Mittelpunktes; der Coordinatenursprung falle mit dem anfänglichen Berührungspunkte der Kugel und der Ebene zusammen.

Die Gleichungen (1) und (4) geben

$$\frac{2}{5}a\frac{d\omega_x}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},$$

daher ist

$$\frac{2}{5}a\,\omega_x=\frac{2}{5}a\,\omega-v_0\sin\alpha+\frac{dy}{dt}. \tag{6}$$

Durch (2) und (3) erhalten wir

$$\frac{2}{5}a\frac{d\omega_y}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2},$$

mithin ist

$$\frac{2}{5}a\,\omega_y=v_0\cos\alpha-\frac{dx}{dt}. \tag{7}$$

Mit Hilfe von (1), (2), (5), (6), (7) finden wir, dass

$$\frac{d\omega_x}{\frac{7}{5}a\,\omega_x+v_0\sin\alpha-\frac{2}{5}a\,\omega}=\frac{d\omega_y}{\frac{7}{5}a\,\omega_y-v_0\cos\alpha},$$

daher ist, wenn λ eine Konstante bedeutet,

$$\frac{7}{5}a\,\omega_x+v_0\sin\alpha-\frac{2}{5}a\,\omega=\lambda\left(\frac{7}{5}a\,\omega_y-v_0\cos\alpha\right).$$

Weil anfangs $\omega_x=\omega$, $\omega_y=0$, so bekommen wir

$$v_0\cos\alpha\left(\frac{7}{5}a\,\omega_x+v_0\sin\alpha-\frac{2}{5}a\,\omega\right)=\left(v_0\cos\alpha-\frac{7}{5}a\,\omega_y\right)(a\,\omega+v_0\sin\alpha),$$

womit

$$v_0\cos\alpha\,d(\omega_x)+(v_0\sin\alpha+a\,\omega)\,d(\omega_y)=0,$$

folglich durch (1) und (2)

$$tg\,\vartheta=\frac{v_0\sin\alpha+a\,\omega}{v_0\cos\alpha},$$

welches zeigt, dass der Winkel ϑ eine konstante Grösse ist. Nun geben die Gleichungen (1) und (2)

$$x=v_0\,t\cos\alpha-\frac{1}{2}\mu\,g\,t^2\cos\vartheta,\qquad y=v_0\,t\sin\alpha-\frac{1}{2}\mu\,g\,t^2\sin\vartheta,$$

womit

$$x\sin\vartheta-y\cos\vartheta=v_0\,t\sin(\vartheta-\alpha),\qquad x\sin\alpha-y\cos\alpha=\frac{1}{2}\mu g t^2\sin(\vartheta-\alpha).$$

Demnach ist die Gleichung der Projektion der Bahn des Kugelmittelpunktes auf die Ebene

$$(x\sin\vartheta-y\cos\vartheta)^2=\frac{2v_0^{\,2}}{\mu\,g}\sin(\vartheta-\alpha)(x\sin\alpha-y\cos\alpha),$$

so dass die Projektionsbahn eine Parabel ist. Wenn $\omega=0$, dann ist $\vartheta=\alpha$, die Gleichung wird $y=x\,tg\,\alpha$, welche diejenige einer geraden Linie ist. Mit $v_0=0$ ist $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, die Gleichung wird $x=0$.

Walton, p. 511.

3. Eine homogene Kugel bewegt sich auf einer unvollkommen rauhen geneigten Ebene. Die Anfangsbedingungen der Bewegung sind ganz beliebig. Wie ist die Richtung der Bewegung und die Geschwindigkeit ihres Mittelpunktes zu einer beliebigen Zeit beschaffen?

S bezeichne den Schwerpunkt der Kugel. Die Bewegung beziehen wir auf die Axen SA, SB, SC, deren Richtungen fest im Raume und auf einander senkrecht sind, die erstere nehmen wir parallel zur Falllinie der geneigten Ebene und positiv abwärts, die letztere normal zu der Ebene, welche eine Horizontalneigung α besitzen möge. Die Geschwindigkeiten von S parallel zu diesen Axen seien u, v, w, die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um diese Axen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Die Componenten des Reibungswiderstandes in dem Berührungspunkte von Kugel und Ebene parallel zu den Axen seien F, F', sie besitzen nur negative Richtungen. k bezeichne den Trägheitsradius der Kugel für einen Diameter, a ihren Halbmesser, ihre Masse nehmen wir zur Masseneinheit.

Damit sind die Bewegungsgleichungen

$$k^2 \frac{d\omega_1}{dt} = -F'a, \quad k^2 \frac{d\omega_2}{dt} = Fa. \quad (1) \qquad \frac{du}{dt} = -F + g \sin\alpha, \quad \frac{dv}{dt} = -F'. \quad (2)$$

Die Elimination der Grössen F und F' giebt

$$\frac{du}{dt} - \frac{k^2}{a}\frac{d\omega_2}{dt} = g \sin\alpha, \qquad \frac{dv}{dt} - \frac{k^2}{a}\frac{d\omega_1}{dt} = 0.$$

Durch die Integration dieser Gleichungen erhalten wir

$$u + \frac{k^2}{a^2} a\,\omega_2 = U_0 + g \sin\alpha \,.\, t, \qquad v - \frac{k^2}{a^2} a\,\omega_1 = V_0, \quad (3)$$

wo U_0, V_0 zwei Konstante bedeuten, deren Werte durch die Anfangswerte von u, v, ω_1, ω_2 bestimmt werden müssen.

Die Bedeutung dieser Gleichungen kann in folgender Weise gefunden werden. Es sei P der Berührungspunkt von Kugel und Ebene, Q ein Punkt innerhalb der Kugel auf der Normalen ihrer Oberfläche für den Punkt P, so dass $PQ = \frac{a^2 + k^2}{a}$, also Q der Schwingungsmittelpunkt der Kugel, wenn sie im Punkte P aufgehangen wird. Es ist klar, dass die linken Seiten der Gleichungen (3) die Componenten der Geschwindigkeit von Q parallel zu den Axen darstellen. Die Gleichungen behaupten, dass die friktionalen Impulse in P die Bewegung von Q nicht beeinflussen können, was leicht aus der Lehre vom Percussionscentrum folgt, weil Q in der spontanen Rotationsaxe für einen Stoss in P liegt.

Die Reibung in dem Berührungspunkte P wirkt stets entgegengesetzt zu der Richtung des Gleitens und ist bestrebt diesen Punkt in den Zustand der Ruhe zurückzuführen. Wenn das Gleiten aufhört, so wird auch die Reibung aufhören Grenzreibung zu sein und sie wird nun von solcher

Grösse sein, dass sie den Berührungspunkt in Ruhe erhält. Verschwindet das Gleiten auf irgend eine Weise, dann haben wir

$$u - a\,\omega_2 = 0, \qquad v + a\,\omega_1 = 0. \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) und (4) genügen zur Bestimmung dieser Endwerte von u, v, ω_1 und ω_2. Mithin sind die Bewegungsrichtung und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, nachdem das Gleiten aufgehört hat, bereits als Funktionen der Zeit bekannt. Es zeigt sich, dass diese zwei Elemente von dem Reibungswiderstande unabhängig sind.

Wenn die Gleichungen (4) anfangs genügen, so wird die Kugel beginnen, sich ohne Gleiten zu bewegen, vorausgesetzt, dass die aus den Gleichungen (1), (2) und (4) gefundene Reibung kleiner als die Grenzreibung ist. Dieses verlangt, dass der Reibungscoëfficient $\mu > \frac{k^2}{a^2 + k^2}\,tg\,\alpha$ ist. Unter der Voraussetzung, dass dieser Ungleichung genügt wird, ist die in das Spiel kommende Reibung stets kleiner als die Grenzreibung und es geben daher in diesem Falle die Gleichungen (3) und (4) die ganze Bewegung.

Werden die Gleichungen (4) anfangs nicht erfüllt, oder wird der eben genannten Ungleichung nicht genügt, dann verhält sich die Sache wie folgt. Es sei v_g die Geschwindigkeit des Gleitens, ϑ der Winkel, welchen die Richtung des Gleitens mit SA einschliesst. Um die Vorzeichen festzustellen, nehmen wir v_g positiv während ϑ irgend einen Wert zwischen $-\pi$ und π besitzt. Damit erhalten wir

$$v_g \cos\vartheta = u - a\,\omega_2, \qquad v_g \sin\vartheta = v + a\,\omega_1. \tag{5}$$

Der Reibungswiderstand ist gleich $\mu\,g\cos\alpha$ und wirkt in einer Richtung, welche derjenigen des Gleitens entgegengesetzt ist, folglich wird

$$F = \mu\,g\cos\alpha\cos\vartheta, \qquad F' = \mu\,g\cos\alpha\sin\vartheta.$$

Daher geben die Gleichungen (1), (2) und (5)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,(v_g\cos\vartheta)}{d\,t} &= -\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\mu\,g\cos\alpha\cos\vartheta + g\sin\alpha, \\ \frac{d\,(v_g\sin\vartheta)}{d\,t} &= -\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\mu\,g\cos\alpha\sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{d\,v_g}{d\,t} = -\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\mu\,g\cos\alpha + g\sin\alpha\cos\vartheta, \quad v_g\frac{d\vartheta}{d\,t} = -g\sin\alpha\sin\vartheta. \tag{7}$$

Wenn ϑ nicht konstant ist, erhalten wir durch Elimination von t und Integration mit Bezug auf ϑ

$$v_g\sin\vartheta = 2\,A\left(tg\frac{\vartheta}{2}\right)^n, \tag{8}$$

wo $n = \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\mu\cot g\,\alpha$, und A die Integrationskonstante bedeutet. Sind

v_{0g} und ϑ_0 die Anfangswerte von v_g und ϑ, welche durch die Gleichungen (5) bestimmt sind, so haben wir

$$2A = v_{0g} \sin \vartheta_0 \left(\cot g \frac{\vartheta_0}{2}\right)^n. \tag{9}$$

Durch Substitution des durch (8) gegebenen Wertes von v_g in die zweite der Gleichungen (7) und Integration des daraus folgenden Resultates finden wir

$$\frac{\left(tg\frac{\vartheta}{2}\right)^{n-1}}{n-1} + \frac{\left(tg\frac{\vartheta}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{\left(tg\frac{\vartheta_0}{2}\right)^{n-1}}{n-1} + \frac{\left(tg\frac{\vartheta_0}{2}\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{g \sin \alpha}{A} t. \tag{10}$$

Der Wert der Integrationskonstanten ergiebt sich aus der Bedingung, dass $\vartheta = \vartheta_0$, wenn $t = 0$ ist. Die Gleichungen (8), (9) und (10) geben v_g und ϑ als Funktionen von t. Die Gleichungen (3) und (5) geben sodann u, v, ω_1 und ω_2 als Funktionen der Zeit.

Die zweite der Gleichungen (7) zeigt, dass $\frac{d\vartheta}{dt}$ das entgegengesetzte Zeichen von ϑ besitzt, folglich beginnt ϑ bei irgend einem Anfangswerte, ausgenommen $\pm \pi$, sich kontinuierlich der Null zu nähern. Daraus folgt, dass, wenn nicht $\alpha = 0$, ϑ nur konstant sein wird, wenn $\vartheta = 0$ oder $\pm \pi$ ist.

Ist $n > 1$, d. i. $\mu > \frac{k^2}{a^2 + k^2} tg\, \alpha$, so sehen wir mittelst (8), dass ein Gleiten aufhören wird, wenn ϑ verschwindet. Dieses wird nach (10) eintreten mit

$$t = \frac{v_{0g}}{g \sin \alpha} \left(\frac{\cos^2 \frac{\vartheta_0}{2}}{n-1} + \frac{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}}{n+1} \right).$$

Die folgende Bewegung ist bereits gefunden worden.

Ist $n < 1$, so sehen wir vermöge (8), dass v_g mit abnehmendem ϑ wächst, in diesem Falle wird daher ein Gleiten niemals aufhören. Es ergiebt sich aus (10), dass ϑ nur am Ende einer unendlichen Zeit verschwindet.

Ist $v_{0g} = 0$, dann wird ein Gleiten niemals eintreten, wenn $n > 1$, aber es wird augenblicklich beginnen und niemals verschwinden, wenn $n < 1$ ist.

Routh, Dynamics &c., p. 470.

4. Eine homogene Kugel bewegt sich auf irgend einer vollkommen rauhen Fläche unter der Wirkung irgend welcher Kräfte, die aber so beschaffen sind, dass die Richtung ihrer Resultanten durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Wie ist die Bewegung dieses Körpers beschaffen?

Durch den Schwerpunkt S der Kugel legen wir die sich mit ihr bewegenden Axen SC, SA, SB, von denen die eine eine Normale zu der Fläche, die beiden anderen sich rechtwinkelig schneidenden Axen auf dieser Normalen senkrecht stehen und später nach unserem Bedürfnisse der Richtung nach gewählt werden. Die Bewegungen dieser Axen seien bestimmt durch die Winkelgeschwindigkeiten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ um ihre augenblicklichen Positionen. u, v, w seien die Winkelgeschwindigkeiten von S parallel zu den Axen, so dass $w = 0$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um diese Axen. Mit F, F' wollen wir die Componenten des Reibungswiderstandes im Berührungspunkte von Kugel und Fläche parallel zu den Axen SA, SB bezeichnen, R sei die Normalreaktion daselbst. X, Y, Z seien die Componenten der äusseren Kräfte, welche in dem Schwerpunkte wirksam gedacht sind. k bezeichne den Trägheitsradius der Kugel um einen Diameter, a ihren Halbmesser. Die Masse der Kugel wählen wir als Masseneinheit.

Damit sind die Bewegungsgleichungen der Kugel

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} - \vartheta_3\,\omega_2 + \vartheta_2\,\omega_3 = \frac{F'a}{k^2}, \quad \frac{d\omega_2}{dt} - \vartheta_1\,\omega_3 + \vartheta_3\,\omega_1 = -\frac{Fa}{k^2}, \\ \frac{d\omega_3}{dt} - \vartheta_2\,\omega_1 + \vartheta_1\,\omega_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\frac{du}{dt} - \vartheta_3 v = X + F, \quad \frac{dv}{dt} + \vartheta_3 u = Y + F', \quad -\vartheta_2 u + \vartheta_1 v = Z + R, \quad (2)$$

und weil der Berührungspunkt der Kugel und Fläche in Ruhe ist, haben wir

$$u - a\,\omega_2 = 0, \qquad v + a\,\omega_1 = 0. \qquad (3)$$

Durch die Elimination von $F, F', \omega_1, \omega_2$ aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \vartheta_3 v = \frac{a^2}{a^2+k^2} X + \frac{k^2}{a^2+k^2}\,\vartheta_1\, a\,\omega_3 \\ \frac{dv}{dt} + \vartheta_3 u = \frac{a^2}{a^2+k^2} Y + \frac{k^2}{a^2+k^2}\,\vartheta_2\, a\,\omega_3 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen kann in folgender Weise gefunden werden. Dieselben sind die zwei Gleichungen der Bewegung des Schwerpunktes der Kugel, welche wir erhalten haben würden, wenn die gegebene Fläche glatt gewesen wäre und an dem Schwerpunkte gewirkt hätten die Beschleunigungen $\frac{k^2}{a^2+k^2}\vartheta_1\, a\,\omega_3$, $\frac{k^2}{a^2+k^2}\vartheta_2\, a\,\omega_3$ entlang den Axen SA, SB, und durch dieselben äusseren Kräfte wie vorher, reduziert in dem Verhältnisse $\frac{a^2}{a^2+k^2}$. Die Bewegung des Schwerpunktes wird daher in diesen zwei Fällen bei den nämlichen Anfangsbedingungen dieselbe sein. Passendere Ausdrücke für diese zwei additionalen Kräfte können wie folgt gefunden werden. Der Schwerpunkt bewegt sich entlang einer Fläche, welche gebildet

wird durch die Endpunkte aller Normalen zu der gegebenen Fläche von einer konstanten Länge gleich dem Radius der Kugel. Nehmen wir die Axen SA, SB als Tangenten der Krümmungslinien dieser Flächen und bezeichnen mit ϱ_1, ϱ_2 die Krümmungsradien der Normalschnitte durch diese Tangenten, dann ist

$$\vartheta_1 = -\frac{v}{\varrho_2}, \qquad \vartheta_2 = \frac{u}{\varrho_1}. \tag{5}$$

Wenn S die Lage des Schwerpunktes zu der Zeit t ist, so ist die Grösse $\vartheta_3 dt$ der Winkel zwischen den Projektionen der zwei aufeinanderfolgenden Lagen von SA auf die Tangentialebene in S. Wir wollen mit χ_1, χ_2 die Winkel bezeichnen, welche die Krümmungsradien der Krümmungslinien für den Punkt S mit der Normalen einschliessen. Der Mittelpunkt der Kugel kann aus S in eine benachbarte Lage S' dadurch gebracht werden, dass wir ihn zuerst aus S nach S_1 entlang der einen Krümmungslinie, sodann aus S_1 nach S' entlang der anderen bewegen. Verschieben wir die Kugel aus S nach S_1, so ist der von SA beschriebene Winkel das Produkt aus dem Bogen SS_1 und der Projektion der Krümmung von SS_1 auf die Tangentialebene. Nach dem Satze von Meunier ist die Krümmung $\frac{1}{\varrho_1 \cos\chi_1}$, multiplizieren wir diese mit $\sin\chi_1$, um die Projektion auf die Tangentialebene zu erhalten, so finden wir, dass der Teil von ϑ_3, welcher der Bewegung entlang SS_1 zu verdanken, gleich $\frac{u}{\varrho_1} tg\,\chi_1$ ist. Behandeln wir den Bogen S_1S' in derselben Weise, so erhalten wir

$$\vartheta_3 = \frac{u}{\varrho_1} tg\,\chi_1 + \frac{v}{\varrho_2} tg\,\chi_2. \tag{6}$$

Die Gleichungen (1) geben uns einen Ausdruck für ω_3. Substituieren wir aus den geometrischen Gleichungen (3) für ω_1, ω_2 die Werte, dann bekommen wir

$$a\frac{d\omega_3}{dt} = uv\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right). \tag{7}$$

Die Lösung der Gleichungen kann wie folgt geführt werden. Es seien (x, y, z) die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel, dann können u, v aus der Gleichung der Fläche in Ausdrücken von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ durch Zerlegung parallel zu den Referenzaxen gefunden werden. Wenn wir u, v, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 mittelst (4), (5) und (6) eliminieren, so bekommen wir drei Gleichungen, welche x, y, z, ω_3 und ihre Differentialquotienten nach t enthalten. Diese werden in Verbindung mit der Gleichung der Fläche zur Bestimmung der Bewegung zu einer beliebigen Zeit t genügen. Ein Integral kann stets durch den Gebrauch des Prinzipes der lebendigen

Kraft gefunden werden. Weil die Kugel sich um den Berührungspunkt wie um einen augenblicklich festen Punkt dreht, so haben wir, wenn φ die Kräftefunktion der äusseren Kräfte bezeichnet,

$$(a^2 + k^2)(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2) + k^2 \omega_3{}^2 = 2\varphi.$$

Dieses ist dasselbe wie

$$u^2 + v^2 + \frac{k^2 a^2}{a^2 + k^2}\omega_3{}^2 = 2\frac{a^2}{a^2 + k^2}\cdot\varphi, \tag{8}$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist die zweifache Kräftefunktion dertr ansmittierten äusseren Kräfte.

Manchmal wird es passender sein, die Axe SA mit einer Tangente an die Bahn zusammenfallen zu lassen. In diesem Falle ist $v = 0$, daher $\omega_1 = 0$. Wenn U die resultierende Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Kugel bezeichnet, so haben wir $u = U$. Ist R der Torsionsradius einer geodätischen Linie, welche die Bahn in S berührt und ϱ der Krümmungsradius des Normalschnittes zu S durch eine Tangente der Bahn, dann ist $\vartheta_1 = \frac{U}{R}$, $\vartheta_2 = \frac{U}{\varrho}$. In diesen Ausdrücken ist R positiv genommen, wenn die Torsion um SA aus der positiven Richtung von SB nach der positiven Richtung von SC geht. Wenn χ den Winkel bezeichnet, welchen der Krümmungsradius der Bahn mit der Normalen einschliesst, so haben wir wie vorher $\vartheta_3 = \frac{U}{\varrho}\, tg\,\chi$. Die Gleichungen (4) gehen über in

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= \frac{a^2}{a^2+k^2}X + \frac{k^2}{a^2+k^2}\cdot\frac{U}{R}a\,\omega_3\\ \frac{U^2}{\varrho}\,tg\,\chi &= \frac{a^2}{a^2+k^2}Y + \frac{k^2}{a^2+k^2}\cdot\frac{U}{\varrho}a\,\omega_3\end{aligned}\right\}. \tag{IV}$$

Der durch die Gleichungen (1) für ω_3 gegebene Ausdruck nimmt nun die Gestalt an

$$a\frac{d\omega_3}{dt} = -\frac{U^2}{R}. \tag{VII}$$

Es kann durch geometrische Betrachtungen gezeigt werden, dass diese Form mit der in (7) gegebenen identisch ist.

Zur Bestimmung des Druckes auf die Fläche benutzen wir die letzte der Gleichungen (2). Diese Relation kann in einer der Formen geschrieben werden

$$\frac{U^2}{\varrho} = \frac{u^2}{\varrho_1} + \frac{v^2}{\varrho_2} = -Z - R. \tag{9}$$

Die Kugel wird die Fläche verlassen, wenn R sein Zeichen wechselt. Dieses wird allgemein eintreten, wenn die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel diejenige ist, welche zu verdanken der Bewegung durch die Hälfte der Projektion des Krümmungsradius des Normalschnittes auf die Richtung der resultierenden Kraft.

Diese allgemeine Lösung wollen wir nun für einige besondere Probleme verwerten.

5. Wie ist die Bewegung einer Kugel beschaffen, welche auf einer vollkommen rauhen Ebene rollt, wenn die Resultante aller äusseren Kräfte durch ihren Mittelpunkt geht?

In diesem Falle haben wir $\varrho_1 = \infty$ und $\varrho_2 = \infty$, so dass $\vartheta_1 = 0$, und $\vartheta_2 = 0$. Wenn daher eine homogene Kugel auf einer vollkommen rauhen Ebene unter der Wirkung irgend welcher Kräfte rollt, deren Resultante durch den Kugelmittelpunkt geht, so ist die Bewegung dieselbe, als wenn die Ebene glatt und jede Kraft in dem Verhältnisse $\frac{5}{7}$ reduziert wäre. Die Ebene ist die einzige Fläche, welche diese Eigenschaft für alle Anfangsbedingungen besitzt.

6. Die Fläche, auf welcher eine homogene Kugel rollt, ist eine vollkommen rauhe Kugelfläche vom Radius $b - a$. Welches ist die Beschaffenheit der Bewegung unter denselben Verhältnissen wie vorhin?

Hier haben wir $\varrho_1 = \varrho_2 = b$, womit die allgemeinen Gleichungen (5) geben:

$$\vartheta_1 = -\frac{v}{b}, \qquad \vartheta_2 = \frac{u}{b},$$

so dass mit der dritten der Gleichungen (1)

$$b\frac{d\omega_3}{dt} - u\,\omega_1 - v\,\omega_2 = 0,$$

weil aber nach (3)

$$u\,\omega_1 = a\,\omega_1\,\omega_2, \qquad v\,\omega_2 = -a\,\omega_1\,\omega_2,$$

so folgt

$$b\frac{d\omega_3}{dt} = 0, \qquad \omega_3 = Konst. = n.$$

Weil jeder Normalschnitt hier ein Hauptschnitt ist, so wollen wir zur Axe SA eine Tangente an die Bahn nehmen und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes mit U bezeichnen, dann ist $u = U$. Folglich ist die Bewegung des Schwerpunktes dieselbe, als wenn die ganze Masse vereinigt wäre in jenem Punkte, wo eine Beschleunigung $\frac{k^2}{a^2+k^2}\cdot\frac{a\,n\,U}{b}$ in einer Richtung senkrecht zu der Bahn wirkt, und alle äusseren Kräfte in dem Verhältnisse $\frac{a^2}{a^2+k^2}$ reduziert wären. Infolge der gebräuchlichen Übereinkunft bezüglich der relativen Lage der Axen SA, SB, SC ist es klar, dass, wenn die positive Richtung von SA in der Bewegungsrichtung liegt, die Winkelgeschwindigkeit n positiv genommen werden

muss, wenn der in der Fronte sich bewegende Teil der Kugel rechts von SA liegt, und die additionale Kraft wird auch nach der rechten Seite der Tangente hin wirken, wenn sie positiv ist. Weil diese Kraft senkrecht zu der Bahn wirkt, so wird sie in der Gleichung der lebendigen Kraft nicht erscheinen. Daher ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in irgend einer Lage dieselbe, als wenn er daselbst einfach unter der Wirkung der reduzierten Kräfte angekommen wäre. Es sei O der Mittelpunkt der festen Kugel, ϑ der Winkel, welchen OS mit der Vertikalen OZ einschliesst, ψ der Winkel, welchen die Ebene ZOS mit irgend einer festen, durch OZ gehenden Ebene macht. Damit haben wir durch das Prinzip der lebendigen Kraft

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = L - \frac{2g}{b}\cdot\frac{a^2}{a^2+k^2}\cos\vartheta,$$

wo L eine gewisse konstante, aus den Anfangsbedingungen bestimmbare Grösse bezeichnet. Dieses folgt auch aus der Gleichung (8).

Nehmen wir Momente um OZ, so kommt

$$\frac{b}{\sin\vartheta}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sin^2\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{k^2}{a^2+k^2}\,a\,n\,\frac{d\vartheta}{dt},$$

welche Relation auch durch eine Transformation der zweiten der Gleichungen (4) gefunden werden kann. Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\sin^2\vartheta\frac{d\psi}{dt} = E - \frac{k^2}{a^2+k^2}\,\frac{an}{b}\cos\vartheta,$$

wo E eine gewisse Konstante bedeutet. Diese zwei Gleichungen werden für die Bestimmung von $\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d\psi}{dt}$ bei irgend welchen gegebenen Anfangsbedingungen genügen. Wenn die Kugel anfangs keine Winkelgeschwindigkeit um die Flächennormale besitzt, so ist es klar, dass $n=0$, und die additionale äussere Kraft gleich Null ist. In diesem Falle kann die Bewegung der Kugel sehr einfach dadurch gefunden werden, dass wir sie wie einen materiellen Punkt behandeln, auf welchen die reduzierten äusseren Kräfte wirken.

7. Eine homogene Kugel bewegt sich unter denselben Verhältnissen wie vorhin auf einer vollkommen rauhen Cylinderfläche. Wie ist die Bewegung beschaffen?

Wir nehmen die Axe SA parallel zu der Erzeugungslinie des Cylinders, bezeichnen mit a den Halbmesser der Kugel. Die Krümmungslinien der Fläche sind die Mantellinien und die Normalschnitte derselben, so dass $\varrho_1 = \infty$, der Krümmungsradius eines Normalschnittes $= \varrho_2 - a$, womit wir erhalten $\vartheta_1 = -\frac{v}{\varrho_2}$, $\vartheta_2 = 0$, $\vartheta_3 = 0$, weil $\chi_2 = 0$ ist.

Die Gleichungen (4) und (7) gehen daher über in

$$\frac{du}{dt} = \frac{a^2}{a^2+k^2} X - \frac{k^2}{a^2+k^2} \frac{v}{\varrho_2} a\,\omega_3, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{a^2+k^2} Y,$$

$$a \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{uv}{\varrho_2}.$$

Mittelst dieser Gleichungen kann die Bewegung bestimmt werden.

Die zweite dieser Relationen giebt die Bewegung transversal zu den Erzeugungslinien des Cylinders; wenn Y für alle Lagen der Kugel auf derselben Mantellinie den nämlichen Wert besitzt, so kann diese Gleichung unabhängig von den beiden anderen gelöst werden. Die Transversalbewegung der Kugel ist daher dieselbe unter denselben Anfangsverhältnissen, wie diejenige einer glatten Kugel, welche genötigt ist zu gleiten in einer zu den Mantellinien senkrechten Ebene auf dem Querschnitte des Cylinders, und an welcher dieselben, in dem Verhältnisse $\frac{a^2}{a^2+k^2}$ reduzierten äusseren Kräfte wirken.

Nach der Bestimmung von v können wir in folgender Weise vorgehen. Es sei φ der Winkel, welchen die durch eine Mantellinie und den Mittelpunkt der Kugel gehende Normalebene mit einer festen, durch eine Mantellinie gehende Ebene einschliesst, dann ist $v = \varrho_2 \frac{d\varphi}{dt}$. Ist $\frac{d\varphi}{dt}$ nicht gleich Null, so wird die erste und die dritte Gleichung

$$\frac{du}{d\varphi} + \frac{k^2}{a^2+k^2} a\,\omega_3 = \frac{a^2}{a^2+k^2} \frac{\varrho_2}{a} X, \qquad u = a \frac{d\omega_3}{dt}.$$

Wenn X für alle Lagen der Kugel auf derselben Mantellinie denselben Wert besitzt, dann können diese Gleichungen ohne Schwierigkeit gelöst werden. Weil v und ϱ_2 als Funktionen von φ dargestellt werden können, so haben wir in diesem Falle zwei lineare Gleichungen, um u und $a\,\omega_3$ zu bestimmen. Mit $X = 0$ finden wir, da $k^2 = \frac{2}{5} a^2$,

$$a\,\omega_3 = A \sin\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\,\varphi + B\right), \qquad u = A \sqrt{\frac{2}{7}} \cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\,\varphi + B\right),$$

wo A und B zwei willkürliche Konstante bedeuten, deren Werte mittelst der Anfangswerte von u und ω_3 bestimmt werden können.

Besitzt X nicht denselben Wert für alle Lagen der Kugel auf derselben Mantellinie, bezeichnet ξ den von der Kugel durchkreuzten Weg, gemessen entlang einer Mantellinie, dann ist

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\varphi} \cdot \frac{v}{\varrho_2}.$$

Durch die Substitution dieses Wertes von u erhalten wir zwei Gleichungen zur Bestimmung von ξ und $a\omega_3$ als Funktionen von φ. Ein Integral davon ist die Gleichung (8) in 4, welche mittelst des Prinzipes der lebendigen Kraft erhalten wurde.

8. Eine homogene Kugel rollt unter denselben Verhältnissen wie vorher auf der vollkommen rauhen Fläche eines Kegels. Wie ist die Bewegung beschaffen?

Die Krümmungslinien sind hier die Mantellinien und ihre orthogonalen Trajektorien. Die Axe SA nehmen wir parallel zu der Genetratrix, dann ist $\varrho_1 = \infty$, $\varrho_2 - a$ der Krümmungsradius eines Normalschnittes senkrecht zu den Mantellinien, $\vartheta_1 = -\frac{v}{\varrho_2}$, $\vartheta_2 = 0$. Die Lage der Kugel bestimmen wir durch die Distanz r ihres Mittelpunktes von dem Scheitel O desjenigen Kegels, auf welchem der Mittelpunkt immer liegt, und durch einen Winkel φ solcher Beschaffenheit, dass $d\varphi$ der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Lagen der Distanz r ist, und nehmen $d\varphi$ positiv, wenn der Mittelpunkt sich in der positiven Richtung von SB bewegt. Wenn die Kegelfläche auf einer Ebene abgewickelt wäre, so ist klar, dass r und φ die gewöhnlichen Polarcoordinaten eines Punktes S sein würden. Wir haben hier

$$\vartheta_3 = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad u = \frac{dr}{dt}, \qquad v = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Die Gleichungen (4) und (7) gehen daher über in

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+k^2}X - \frac{k^2}{a^2+k^2}\frac{r}{\varrho_2}a\omega_3 \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{a^2}{a^2+k^2}Y,$$

$$\frac{d(a\omega_3)}{dt} = \frac{r}{\varrho_2}\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt}.$$

Besitzen die äusseren Kräfte keine Componente senkrecht zu der Normalebene durch eine Mantellinie, so ist $Y = 0$, und wir haben $r^2\frac{d\varphi}{dt} = h$, wo h eine von den Anfangswerten von r und v abhängige Konstante bedeutet.

Ist auch die Componente X der Kräfte, entlang einer erzeugenden, eine Funktion von r allein, dann kann ein anderes Integral durch das Prinzip der lebendigen Kraft gefunden werden, nämlich

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{a^2+k^2}a^2\omega_3{}^2 = \frac{2a^2}{a^2+k^2}\int X\,dr + h',$$

wobei h' eine weitere Konstante bedeutet, welche mittelst der Anfangswerte von u, v und r bestimmt werden kann.

Ist weiter der Kegel ein gerader Kegel, dessen Halbwinkel $= \alpha$, so haben wir $\varrho_2 = r\, tg\, \alpha$, mithin

$$a\, \omega_3 = -\frac{h\, cotg\, \alpha}{r} + h'',$$

wo h'' eine dritte Konstante bezeichnet, welche von den Anfangswerten der Grössen ω_3 und r abhängig ist. Die Bewegungsgleichungen des Mittelpunktes der Kugel gleichen jenen eines materiellen Punktes unter der Wirkung von Centralkräften. Folglich werden r und φ als Funktionen der Zeit gefunden werden, wenn wir dieselben ansehen als die Coordinaten eines freien, sich in einer Ebene unter der Wirkung einer Centralkraft bewegenden materiellen Punktes, welche repräsentiert wird durch

$$\frac{a^2}{a^2 + k^2}\left\{X - k^2\, \omega_3\, \frac{d\,\omega_3}{d\,t}\right\},$$

wo ω_3 den eben gefundenen Wert besitzt.

9. Eine homogene Kugel rollt unter der Wirkung der Schwerkraft auf einer vollkommen rauhen Umdrehungsfläche mit vertikaler Axe und nach oben gerichtetem Scheitel. Welches ist die Bewegung der Kugel?

Es seien die beweglichen Axen von C, A und B resp. die Normale der Fläche, eine Tangente zu dem Meridian der Fläche in dem Berührungspunkte und eine Senkrechte zu beiden. Die geometrische Axe der Umdrehungsfläche werde als Axe der z genommen und irgend zwei feste zu dieser und zu einander senkrechte Linien seien die Axen der x und der y. F, F' seien die Componenten des Reibungswiderstandes parallel zu den Axen SA und SB, R bezeichne die Normalreaktion und a den Radius der Kugel. Die Axe SC mache mit der Vertikalen einen Winkel ϑ, ψ sei der Winkel zwischen den Ebenen CZ und XZ.

Die Winkelgeschwindigkeiten um die Axen OX, OY, OZ sind

$$\vartheta_1 = -\sin\vartheta\,\frac{d\,\psi}{d\,t}, \quad \vartheta_2 = \frac{d\,\vartheta}{d\,t}, \quad \vartheta_3 = \cos\vartheta\,\frac{d\,\psi}{d\,t}.$$

Die Bewegungsgleichungen bezüglich der sich bewegenden Axen sind daher

$$\frac{d\,\omega_1}{d\,t} - \omega_2\cos\vartheta\,\frac{d\,\psi}{d\,t} + \omega_3\,\frac{d\,\vartheta}{d\,t} = \frac{F'a}{A}, \tag{1}$$

$$\frac{d\,\omega_2}{d\,t} + \omega_3\sin\vartheta\,\frac{d\,\psi}{d\,t} + \omega_1\cos\vartheta\,\frac{d\,\psi}{d\,t} = -\frac{F a}{A}, \tag{2}$$

$$\frac{d\,\omega_3}{d\,t} - \omega_1\frac{d\,\vartheta}{d\,t} - \omega_2\sin\vartheta\,\frac{d\,\psi}{d\,t} = 0, \tag{3}$$

wenn die Masse der Kugel als Masseneinheit genommen wird.

Bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes parallel zu den sich bewegenden Axen, dann haben wir, weil $w = 0$,

$$\frac{du}{dt} - v\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt} = g\sin\vartheta + F, \quad (4) \qquad \frac{dv}{dt} + u\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt} = F', \quad (5)$$

$$-u\frac{d\vartheta}{dt} - v\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} = R - g\cos\vartheta. \quad (6)$$

Die geometrischen Gleichungen sind

$$u - a\omega_2 = 0, \quad (7) \qquad v + a\omega_1 = 0, \quad (8)$$

Nennen wir ferner $\varrho - a$ den Krümmungsradius des Meridians der Fläche, r den Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der Axe der z, dann haben wir auch

$$a\omega_2 = u = \varrho\frac{d\vartheta}{dt}, \quad (9) \qquad -a\omega_1 = v = r\frac{d\psi}{dt}. \quad (10)$$

Dieses System von Gleichungen bestimmt die Bewegung vollständig.

Die Elimination von F, F', u, v giebt

$$(A + a^2)\left(\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right) + A\omega_3\frac{d\vartheta}{dt} = 0, \quad (11)$$

$$(A + a^2)\left(\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right) + A\omega_3\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} = g\,a\sin\vartheta, \quad (12)$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1\frac{d\vartheta}{dt} - \omega_2\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} = 0. \quad (13)$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\omega_1, \omega_2, A\omega_3$, addieren die Resultate und integrieren die so gewonnene Gleichung, alsdann gelangen wir zu

$$(A + a^2)(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2) + A\omega_3{}^2 = \alpha + 2\int g\varrho\sin\vartheta\, d\vartheta, \quad (14)$$

einer Gleichung, welche wir auch mittelst des Prinzipes der lebendigen Kraft hätten erhalten können.

Durch (9), (10) und (13) ergiebt sich

$$\frac{d\omega_3}{d\vartheta} = \omega_1\left(1 - \frac{\varrho}{r}\sin\vartheta\right). \quad (15)$$

Aus (9), (10) und (11) folgt

$$(A + a^2)\left(\frac{d\omega_1}{d\vartheta} + \frac{\varrho}{r}\cos\vartheta\,\omega_1\right) + A\omega_3 = 0. \quad (16)$$

Die Differentiation dieser Gleichung und die Substitution aus (15) giebt

$$\frac{d^2\omega_1}{d\vartheta^2} + \frac{\varrho}{r}\cos\vartheta\frac{d\omega_1}{d\vartheta} + P\omega_1 = 0, \quad (17)$$

wo
$$P = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\varrho}{r}\cos\vartheta\right) + \frac{A}{A + a^2}\left(1 - \frac{\varrho}{r}\sin\vartheta\right).$$

Aus der Gleichung der Meridiancurve können ϱ und r als Funktionen von ϑ abgeleitet werden, folglich ist auch P eine bekannte Funktion von ϑ.

Indem wir die Gleichung (17) nach gewöhnlichen Regeln lösen, erhalten wir ω_1 als Funktion von ϑ, sodann können ω_2 und ω_3 durch (4) und (15) bestimmt werden. Sind ω_1 und ω_2 ermittelt, so bestimmen die Gleichungen (9) und (10) ϑ und ψ als Funktionen der Zeit, folglich ist die Bewegung der Kugel gefunden.

Ist die Umdrehungsfläche eine Kugelfläche, dann haben wir $\varrho \sin\vartheta = r$. In diesem Falle ergiebt sich mit (15)

$$\frac{d\omega_3}{dt} = 0, \qquad \omega_3 = Konst. = n.$$

Aus der Gleichung (16) folgt

$$(A + a^2)\left(\frac{d\omega_1}{d\vartheta} + cotg\,\vartheta\,\omega_1\right) + A\,\omega_3 = 0,\ \frac{d\omega_1}{d\vartheta} + cotg\,\vartheta\,\omega_1 = -\frac{A}{A+a^2}\omega_3,$$

$$\sin\vartheta\,d\omega_1 + \cos\vartheta\,\omega_1\,d\vartheta = -\frac{A}{A+a^2}\omega_3\sin\vartheta d\vartheta,\ d(\sin\vartheta\omega_1) = -\frac{A}{A+a^2}\omega_3\sin\vartheta d\vartheta,$$

$$\sin\vartheta\,\omega_1 = \beta + \frac{A\,\omega_3}{A+a^2}\,\omega_3\cos\vartheta.$$

Mit $M = 1$ ist $A = k^2$, also auch, weil $k^2 = \frac{2}{5}a^2$,

$$\sin\vartheta\,\omega_1 = \beta + \frac{k^2\omega_3}{a^2+k^2}n\cos\vartheta = \beta + \frac{2}{7}n\cos\vartheta.$$

Durch die Gleichung (14) ergiebt sich, wenn mit b der Halbmesser der festen Kugel bezeichnet wird, da dann $\varrho = (a + b)$ ist,

$$(A + a^2)(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2) + A\,\omega_3 = \alpha + 2\,g\,(a + b)\int \sin\vartheta\,d\vartheta,$$

$$(A + a^2)(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2) + A\,\omega_3 = \alpha - 2\,g\,(a + b)\cos\vartheta.$$

so dass

$$\omega_2{}^2 = \frac{5\,\alpha - 10\,g\,(a + b)\cos\vartheta}{7\,a^2} - \left(\frac{7\,\beta + 2\,n\cos\vartheta}{7\sin\vartheta}\right)^2 - \frac{2}{7}n.$$

Da jetzt die Werte von ω_1 und ω_2 bekannt sind, so können wir mit (9) und (10) auch ϑ und ψ bestimmen.

Zu denselben Resultaten gelangen wir auch mit Hilfe des unter 4 gegebenen allgemeinen Problemes, die Lösung gestaltet sich dann wie folgt: In diesem Falle sind die Meridiane und Paralellen Krümmungslinien. Die Axe des Körpers nehmen wir als Axe der z, mit ϑ bezeichnen wir den Winkel, welchen die Axe SC mit der Axe der z einschliesst, mit ψ den Winkel, welchen die Z und SC enthaltende Ebene mit irgend einer festen vertikalen Ebene macht. Hier ist

$$\vartheta_1 = -\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}, \quad \vartheta_2 = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \vartheta_3 = \cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}.$$

Damit gehen die Gleichungen (4) über in

$$\frac{du}{dt} - \cos\vartheta \frac{d\psi}{dt} v = \frac{a^2}{a^2+k^2} g \sin\vartheta - \frac{k^2}{a^2+k^2} a\,\omega_3 \sin\vartheta \frac{d\psi}{dt}, \tag{1'}$$

$$\frac{dv}{dt} + \cos\vartheta \frac{d\psi}{dt} u = \frac{k^2}{a^2+k^2} a\,\omega_3 \frac{d\vartheta}{dt}. \tag{2'}$$

und die (8) in

$$u^2 + v^2 + \frac{k^2}{a^2+k^2} a^2 \omega_3{}^2 = E + 2g \frac{a^2}{a^2+k^2} \int \varrho \sin\vartheta\, d\vartheta, \tag{3'}$$

wo E eine gewisse Konstante und ϱ den Krümmungsradius des Meridians bezeichnet. Auch haben wir durch (7)

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{uv}{a}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\sin\vartheta}{r}\right), \tag{4}$$

wo r den Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der Axe der z bezeichnet. Die geometrischen Gleichungen (5) werden

$$u = \varrho \frac{d\vartheta}{dt}, \qquad v = r \frac{d\psi}{dt}. \tag{5'}$$

Zum Zwecke der Lösung schreiben wir die (2′) in der Gestalt

$$\frac{dv}{d\vartheta} + \cos\vartheta \frac{d\psi}{d\vartheta} u = \frac{k^2}{a^2+k^2} a\omega_3,$$

welche mit (5′) übergeht in

$$\frac{dv}{d\vartheta} + \frac{\varrho}{r} \cos\vartheta . v = \frac{k^2}{a^2+k^2} a\omega_3,$$

und wenn wir diese Gleichung differentiieren, so erhalten wir mit (4′)

$$\frac{d^2v}{d\vartheta^2} + \frac{\varrho}{r} \cos\vartheta \frac{dv}{d\vartheta} + Pv = 0, \tag{6'}$$

wo
$$P = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\varrho}{r}\cos\vartheta\right) + \frac{k^2}{a^2+k^2}\left(1 - \frac{\varrho}{r}\sin\vartheta\right)$$

ist. ϱ und r können aus der Gleichung der Meridiancurve als Funktionen von ϑ gefunden werden. Folglich ist P eine bekannte Funktion von ϑ. Durch Auflösung dieser linearen Differentialgleichung erhalten wir v als eine Funktion von ϑ, sodann ω_3 mittelst der Relation

$$\frac{d\omega_3}{d\vartheta} = -\frac{v}{a}\left(1 - \frac{\varrho}{r}\sin\vartheta\right),$$

weiter u durch die Gleichung (3′). Sind u und v bekannt, so können ϑ und ψ mit Hilfe der Gleichungen (5′) bestimmt werden.

9. Die Axe einer vollkommen rauhen Rotationsfläche ist vertikal. Wie müssen die Bewegungsverhältnisse beschaffen sein, damit eine schwere, homogene Kugel auf dieser Fläche so rollen kann, dass ihr Mittelpunkt einen horizontalen Kreis beschreibt? Welches ist die Zeit einer kleinen Schwingung, wenn dieses Statium stetiger Bewegung gestört wird?

Durch die Lösung des vorhergehenden Problemes haben wir die Be-

wegung einer homogenen Kugel auf einer Rotationsfläche mit vertikaler Axe unter der Wirkung der Schwerkraft bereits im allgemeinen untersucht, so dass die dort gefundenen Gleichungen auch hier gelten müssen. Um die Ausdrücke zu kürzen, wollen wir hier für k^2 seinen Wert $\frac{2}{5}a^2$ einführen.

Damit die Bewegung eine stetige sein kann, müssen die Grössen $u, v, \omega_3, \vartheta, \frac{d\psi}{dt}$ sämtlich konstant sein. Die konstanten Werte von $\vartheta, \frac{d\psi}{dt}, \omega_3$ seien α, μ, n resp. Bezeichnet c den konstanten Wert von r, d. i. den Halbmesser des von dem Kugelmittelpunkte beschriebenen horizontalen Kreises, dann ist nach (5′)

$$u = 0, \quad v = c\mu, \quad \text{so dass} \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_1 = -\frac{c}{a}\mu.$$

Die Gleichung (1′) nimmt die Gestalt an

$$-c\cos\alpha.\mu^2 = \frac{5}{7}g\sin\alpha - \frac{2}{7}an\sin\alpha.\mu.$$

Aus den übrigen dynamischen Gleichungen, welchen diese Werte genügen, ergiebt sich keine weitere Relation zwischen den Konstanten. Soll mithin die Bewegung eine stetige sein, dann ist die Bedingung zu erfüllen

$$n = \frac{5}{2}\frac{g}{a\mu} + \frac{7}{2}\frac{b}{a}\cot g\,\alpha.$$

Daher haben wir für denselben Wert von n zwei verschiedene Werte von μ, welchen verschiedene Anfangswerte von v entsprechen.

Zufolge der Beziehung $a\omega_1 = -v$ besitzen ω_1 und n entgegengesetzte Zeichen. Daher macht die Rotationsaxe, welche notwendig durch den Berührungspunkt der Kugel und der rauhen Fläche geht, mit der Vertikalen einen Winkel, welcher kleiner als der durch die Normale in dem Berührungspunkte mit der Vertikalen eingeschlossene Winkel ist.

Inspizieren wir den Ausdruck für n, so zeigt es sich, dass derselbe ein Minimum ist, wenn

$$\frac{5}{2}\frac{g}{a\mu} = \frac{7}{2}\cdot\frac{c\mu}{a}\cot g\,\alpha,$$

wofür
$$n^2 = 35\frac{cg}{a^2}\cot g\,\alpha, \qquad \mu^2 = \frac{5}{7}\cdot\frac{g}{c}\,tg\,\alpha.$$

Um die kleine Schwingung zu finden, setzen wir $\vartheta = \alpha + \vartheta'$, $\frac{d\psi}{dt} = \mu + \frac{d\psi'}{dt}$, wobei wir annehmen, dass α und μ alle konstanten Teile von ϑ und $\frac{d\psi}{dt}$ enthalten, also ϑ' und $\frac{d\psi'}{dt}$ nur trigonometrische Grössen in sich einschliessen. Es sei $e - a$ der Krümmungsradius der

Umdrehungsfläche in dem Berührungspunkte mit der Kugel, bei stetiger Bewegung, so dass sich ϱ von e nur durch kleine Grössen unterscheidet und in den kleinen Gliedern gleich e gesetzt werden kann. Für den Abstand des Kugelmittelpunktes von der Axe der z haben wir $r = c + e\cos\alpha . \vartheta'$. Mittelst der Gleichungen (4′) und (5′) ergiebt sich

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{\varrho \sin\vartheta - r}{a} = \frac{d\vartheta'}{dt} \cdot \mu \frac{e\sin\alpha - c}{a},$$

$$\omega_3 = \mu \frac{e\sin\alpha - c}{a} \vartheta' + n,$$

wo n den ganzen konstanten Teil von ω_3 bedeutet.

Ferner erhalten wir mittelst der Gleichung (2)

$$-\frac{1}{a} \cdot \frac{d}{dt}\left(r \frac{d\psi}{dt}\right) - \frac{\varrho}{a} \frac{d\vartheta}{dt} \cos\vartheta \frac{d\psi}{dt} + \frac{k^2}{a^2 + k^2} \omega_3 \frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

$$-\frac{\mu}{a} e\cos\alpha \frac{d\vartheta'}{dt} - \frac{c}{a} \frac{d^2\psi'}{dt^2} - \frac{e\cos\alpha\,\mu}{a} \cdot \frac{d\vartheta'}{dt} + \frac{2}{7} n \frac{d\vartheta'}{dt} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\left(\frac{2}{7} n - \frac{2\mu c\cos\alpha}{a}\right) \vartheta' = \frac{b}{a} \cdot \frac{d\psi'}{dt},$$

es ist die Konstante hier gleich Null, weil ϑ' und ψ' nur trigonometrische Glieder enthalten.

Drittens folgt aus der Gleichung (1′)

$$\frac{1}{a} \frac{d}{dt}\left(\varrho \frac{d\vartheta}{dt}\right) - \frac{r}{a}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \cos\vartheta + \frac{2}{7} \omega_3 \sin\vartheta \frac{d\psi}{dt} = \frac{5}{7} \frac{g}{a} \sin\vartheta,$$

$$\frac{e}{a} \frac{d^2\vartheta'}{dt^2} - \frac{b - e\cos\alpha . \vartheta'}{a} (\cos\alpha - \sin\alpha . \vartheta')\left(\mu^2 + 2\mu \cdot \frac{d\psi'}{dt}\right)$$
$$+ \frac{2}{7} (\sin\alpha + \cos\alpha . \vartheta')\left(\mu + \frac{d\psi'}{dt}\right) \cdot \left(n + \mu \frac{e\sin\alpha - c}{a} \vartheta'\right)$$
$$= \frac{5}{7} \cdot \frac{g}{a} (\sin\alpha + \cos\alpha , \vartheta').$$

Diese Gleichung muss entwickelt und auf die Form gebracht werden

$$\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} + A\vartheta' = B.$$

In diesem Falle müssen wir $B = 0$ haben, weil ϑ' nur trigonometrische Ausdrücke enthalten kann. Setzen wir in dem obigen Ausdrucke $\vartheta' = 0$, dann ergiebt sich derselbe Wert für n wie bei der stetigen Bewegung. Durch die Entwickelung der vorstehenden Gleichung finden wir

$$A = \mu^2\left(-\cos^2\alpha + \frac{2}{7}\sin^2\alpha\right) + \mu^2 \frac{c}{e\sin\alpha}\left(2\cos^2\alpha + \frac{5}{7}\sin^2\alpha\right)$$
$$+ \frac{25}{49} \frac{g^2 \sin\alpha}{\mu^2 c e} - \frac{10}{7} \frac{g}{c} \sin\alpha\cos\alpha + \frac{10}{7} \frac{g}{e} \cos\alpha.$$

Damit die Bewegung stetig sein kann, ist es genügend und notwendig, dass dieser Wert von A positiv ausfällt. Die Zeit einer Schwingung ist alsdann $\frac{2\pi}{\sqrt{A}}$.

Es ist zu beachten, dass diese Untersuchung nur dann zulässig ist, wenn α und daher c nicht klein ist, denn einige der vernachlässigten Glieder besitzen c in ihren Nennern und können dann wichtig werden.

10. Eine homogene, schwere Kugel ist mit einer vollkommen rauhen vertikalen Ebene, welche sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um eine in ihr gelegene feste, vertikale Axe dreht, in Berührung. Wie ist die Bewegung dieser Kugel beschaffen?

Wir wählen das erforderliche räumliche Coordinatensystem so, dass die Axe der z mit der Umdrehungsaxe zusammenfällt, die zu ihr senkrechte Axe der x fest in der rauhen Ebene, welche sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω drehen möge, und nehmen die Axe der z positiv vertikal aufwärts. Es sei a der Halbmesser der Kugel, M ihre Masse, R die Normalreaktion der Ebene. Die Componenten des Reibungswiderstandes in dem Berührungspunkte von Ebene und Kugel parallel zu den Axen der x und der z bezeichnen wir mit F_x und F_z.

Die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes der Kugel sind

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = \frac{F_x}{M}, \quad (1) \qquad -a\omega^2 + 2\omega\frac{dx}{dt} = \frac{R}{M}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + \frac{F_z}{M}. \quad (3)$$

Ferner sind die Gleichungen für die Rotation

$$\frac{d\omega_x}{dt} - \omega\,.\,\omega_y = -\frac{F_z\,.\,a}{Mk^2}, \quad (4) \qquad \frac{d\omega_y}{dt} + \omega\,.\,\omega_x = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{F_x\,.\,a}{Mk^2}. \quad (6)$$

Weiter sind die Nebenbedingungen, weil der Berührungspunkt von Kugel und Ebene relativ in Ruhe zu der Ebene ist,

$$\frac{dx}{dt} + a\omega_z = 0, \quad (7) \qquad \frac{dz}{dt} - a\omega_x = 0. \quad (8)$$

Die Lösung dieser Gleichungen bewirken wir in folgender Weise. Aus den Nebenbedingungen (7), (8) ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{d\omega_z}{dt}, \qquad \text{oder} \qquad \frac{d\omega_z}{dt} = -\frac{1}{a}\frac{d^2x}{dt^2}, \quad (9)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a\frac{d\omega_x}{dt}, \qquad \text{oder} \qquad \frac{d\omega_x}{dt} = \frac{1}{a}\frac{d^2z}{dt^2}. \quad (10)$$

Jetzt bekommen wir mit (9) und (6)

$$F_x = -\frac{M k^2}{a^2} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2},$$

folglich mit (1)

$$\frac{a^2 + k^2}{a^2} \frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x = 0, \qquad \frac{7}{5} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x = 0, \tag{11}$$

weil $k^2 = \frac{2}{5} a^2$ ist.

Setzen wir der Allgemeinheit halber $sin^2 \nu = \frac{5}{7}$, so erscheint die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \omega^2 sin^2 \nu . x,$$

deren Integration giebt

$$x = E e^{sin \nu . \omega t} + G e^{-sin \nu . \omega t}, \tag{12}$$

wo E und G die willkürlichen Integrationskonstanten bezeichnen.

Ferner bekommen wir durch Verbindung der Gleichungen (10) und (4)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - a \omega . \omega_y = -\frac{F_z a^2}{M k^2}, \tag{13}$$

sowie der Gleichungen (8) und (5)

$$a \frac{d \omega_y}{dt} + \omega \frac{dz}{dt} = 0, \qquad a \omega_y + \omega z = H. \tag{14}$$

Die Substitution des Wertes von $a \omega_y$ aus (14) in (13) giebt

$$M k^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + M k^2 \omega^2 z = M k^2 H - F_z a^2.$$

Mit (3) geht diese Relation über in

$$\left. \begin{aligned} (a^2 + k^2) \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 \omega^2 z = k^2 \omega H - a^2 g = -\gamma \\ \frac{7}{5} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2}{5} \omega^2 z = -\gamma \end{aligned} \right\}. \tag{15}$$

Der Einfachheit halber wollen wir nun annehmen, dass die Bewegung der Kugel von dem Ruhezustande aus beginnt; für diesen Augenblick sei $t = 0$, und der Schwerpunkt der Kugel habe die Coordinaten $x = x_0$, $y = 0$, $z = 0$.

Damit haben wir für die Integrationskonstanten in (12)

$$x_0 = E + G, \qquad 0 = E - G. \qquad \text{so dass} \qquad E = G = \frac{x_0}{2}.$$

Demnach wird

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\sin\nu\,.\,\omega t} + e^{-\sin\nu\,.\,\omega t}\right),\quad \frac{dx}{dt} = \frac{x_0 \sin\nu\,.\,\omega}{2}\left(e^{\sin\nu\,.\,\omega t} - e^{-\sin\nu\,.\,\omega t}\right) \\ \text{oder} \\ x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{5}{7}}\,\omega t} + e^{-\sqrt{\frac{5}{7}}\,\omega t}\right),\quad \frac{dx}{dt} = \frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\omega\left(e^{\sqrt{\frac{5}{7}}\,\omega t} - e^{-\sqrt{\frac{5}{7}}\,\omega t}\right) \end{array}\right\}.(16)$$

Die Gleichung (14) zeigt, dass mit $z = 0$ die Konstante $H = 0$ ist, daher wird die (15)

$$(a^2 + k^2)\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2\omega^2 z = -g a^2, \qquad \frac{a^2 + k^2}{a^2}\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2}{a^2}\omega^2 z = -g,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2}{7}\omega^2 z = -\frac{5}{7}g, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + \cos^2\nu\,\omega^2 z = -g\sin^2\nu.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$z = -\frac{g}{\nu^2}\,tg^2\,\nu\left\{1 - \cos(\omega t \cos\nu)\right\},$$

oder

$$z = -\frac{5}{2}\frac{g}{\omega^2}\left\{1 - \cos\left(\omega t\sqrt{\frac{2}{7}}\right)\right\} = -\frac{5g}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{\sqrt{14}}. \qquad (17)$$

Dieser Ausdruck wird zu einem Maximum mit $\sin^2\frac{\omega t}{\sqrt{14}} = 1$. daher ist der Maximalwert von z oder die Falltiefe der Kugel

$$z_{max} = -\frac{5g}{\omega^2},$$

und es kann die Kugel niemals unter diese Tiefe herabsinken. Die Zeit, welche verfliesst bis zur Erreichung dieser Tiefe, folgt aus der Gleichung

$$\frac{\omega t}{\sqrt{14}} = arc\,(\sin = 1) = \frac{\pi}{2},$$

sie ist mithin

$$t = \frac{\pi}{\omega}\sqrt{\frac{7}{2}}, \qquad (18)$$

also, wie die Falltiefe, nur von der Winkelgeschwindigkeit der Ebene abhängig.

Die Bahn des Kugelmittelpunktes, resp. des Berührungspunktes von Kugel und Ebene, ist durch die Gleichungen (16) und (17) gegeben. Eliminieren wir aus diesen Gleichungen die Zeit, so bekommen wir die Gleichung der Bahn des Berührungspunktes auf der Ebene in rechtwinkeligen Coordinaten. Damit ist die Bewegung der Kugel vollständig bestimmt.

Für den Druck der Ebene auf die Kugel erhalten wir mit (2) und (16)

$$R = -M\omega^2\left\{a - x_0\sqrt{\frac{5}{7}}\left(e^{\sqrt{\frac{5}{7}}\,\omega t} + e^{-\sqrt{\frac{5}{7}}\,\omega t}\right)\right\}.$$

Endlich ergiebt sich noch für die Componenten des Reibungswiderstandes

$$F_x = -\frac{2}{5} M \omega^2 x, \quad F_z = \frac{2}{7} M (g - \omega^2 z) = \frac{2}{7} M g \left(1 + 5 \sin^2 \frac{\omega t}{\sqrt{14}}\right),$$

und es ist in dem Augenblicke, wo die Kugel ihre Falltiefe erreicht,

$$F_x = -\frac{1}{5} M \omega^2 x_0 \left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}} + e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}}\right), \qquad F_z = \frac{12}{7} M g,$$

womit sich zeigt, dass in diesem Zeitmomente die Vertikalcomponente des Reibungswiderstandes grösser als das Gewicht der Kugel ist, wie dem sein muss, wenn sie nicht weiter herabsinken soll.

11. Eine homogene Kugel rollt unter der Wirkung der Schwerkraft in irgend einer Weise auf einer vollkommen rauhen, festen Kugel mit dem Mittelpunkte O. 1) Zeige, dass während der ganzen Bewegung die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S der rollenden Kugel gleich derjenigen ist, welche ein materieller Punkt erlangt, wenn er eine Höhe gleich $\frac{5}{7}$ des Abstandes des Schwerpunktes von einer festen horizontalen Ebene frei durchfällt. 2) Die sich bewegende Kugel wird die feste Kugel verlassen, wenn die Höhe ihres Schwerpunktes über O gleich $\frac{10}{17}$tel der Höhe der festen Ebene über demselben Punkte ist. 3) Die Horizontalgeschwindigkeit von S ist proportional der Tangente des Winkels, welchen die Gerade SU mit dem Horizonte einschliesst, wo U ein fester Punkt auf der Vertikalen durch O ist.

12. Eine homogene Kugel rollt unter der Wirkung der Schwerkraft auf einer vollkommen rauhen Cylinderfläche mit unter dem Winkel α zum Horizonte geneigter Axe. Der Querschnitt des Cylinders ist so beschaffen, dass der Mittelpunkt der auf ihm rollenden Kugel eine Cycloide beschreibt, deren Spitzen auf derselben horizontalen Linie liegen. Beim Beginne der Bewegung ist die Kugel in Ruhe und ihr Mittelpunkt fällt mit einer der Spitzen der Cycloide zusammen. Bestimme die Bewegung.

Die Lage der Kugel sei bestimmt durch den entlang einer Mantellinie beschriebenen Weg ξ und den vom Scheitel aus gemessenen Cycloidenbogen s. Bezeichnet $4b$ den Krümmungsradius der Cycloide für ihren Scheitel, so haben wir

$$s = 4 b \cos \sqrt{\frac{5 g \cos \alpha}{28 b}} \cdot t.$$

Weil $v = \frac{ds}{dt}$ und $\varrho_2^2 + s^2 = 16 b^2$ ist, finden wir, dass $\frac{v}{\varrho_2}$ konstant ist. Dieses giebt ohne Schwierigkeit

$$\omega_3 = -\frac{\sin \alpha}{a} \sqrt{\frac{35 b g}{\cos \alpha}} \left\{1 - \cos \frac{1}{7} \sqrt{\frac{5 g \cos \alpha}{2 b}} \cdot t\right\},$$

$$u = \sin \alpha \sqrt{\frac{10 b g}{\cos \alpha}} \sin \frac{1}{7} \sqrt{\frac{5 g \cos \alpha}{2 b}} \cdot t.$$

Die Relation $\frac{v^2}{\varrho_2} = Konst.$ ist vorhanden, wenn 1) die in dem Mittelpunkte der Kugel angreifenden Kräfte und die Gestalt des Cylinderquerschnittes so beschaffen sind, dass die Tangentialcomponente in einem konstanten Verhältnisse zu $\varrho_2 \frac{d \varrho_2}{d s}$ steht, 2) die

Bewegung der Kugel vom Ruhezustande aus an der Stelle beginnt, wo $\varrho_2 = 0$ ist. In einem solchen Falle besitzt die Normalebene zu dem Querschnitte durch den Mittelpunkt der Kugel eine konstante Winkelgeschwindigkeit im Raume und die Bewegung der Kugel senkrecht zu den Mantellinien ist unabhängig von derjenigen entlang den Mantellinien.

13. Eine Kugel rollt auf einem vollkommen rauhen Kreiscylinder vom Halbmesser c unter der Wirkung keiner Kraft. Zeige, dass die von dem Berührungspunkte beschriebene Bahn die Curve $x = A \sin\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{y}{c}$ ist, wenn die Cylinderfläche in einer Ebene ausgebreitet wird. Dieses Resultat lehrt, dass die Kugel sich nicht kontinuierlich in einer Richtung entlang der Länge des Cylinders bewegen kann, wenn nicht der Berührungspunkt eine Mantellinie beschreibt.

14. Eine Kugel rollt auf einem vollkommen rauhen Kegel so, dass die Gleichung der Kegelfläche, auf welcher der Mittelpunkt S stets liegt, $\frac{r}{\varrho_2} = F(\varphi)$ ist. An dem Mittelpunkte der Kugel wirkt eine nach dem Scheitel gerichtete Kraft. Bestimme das Kraftgesetz so, dass irgend eine gegebene Bahn beschrieben werden kann.

Wenn die Gleichung der Bahn $\frac{1}{r} = f(\varphi)$ ist, beweise, dass für die Kraft X dann die Gleichung bestehen muss

$$X = k^2 \omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{a^2 + k^2}{a^2} h^2 f^2 \left(f + \frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right),$$

wo ω_3 gegeben ist durch

$$\frac{d\omega_3}{d\varphi} = -\frac{h}{a} F \frac{df}{d\varphi}.$$

15. Ein gerader Kegel rollt mit seinen Mantellinien auf einer vollkommen rauhen, geneigten Ebene unter der Wirkung der Schwerkraft. Bestimme die Bewegung.

Es sei 2α der Winkel des Kegels, h die Länge seiner Axe, β die Horizontalneigung der Ebene, k' der Trägheitsradius des Kegels für eine erzeugende Linie, φ die Neigung der Berührungslinie von Ebene und Kegel zu der Richtung der Componente der Schwerkraft parallel zu der Ebene, dann ist die Bewegung des Kegels durch die Gleichung definiert

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{3}{4} \frac{g h \sin^2\alpha \sin\beta}{k'^2 \cos\alpha} \sin\varphi.$$

16. Eine vollkommen rauhe, vertikale Ebene dreht sich mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit μ um eine zu ihr senkrechte Axe und auch mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit Ω um eine vertikale Axe in ihr selbst, welche die erstere Axe schneidet. Eine schwere, homogene Kugel vom Radius c wird mit der Ebene in Berührung gebracht. Beweise, dass die Lage des Schwerpunktes der Kugel zu einer beliebigen Zeit t durch die Gleichungen gegeben ist

$$7\frac{d^2\xi}{dt^2} - 5\Omega^2\xi - 2\mu\frac{dz}{dt} = 0, \qquad 7\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\Omega^2\frac{dz}{dt} + 2\mu\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \Omega^2\xi\right) = 0,$$

dabei bezeichnet z den Abstand des Mittelpunktes von der horizontalen Ebene durch die horizontale Umdrehungsaxe, ξ denjenigen von der Ebene durch die zwei Axen. Zeige ferner, dass

$$7u = 7c\Omega + 2\mu b, \qquad 7v + 2\mu a = 0,$$

wenn a und b die Anfangswerte von ξ und z, u und v jene von $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ sind.

4—16. Routh, Dynamics &c.

Im zehnten Kapitel der Dynamik von Routh findet der Leser noch weitere derartige Probleme.

Achtes Kapitel.

Bewegung unveränderlicher, materieller Systeme unter dem Einflusse von Stosskräften.

Treffen zwei materielle Körper während ihrer Bewegung aufeinander, so entsteht eine Erscheinung, welche wir mit dem Namen Stoss bezeichnen. Durch die wechselseitige Wirkung beider Körper, während sie sich mit ihren Oberflächen teilweise berühren, werden ihre Bewegungen in Hinsicht auf Translation und Rotation im allgemeinen eine Modifikation erfahren; die Bestimmung der Beschaffenheit derselben in dem Falle von Körpern, deren Lagen und Bewegungen in dem Momente vor dem Zusammentreffen bekannt sind, bildet das allgemeine Problem des Stosses. Der Stossprozess kann in zwei Abschnitte von sehr kleiner Zeitdauer geteilt werden. Während des ersten Zeitintervalles sind die zwei Flächen, mit denen sich die beiden Körper berühren, genötigt gleiche Geschwindigkeiten in der Richtung ihrer gemeinschaftlichen Normalen anzunehmen. In dem zweiten Abschnitte findet, wenn die Körper nicht unelastisch sind, durch die Fähigkeit der Körper nach erfolgter Compression sich wieder auszudehnen, eine additionelle Reaktion zwischen ihnen statt, deren Grösse von dem Grade der Elastizität beider Körper abhängig ist. Ist die Bewegung der beiden Körper vor dem Stosse von der Art, dass sie in der Richtung derjenigen geraden Linie erfolgt, welche ihre Schwerpunkte verbindet, so entsteht der gerade Centralstoss; nach stattgehabtem Zusammentreffen bewegen sich ihre Schwerpunkte in dieser Linie weiter, wenn nicht ihre Geschwindigkeiten durch die Wirkung des Stosses gleich Null werden. Sind die Richtungen, in denen sich die Schwerpunkte der Körper vor dem Stosse bewegen, zu einander geneigt und geht die gemeinschaftliche Normale ihrer Oberflächen in dem Momente der Berührung durch die Schwerpunkte beider, so entsteht der schiefe Centralstoss, nach stattgehabter Compression und Expansion erfolgen sodann die Bewegungen der Schwerpunkte in gewissen Richtungen. Schneidet die gemeinschaftliche Normale der in dem Momente des Zusammentreffens sich berührenden Flächen nicht die Schwerpunkte der Körper, dann haben wir den allgemeinen Fall des Stosses vor uns.

Gewöhnlich wird der Stoss sphärischer Körper, welcher entweder ein gerader oder ein schiefer Centralstoss sein kann, besonders betrachtet und dabei der einfache Fall angenommen, dass die Körper keine Rotationsgeschwindigkeiten vor und nach dem Zusammentreffen besitzen, so dass wir hier die erste Abteilung dem Stosse sphärischer Körper, die zweite den zusammengesetzten Stossproblemen widmen.

Erste Abteilung.

Stoss sphärischer Körper.

1. Bewegen sich zwei glatte, sphärische Körper so, dass ihre Mittelpunkte dieselbe gerade Linie beschreiben, und treffen sie zusammen, so entsteht der gerade Centralstoss. Es seien m_1, m_2 die Massen, u_1, u_2 die Geschwindigkeiten der Körper vor, v_1, v_2 diejenigen nach dem Stosse und P bezeichne den Widerstand, welcher während eines Zeitelementes durch das gegenseitige Zusammenpressen der Körper hervorgerufen wird. Die Geschwindigkeit, welche dadurch der stossende Körper in dem Zeitelemente dt verliert, ist $\frac{P}{m_1}dt$, diejenige welche der gestossene Körper gewinnt, $\frac{P}{m_2}dt$. Nach der Zeit t, gerechnet vom Beginn der Berührung an, müssen, wenn t kleiner als die Stosszeit gedacht wird, die Gleichungen bestehen

$$u_1 - \frac{\int_0^t P\,dt}{m_1} = v_1, \qquad u_2 + \frac{\int_0^t P\,dt}{m_2} = v_2,$$

oder
$$m_1 u_1 - m_1 v_1 = \int_0^t P\,dt, \qquad m_2 u_2 - m_2 v_2 = -\int_0^t P\,dt,$$

und giebt die Addition dieser Relationen

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \tag{1}$$

d. h. in jedem Augenblicke während der Stosszeit ist die Summe der Bewegungsgrössen beider Körper gleich gross.

Sind nun die beiden Körper vollkommen unelastisch, so werden sie sich nach der Stosszeit t, in welcher die gegenseitige grösste Compression eingetreten ist, mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit v weiter bewegen, welche mit (1) ist, da wir nur $v_1 = v_2 = v$ daselbst zu setzen haben,

$$v = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Die mechanische Arbeit A, welche durch die Compression für die Bewegung beim Stosse unelastischer Körper verloren geht, ist

$$A = \frac{m_1}{2}(u_1{}^2 - v^2) + \frac{m_2}{2}(u_2{}^2 - v^2) = \frac{1}{2}(m_1 u_1{}^2 + m_2 u_2{}^2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2,$$

oder mit (2)

$$A = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(u_1 - u_2)^2}{2}. \tag{3}$$

Bei vollkommen unelastischen Körpern ist der Arbeitsverlust gleich dem Produkte aus dem harmonischen Mittel beider Massen und der Fallhöhe, welche der Differenz der Geschwindigkeiten dieser Massen vor dem Stosse entspricht.

Weil mit (2) auch

$$\frac{m_1 + m_2}{2} v = m_1 u_1 + m_2 u_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} v,$$

so folgt noch

$$A = \frac{m_1}{2}(u_1 - v)^2 + \frac{m_2}{2}(u_2 - v)^2. \tag{4}$$

Der Verlust an mechanischer Arbeit ist gleich der Summe der halben lebendigen Kräfte, die den Geschwindigkeitsänderungen $(u_1 - v)$ und $(u_2 - v)$ entsprechen.

Sind die beiden Körper vollkommen elastisch, dann haben wir vom Beginn der Berührung bis zum Momente der grössten gegenseitigen Zusammendrückung ganz dasselbe wie bei vollkommen unelastischen Körpern, nach diesem Augenblicke dehnen sich aber die Körper wieder aus und nehmen ihre ursprüngliche Gestalt an, wodurch der in dem ersten Zeitintervall des Stosses eingetretene Arbeitsverlust wieder ersetzt wird. Daher haben wir für den Stoss zweier vollkommen elastischer Körper die beiden Gleichungen

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad (5) \qquad m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \quad (6)$$

Aus diesen Relationen ergeben sich für die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stosse die Werte

$$v_1 = \frac{2 m_2 u_2 + (m_1 - m_2) u_1}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = \frac{2 m_1 u_1 - (m_1 - m_2) u_2}{m_1 + m_2}. \tag{7}$$

Durch die Elimination der Massen zwischen diesen Gleichungen gelangen wir zu der Relation zwischen den Geschwindigkeiten

$$\left.\begin{aligned} &\frac{v_1^2 - u_1^2}{v_1 - u_1} = \frac{v_2^2 - u_2^2}{v_2 - u_2}, \\ \text{so dass} \quad &v_1 + u_1 = v_2 + u_2, \quad \text{oder} \quad v_1 - v_2 = u_2 - u_1 \\ &v_1 = u_2 + v_2 - u_1, \qquad v_2 = u_1 + v_1 - u_2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Einsetzung dieser Werte von v_2 und v_1 nach einander in die (5) und die Auflösung der resultierenden Gleichungen nach v_1, resp. v_2 giebt

$$v_1 = u_1 - \frac{2 m_2 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = u_2 + \frac{2 m_1 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}, \tag{9}$$

oder

$$u_1 - v_1 = 2 \frac{m_2 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}, \qquad u_2 - v_2 = -2 \frac{m_1 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}, \tag{10}$$

womit der Geschwindigkeitsverlust und der Geschwindigkeitsgewinn des stossenden und des gestossenen Körpers bestimmt sind.

Bei den vollkommen unelastischen Körpern ist

$$u_1 - v_1 = \frac{m_2 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}, \qquad u_2 - v_2 = -\frac{m_1 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}. \tag{11}$$

Hiernach ist also bei vollkommen elastischen Körpern der Geschwindigkeitsverlust des stossenden und der Geschwindigkeitsgewinn des gestossenen Körpers doppelt so gross als bei vollkommen unelastischen Körpern.

Sind die beiden Körper unvollkommen elastisch, so dehnen sie sich nach erfolgter Compression nicht ganz bis zu ihrer ursprünglichen Gestalt wieder aus und es sind deshalb ihre Elastizitätscoëfficienten, die auf dem Wege des Versuches bestimmt werden müssen, in die Rechnung einzuführen. Bezeichnet wieder P die Kraft, mit welcher die beiden Körper zusammentreffen, sind f_1, f_2 die Querschnitte der Körper senkrecht zur Stossrichtung, l_1, l_2 ihre Längen, dabei die Massen in Form von geraden Prismen denkend, E_1, E_2 ihre Elastizitätsmodule, λ_1, λ_2 die Längen der grössten Zusammenpressungen, so bestehen auf Grund der Experimente die Beziehungen

$$\lambda_1 = \frac{P l_1}{f_1 E_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{P l_2}{f_2 E_2},$$

oder, mit $\frac{f_1 E_1}{l_1} = H_1, \; \frac{f_2 E_2}{l_2} = H_2,$

$$\lambda_1 = \frac{P}{H_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{P}{H_2}, \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{H_2}{H_1}.$$

Der Ausdruck $\frac{fE}{l}$ wird nach Whewell „Härte des Körpers" genannt und ist diese demnach der Tiefe der Zusammenpressung umgekehrt proportional. Bezeichnet σ die Summe der Zusammenpressungen, so ist

$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = P\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}\right) = P \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 \cdot H_2}, \qquad P = \frac{H_1 \cdot H_2}{H_1 + H_2}\,\sigma.$$

Die auf das Zusammenpressen verwendete Arbeit ist

$$A' = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = P\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{H_1 \cdot H_2}{H_1 + H_2}\,\sigma^2,$$

woraus

$$\sigma = (u_1 - u_2)\sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 \cdot H_2}}.$$

Wird nach erfolgter Compression von dem einen Körper das $\mu_1$fache, von dem andern das $\mu_2$fache an Arbeit zurückgegeben, so ist der gesamte Arbeitsverlust nach dem Stosse

$$A = \frac{1}{2} P \left\{ (1 - \mu_1)\lambda_1 + (1 - \mu_2)\lambda_2 \right\} = \frac{1}{2} P^2 \left\{ \frac{1 - \mu_1}{H_1} + \frac{1 - \mu_2}{H_2} \right\}$$

und weil $\quad P = \frac{H_1 \cdot H_2}{H_1 + H_2}(u_1 - u_2)\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 \cdot H_2}},$

so ist auch $\quad A = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\left(1 - \frac{\mu_1 H_2 + \mu_2 H_1}{H_1 + H_2}\right). \qquad (12)$

Die Geschwindigkeiten nach dem Stosse bestimmen sich nun mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 - (u_1 - u_2)^2 \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\left(1 - \frac{\mu_1 H_2 + \mu_2 H_1}{H_1 + H_2}\right).$$

Aus ihnen folgt durch eine kleine Rechnung, wobei der Bequemlichkeit halber zunächst $v_2 - u_2 = \frac{m_1}{m_2} x$ gesetzt werden kann,

$$u_1 - v_1 = (u_1 - u_2)\frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right), \tag{13}$$

$$v_2 - u_2 = (u_1 - u_2)\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right), \tag{14}$$

womit der Geschwindigkeitsverlust und der Geschwindigkeitsgewinn, sowie auch die Geschwindigkeit nach erfolgter Collision, des stossenden und des gestossenen Körpers bekannt sind.

Durch die Addition der Gleichungen (13) und (14) erhalten wir die von den Massen der Körper unabhängige Relation:

$$v_2 - v_1 = (u_1 - u_2)\sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}, \tag{15}$$

welche sagt, dass das Verhältnis aus der relativen Geschwindigkeit der zwei Körper nach dem Stosse und derjenigen vor dem Stosse ein konstantes ist, so lange als die materielle Beschaffenheit der Körper sich nicht ändert.

Mit $\mu_1 = \mu_2 = 1$ resultieren aus den Gleichungen (12) bis (15) die Gesetze für den Stoss vollkommen elastischer Körper, mit $\mu_1 = \mu_2 = 0$ diejenigen für den Stoss unelastischer Körper.

Sind die Körper von gleicher Elastizität, so ist, wenn $\mu = \varepsilon^2$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} &A = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2} \cdot \frac{m_1 . m_2}{m_1 + m_2}(1 - \varepsilon^2), \\ &u_1 - v_1 = (u_1 - u_2)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + \varepsilon), \quad v_2 - u_2 = (u_1 - u_2)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(1 + \varepsilon), \\ &v_2 - v_1 = (u_1 - u_2)\,\varepsilon, \quad \text{oder} \quad \varepsilon u_1 + v_1 = \varepsilon u_2 + v_2. \quad \text{(A)} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Sind noch die aufeinander treffenden Massen einander gleich, dann haben wir

$$\left.\begin{aligned} &A = \frac{(u_1 - u_2)^2}{4} m . (1 - \varepsilon^2), \quad u_1 - v_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2)(1 + \varepsilon) = v_2 - u_2, \\ &v_2 - v_1 = (u_1 - u_2)\,\varepsilon, \quad \text{oder} \quad \varepsilon u_1 + v_1 = \varepsilon u_2 + v_2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit des gestossenen Körpers gleich Null und seine Masse im Vergleich mit derjenigen des stossenden Körpers unendlich gross ist, so bekommen wir mit (13) und (14)

$$v_1 = -u_1\sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}, \qquad v_2 = 0, \tag{18}$$

d. h. der kleinere Körper wird mit einer Geschwindigkeit zurückgeworfen, welche sich zu der Stossgeschwindigkeit wie $\sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}} : 1$ verhält, und der grössere Körper erfährt durch die Collision keine schätzbare Be-

wegung. Dieses ist offenbar der Fall, wenn Körper auf die Erde stossen und zurückprallen, die Erde erleidet dadurch keine Bewegungsänderung.

Sind in diesem Falle die Elastizitäten der Körper einander gleich, so ist

$$v_1 = -u_1 \varepsilon, \qquad v_2 = 0. \tag{18'}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$\varepsilon^2 = \mu = \frac{v_1^{\,2}}{u_1^{\,2}} = \frac{h_1}{h},$$

weil $u_1^{\,2} = 2gh$, $v_1^{\,2} = 2gh_1$ gesetzt werden kann. Dieser Umstand ist zur experimentellen Bestimmung des Wertes des Coëfficienten μ, resp. ε benutzt worden, denn h ist die Höhe, aus welcher die Masse m_1 auf die fest unterstützte Masse m_2 herabfällt, und h_1 die Höhe, auf welche die Masse m_1 nach dem Aufschlagen zurücksteigt. Newton und Morin fanden auf diesem Wege nachstehende Resultate:

Material:	Wert von $\mu = \varepsilon^2$:
Elfenbein	0·78
Glas	0·879
Kork, Stahl, Wolle	0·309
Holz	fast = 0
Gusseisen	fast = 1.

II. Bewegen sich zwei sphärische Körper von den Massen m_1, m_2 mit den konstanten Translationsgeschwindigkeiten u_1, u_2 in beliebigen Richtungen, jedoch so, dass sie in einem gewissen Zeitmomente zusammentreffen, dann entsteht der schiefe Centralstoss. Es handelt sich hier darum, zu bestimmen, mit welchen Geschwindigkeiten und in welchen Richtungen sich diese Körper, nach stattgefundener Collision, weiter bewegen.

Sind α_1, α_2 die Winkel, welche die Richtungen der Geschwindigkeiten u_1, u_2 mit der gemeinschaftlichen Normalen der Oberflächen beider Körper in dem Augenblicke des Zusammentreffens einschliessen, so sind die Componenten dieser Geschwindigkeiten senkrecht und parallel zu genannter Normallinie $u_1 \sin\alpha_1$, $u_2 \sin\alpha_2$ und $u_1 \cos\alpha_1$, $u_2 \cos\alpha_2$; erstere erleiden durch die Collision keine Veränderung, dagegen ändern sich letztere wie die Geschwindigkeiten u_1, u_2 beim geraden Centralstosse. Die veränderten Normalgeschwindigkeiten setzen sich momentan nach erfolgtem Stosse mit den Componenten $u_1 \sin\alpha_1$, $u_2 \sin\alpha_2$ zu den Geschwindigkeiten zusammen, mit denen sich die Körper nach dem Stosse weiter bewegen.

Die Geschwindigkeiten v_1, v_2 in der Richtung der gemeinschaftlichen Normalen, nach stattgefundener Collision, sind

$$v_1 = u_1 \cos\alpha_1 - (u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)\frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right), \quad (1)$$

$$v_2 = u_2 \cos\alpha_2 + (u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right), \quad (2)$$

aus welchen Gleichungen sich ergiebt

$$v_2 - v_1 = (u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)\sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}. \quad (3)$$

Sind die Elastizitäten beider Körper einander gleich, so folgt

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= u_1 \cos\alpha_1 - (u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + \varepsilon), \\ v_2 &= u_2 \cos\alpha_2 + (u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(1 + \varepsilon), \\ v_2 - v_1 &= (u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2) \,.\, \varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die resultierenden Geschwindigkeiten w_1, w_2 des ersten und zweiten Körpers nach dem Stosse gehen hervor aus den Geschwindigkeiten v_1, $u_1 \sin\alpha_1$, und v_2, $u_2 \sin\alpha_2$, sie sind offenbar

$$w_1 = \sqrt{u_1^2 \sin^2\alpha_1 + v_1^2}, \qquad w_2 = \sqrt{u_2^2 \sin^2\alpha_2 + v_2^2}. \quad (5)$$

Bezeichnen noch β_1 und β_2 die Winkel, welche diese Geschwindigkeiten mit der gemeinschaftlichen Normalen beider Körper einschliessen, so haben wir für dieselben die Gleichungen

$$tg\,\beta_1 = \frac{u_1 \sin\alpha_1}{v_1}, \qquad tg\,\beta_2 = \frac{u_2 \sin\alpha_2}{v_2}. \quad (6)$$

Die ganze Bewegung erfolgt in der Ebene der Richtungen der Geschwindigkeiten u_1 und u_2. Sind die Elastizitäten und die Massen beider Körper einander gleich, so haben wir mit (4)

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= u_1 \cos\alpha_1 - \frac{1}{2}(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)(1 + \varepsilon), \\ v_2 &= u_2 \cos\alpha_2 + \frac{1}{2}(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)(1 + \varepsilon), \\ v_2 - v_1 &= (u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2) \,.\, \varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Ist die stossende Masse m_1 im Vergleich zur gestossenen Masse m_2 unendlich klein und die Geschwindigkeit $u_2 = 0$, so folgt bei gleicher Elastizität aus den Gleichungen (4), (5), (6)

$$v_1 = -u_1 \cos\alpha_1 \,.\, \varepsilon, \qquad v_2 = 0,$$

$$w_1 = u_1 \sqrt{\sin^2\alpha_1 + \cos\alpha_1^2 \,.\, \varepsilon}, \qquad w_2 = 0, \qquad tg\,\beta_1 = -\frac{1}{\varepsilon}\, tg\,\alpha_1,$$

und sind in diesem Falle beide Körper vollkommen elastisch, so ergiebt sich mit $\varepsilon = 1$

$$v_1 = -u_1 \cos\alpha_1, \quad v_2 = 0, \quad w_1 = u_1, \quad w_2 = 0, \quad tg\,\beta_1 = -tg\,\alpha_1,$$

$$\sphericalangle\,\beta_1 = -\sphericalangle\,\alpha_1,$$

d. h. die Reflexionsgeschwindigkeit ist gleich der Einfallsgeschwindigkeit und der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel für den stossenden Körper, die Ruhelage des gestossenen Körpers bleibt unalteriert.

Sind die aufeinander treffenden Körper nicht vollkommen glatt, so entsteht eine Reibung von der Grösse F, welche die Geschwindigkeitscomponenten in der Richtung der Berührungsebene verändert. Ist P die Stosskraft, φ der Reibungscoëfficient, so ist $F = \varphi . P = \varphi . mp$, wenn m die stossende Masse und p die von der Stosskraft erzeugte Normalacceleration bezeichnet, dadurch ist die negative Acceleration der Reibung während des Stosses $\frac{F}{m} = \varphi . p$. Die Reibung und die durch dieselbe erzeugte Geschwindigkeitsänderung ist also φ mal so gross als die Stosskraft, resp. als die durch den Stoss erzeugte Änderung in der Normalgeschwindigkeit.

Fällt z. B. eine Masse m_1 auf einen horizontal fortlaufenden Schlitten senkrecht herab und wird die Geschwindigkeit u_1 dieser Masse ganz vernichtet, so erleidet die Bewegung des Schlittens von der Masse m_2 die Verzögerung $\frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{\varphi . m_1 p}{m_1 + m_2}$ und daher auch die Geschwindigkeit desselben den Verlust $\frac{\varphi m_1}{m_1 + m_2} u_1$.

Stösst eine Masse m_1 gegen eine unbewegliche Masse m_2 unter dem Winkel α, dann ist $m_2 = \infty$, $u_2 = 0$, also $v_1 = -u_1 \cos\alpha . \varepsilon$, $v_2 = 0$, folglich die Änderung in der Normalgeschwindigkeit $u_1 \cos\alpha (1 + \varepsilon)$, wodurch die durch die Reibung bewirkte Änderung in der Tangentialgeschwindigkeit gleich $\varphi u_1 (1 + \varepsilon) \cos\alpha$ ist. Nach dem Stosse geht also die Seitengeschwindigkeit $u_1 \sin\alpha$ über in $u_1 \sin\alpha - \varphi u_1 (1 + \varepsilon) \cos\alpha = u_1 \{ \sin\alpha - \varphi (1 + \varepsilon) \cos\alpha \}$, und ist bei vollkommen elastischen Körpern $u_1 (\sin\alpha - 2 \varphi \cos\alpha)$, bei unelastischen Körpern $u_1 (\sin\alpha - \varphi \cos\alpha)$.

Für die gegen die Bande stossenden Billardbälle hat Coriolis $\varphi = 0{,}2$ gefunden.

Im Jahre 1639 veröffentlichte J. Marc Marci de Crownland, ein ungarischer Arzt, zu Prag ein Werk unter dem Titel „De Proportione Motus, seu Regula Sphymica", in welchem er den Stoss vollkommen elastischer und denjenigen vollkommen unelastischer Körper behandelte. (Montucula, Histoire des Mathématiques, Tom. II, p. 406.) Er beschäftigte sich hauptsächlich mit der Betrachtung vollkommen elastischer Körper und kam zu denselben Regeln für ihren Stoss, welche nun allgemein angenommen sind. Dieses Werk, das früheste, in welchem die Theorie des Stosses richtig zusammengestellt worden ist, geriet in allgemeine Vergessenheit bei der ganzen gelehrten Welt. Der fragliche Gegenstand wurde wieder richtig erforscht durch die unabhängigen Bemühungen von Wallis, Wren und Huyghens, welche unstreitig nicht die geringste Kenntnis von der Existenz des Marci'schen Werkes hatten. Die Gesetze des Stosses

vollkommen unelastischer Körper legte Wallis nieder (Phil. Trans. 1668, p. 864), diejenigen vollkommen elastischer Körper Wren (Phil. Trans. 1668, p. 867) und Huyghens (Phil. Trans, 1669, p. 925, und Journal des Sçavans, vom 18. März 1669). Wren und Lawrence Rook hatten mehrere Jahre vor dem, zur Erläuterung des Prinzipes des Stosses, vor der Königlichen Gesellschaft verschiedene Experimente ausgeführt. Die Schlussfolgerungen von Wallis, Wren und Huyghens, welche der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu London in einer sehr kurzen Schrift vorgelegt worden sind, wurden später ausführlicher gegeben durch Wallis (Mechanica, Pars Tertia, 1671), Keill (Introductio ad Veram Physicam, Lect 12, 13, 14) und Mariotte (Traité de Percussion). Vorhanden sind einige sinnreiche Experimente zur Erläuterung der Theorie des Stosses von Smeaton (Phil. Trans., April 18, 1782). Die Grundsätze für den Stoss unvollkommen elastischer Körper stellte Newton zuerst zusammen (Principia, Lib. I; Scholium to the Laws of Motion); derselbe hat auf experimentellem Wege die Richtigkeit der Gleichung (A) unter (16) für einen beliebigen Wert von ε zwischen Null und der Einheit dargethan. Die vorhergehenden Philosophen haben ihre Aufmerksamkeit auf jene Fälle allein gerichtet, in denen angenommen ist, dass ε entweder gleich Null, oder gleich der Einheit sei. Der physikalische Wert von Newton's Verallgemeinerung ist schlagender, wenn beachtet wird, dass natürliche Körper niemals mit vollkommener Elastizität begabt sind. Der Leser findet auch die Theorie des Stosses unvollkommen elastischer Kugeln in den Werken: Choc des Corps, Prix de l'Académie, Tom. I, von Maclaurin, und Cours de Mathématique, Tom. III, von Bossut. Die Resultate einer Reihe von Experimenten auf die Elastizität der Körper, ausgeführt durch Mr. Hodgkinson, werden gefunden in Vol. III, p. 534, of the Reports of the British Association for the Advencement of Science, wo er gezeigt hat, dass die Grösse ε in der Gleichung (A) nicht, wie wir angaben, und wegen der mathematischen Einfachheit gewöhnlich annehmen, gänzlich unabhängig ist von den Geschwindigkeiten der zusammenstossenden Körper, wie Newton bewiesen hat, sondern dass sie mit wachsender relativer Geschwindigkeit abnimmt und beinahe einen konstanten Wert annimmt, wenn die relative Stossgeschwindigkeit beträchtlich wird.

1. Zwei unelastische Kugeln bewegen sich in entgegengesetzten Richtungen mit gegebenen Geschwindigkeiten. Welches sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stosse?

Sind m_1, m_2 die Massen der Körper, a_1, a_2 ihre Geschwindigkeiten vor dem Stosse, dann sind mit (2) in (I), wenn wir daselbst $u_1 = a_1$, $u_2 = -a_2$ setzen, die verlangten Geschwindigkeiten

$$v_1 = \frac{m_1 a_1 - m_2 a_2}{m_1 + m_2} = v_2.$$

Wenn $m_1 a_1 > m_2 a_2$ ist, so werden die beiden Körper nach dem Stosse mit gemeinschaftlicher Geschwindigkeit in der Richtung der Geschwindigkeit a_1 sich weiter bewegen, ist dagegen $m_1 a_1 < m_2 a_2$, so erfolgt die Bewegung in entgegengesetzter Richtung. Sind die Bewegungsgrössen beider Körper vor dem Stosse, absolut genommen, einander gleich, dann kommen durch den Stoss beide Körper zur Ruhe.

Wallis, Mechan.; Pars Tertia, de Percussione, Prop. IV.

2. Zwei vollkommen elastische Körper bewegen sich in entgegengesetzten Richtungen mit gegebenen Geschwindigkeiten a_1, $-a_2$. Welches sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stosse?

Mit den bereits angewendeten Bezeichnungen erhalten wir durch die Formeln (16), indem wir daselbst $\varepsilon = 1$ setzen, als Arbeitsverlust $A = 0$, wie dem sein muss, ferner

$$a_1 - v_1 = 2(a_1 + a_2)\frac{m_2}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 + a_2 = 2(a_1 + a_2)\frac{m_1}{m_1 + m_2},$$
$$v_2 - v_1 = a_1 + a_2,$$

aus welchen Beziehungen sich ergiebt

$$v_1 = \frac{m_1 a_1 - m_2 a_1}{m_1 + m_2} - \frac{2 m_2 a_2}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = \frac{m_1 a_2 - m_2 a_2}{m_1 + m_2} - \frac{2 m_1 a_1}{m_1 + m_2}.$$

Wallis, Ib., de Elatere et Resilitione, Prop. X.

3. Drei vollkommen elastische Kugeln von den Massen m_1, m_2, m_3 liegen mit ihren Mittelpunkten in einer geraden Linie. Die Masse m_1 wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit nach der Masse m_2 hin geworfen. Welches muss die Grösse der Masse m_2 sein, damit die durch ihre Vermittelung der Masse m_3 mitgeteilte Geschwindigkeit die grösste sein kann?

Es sei a_1 die Geschwindigkeit, mit welcher m_1 geworfen wird, a_2 die Geschwindigkeit, welche m_2 erlangt, nachdem m_1 angestossen hat, a_3 diejenige, welche m_3 durch den Stoss von m_2 mitgeteilt wird.

Hier ist offenbar

$$a_2 = \frac{2 m_1 a_1}{m_1 + m_2}, \qquad a_3 = \frac{2 m_2 a_2}{m_2 + m_3},$$

und daher

$$a_3 = \frac{4 m_1 m_2 a_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} = \frac{4 m_1 a_1}{\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)(m_2 + m_3)}.$$

Weil nun die Geschwindigkeit a_3 ein Maximum sein soll, so muss der Ausdruck $\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)(m_2 + m_3)$ ein Minimum sein, folglich ergiebt sich, wenn wir in Bezug auf die Veränderliche m_2 differentiieren, die Bedingung

$$\frac{m_1}{m_2} + 1 - \frac{m_1}{m_2{}^2}(m_2 + m_3) = 0, \qquad \text{oder} \qquad m_2{}^2 - m_1 m_3 = 0,$$

woraus folgt
$$m_2 = \sqrt{m_1 m_3}.$$

Huyghens, Phil. Trans., 1669, p. 928.
Wolff, Elementa Matheseos Universae, Tom. II, p. 158.

4. Zwei glatte, vollkommen elastische Kugeln bewegen sich mit gegebenen Geschwindigkeiten in gegebenen Richtungen und stossen gegen

einander. Welches sind ihre Geschwindigkeiten und die Richtungen ihrer Bewegungen nach dem Stosse?

Mit den Formeln (4) unter (II) erhalten wir, weil im vorliegenden Falle $\varepsilon = 1$ ist,

$$v_1 = u_1 \cos\alpha_1 - 2(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)\frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$v_2 = u_2 \cos\alpha_2 + 2(u_1 \cos\alpha_1 + u_2 \cos\alpha_2)\frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

woraus sich ergiebt

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \cos\alpha_1 + \frac{2 m_2 u_2 \cos\alpha_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 \cos\alpha_2 + \frac{2 m_1 u_1 \cos\alpha_1}{m_1 + m_2}.$$

Daher sind die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Kugeln nach dem Stosse weiter bewegen, nach (5) unter (II)

$$w_1 = \sqrt{u_1^2 \sin^2\alpha_1 + v_1^2}, \quad w_2 = \sqrt{u_2^2 \sin^2\alpha_2 + v_2^2}$$

und ihre Richtungen bestimmen sich mit (6) durch

$$tg\,\beta_1 = \frac{u_1}{v_1} \sin\alpha_1, \quad tg\,\beta_2 = \frac{u_2}{v_2} \sin\alpha_2.$$

Keill, Introductio ad Veram Physicam, Lect. 14.

5. Zwei unvollkommen elastische Körper bewegen sich in derselben Richtung mit ihren Schwerpunkten in einer geraden Linie und mit gegebenen Geschwindigkeiten; der nachfolgende holt den vorhergehenden ein und Collision entsteht. Welches sind die Geschwindigkeiten der zwei Körper nach dem Stosse?

Mit den in (I) eingeführten Bezeichnungen ist

$$v_1 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} - \varepsilon \frac{m_2 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} + \varepsilon \frac{m_1 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}.$$

Maclaurin, Choc des Corps, p. 30, Prix de l'Académie, Tom. I.

6. Zu bestimmen, mit welcher Geschwindigkeit ein Ball auf einen anderen gleichen Ball, welcher sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit bewegt, stossen muss, damit der stossende Ball zur Ruhe kommen kann, wenn die gemeinschaftliche Elastizität μ, resp. ε, beider Bälle bekannt ist.

Ist u_2 die Geschwindigkeit des Balles, welcher gestossen wird, u_1 diejenige des stossenden Balles, so finden wir mit (10)

$$u_1 = -\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} u_2.$$

7. Man soll die Elastizität zweier Kugeln A, B, von gleichem Materiale, und das Verhältnis ihrer Massen so bestimmen, damit, wenn A auf die ruhende B stösst, A in die Ruhe zurückkehren und B sich mit dem n^{ten} Teile von A's Geschwindigkeit weiter bewegen kann.

Sind m_1, m_2 die Massen von A, B, so wird gefunden werden

$$\varepsilon = \frac{1}{n}, \quad \frac{m_2}{m_1} = n.$$

8. Zwei vollkommen elastische Kugeln treffen direkt mit gleichen Geschwindigkeiten zusammen. Welches ist die Relation zwischen ihren Massen, wenn nach dem Stosse eine derselben in Ruhe bleibt?

$$m_2 : m_1 = 3 : 1,$$

wobei m_2 die Masse der in Ruhe bleibenden Kugel bezeichnet.

9. Man soll die Geschwindigkeiten zweier Körper A, B von gegebener Elastizität und gegebenen Massen, die sich in derselben Richtung bewegen, so bestimmen, damit nach dem Stosse A in Ruhe bleibt und B sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit weiter bewegt.

Sind m_1, m_2 die Massen von A, B, ist ε der gemeinschaftliche Elastizitätscoëfficient, v die Geschwindigkeit von B nach dem Stosse, sind endlich die verlangten Geschwindigkeiten von A, B vor dem Stosse u_1, u_2, so wird gefunden werden

$$u_1 = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \frac{m_2}{m_1 + m_2} v, \qquad u_2 = \frac{\varepsilon m_2 - m_1}{\varepsilon (m_1 + m_2)} v.$$

Maclaurin, Choc des Corps, p. 52, Prix de l'Académie, Tom. I.

10. Ein sphärischer Körper A stösst direkt mit einer gewissen Geschwindigkeit auf einen ruhenden sphärischen Körper B von gleicher, gegebener Elastizität. Man soll die Masse einer dritten Kugel finden, welche, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit von A vor dem Stosse bewegt, dieselbe Bewegungsgrösse besitzt, die B nach dem Stosse eigen ist.

Lasse sein m_1, m_2 die Massen von A, B, ε die gemeinsame Elastizität von A, B, m_3 die Masse des verlangten Körpers, so ist

$$m_3 = (1+\varepsilon) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

11. A, B, C sind drei vollkommen elastische Bälle, ihre Mittelpunkte liegen in einer geraden Linie, ihre Massen verhalten sich wie $2:3:5$; B und C sind in Ruhe. A stösst auf B mit einer Geschwindigkeit gleich der Einheit und B muss sodann auf C stossen. Welches ist die Geschwindigkeit von B nach dem ersten Zusammentreffen, und welches sind die Geschwindigkeiten von B und C nach dem zweiten Zusammentreffen? Kommen A und B nach der ersten Collision wieder zusammen oder nicht?

Nach dem ersten Zusammenstoss ist die Geschwindigkeit von B gleich $\frac{4}{5}$, nach dem zweiten ist diejenige von C gleich $\frac{3}{5}$ und die von B gleich $\frac{1}{5}$ in einer entgegengesetzten Richtung. A und B trennen sich, um nie wieder zusammen zu kommen.

12. Eine gewisse Anzahl von Bällen, gegebener, gemeinsamer Elastizität, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ liegt mit den Mittelpunkten in einer geraden Linie. Der Ball A_1 wird mit einer gewissen Geschwindigkeit so geworfen, dass er auf den Ball A_2 stösst, sodann stösst A_2 auf A_3 und so fort. Man soll die Massen der Bälle $A_1, A_2, A_3, \ldots$ so bestimmen, damit jeder der Bälle nach dem Stosse auf den nächsten zur Ruhe kommt, auch soll man die Geschwindigkeit des n^{ten} Balles nach seiner Collision mit dem $n-1^{ten}$ Balle ermitteln.

Ist c_1 die ursprüngliche Geschwindigkeit von A_1, so ist die verlangte Geschwindigkeit des n^{ten} Balles $\varepsilon^{n-1} c_1$, auch ist $A_n = \frac{A_1}{\varepsilon^{n-1}}$.

13. Eine beliebige Anzahl Kugeln mit gegebener Elastizität ist so geordnet, dass die Kugelmittelpunkte in einer geraden Linie liegen. Eine gegebene Geschwindigkeit wird einer der äussersten Kugeln mitgeteilt, welche dieselbe in direkten Stoss mit der anliegenden Kugel der Reihe bringt. Wie gross ist die von der letzten Kugel dadurch erlangte Geschwindigkeit?

Wenn r die Zahl der Kugeln, ε ihren gemeinschaftlichen Elastizitätscoëfficienten bezeichnet, $m_1, m_2, m_3, \ldots m_r$ ihre Massen sind und a die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher die erste Kugel geworfen wird, dann ist die Geschwindigkeit v, welche durch die Masse m_r erlangt wird, gegeben durch die Gleichung

$$v = (1+\varepsilon)^{r-1} \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot \frac{m_2}{m_2+m_3} \cdot \frac{m_3}{m_3+m_4} \cdots\cdots \frac{m_{r-1}}{m_{r-1}+m_r} \cdot a.$$

Maclaurin, Choc des Corps, p. 54, Prix de l'Acad., Tom. I.

14. Eine gewisse Zahl gleicher Kugeln ist auf einem glatten Tische in eine gerade Linie gebracht worden und schliesst zusammen. Die aufeinander folgenden Kugeln sind miteinander durch gleiche, unelastische Fäden verbunden. Der ersten Kugel wird eine Geschwindigkeit in der Richtung der Linie mitgeteilt, in welcher die Kugelmittelpunkte liegen, um sie von der zweiten abzusondern. Welche Zeit verfliesst bis zu dem Augenblicke, wo die letzte Kugel beginnt sich zu bewegen?

Ist n die Zahl der Kugeln, a die Länge eines jeden der Verbindungsfäden, u die Geschwindigkeit, mit welcher die erste Kugel geworfen wird, dann ist die verlangte Zeit

$$t = \frac{n(u-1)}{1.2} \cdot \frac{a}{u}.$$

15. Zwei Bälle von der Elastizität ε werden längs einer glatten, in einer horizontalen Ebene liegenden, festen Röhre, welche die Gestalt einer geschlossenen Curve besitzt, von zwei beliebigen Punkten in der Röhre geworfen. u_1, u_2 seien die gleichgerichteten Wurfgeschwindigkeiten und l sei die Länge der Röhre. Wie gross ist der Zeitabschnitt zwischen dem ersten und $(n-1)^{ten}$ Stosse?

Der verlangte Zeitabschnitt ist gleich $\frac{l}{u_1-u_2} \cdot \frac{\varepsilon^{-n}-1}{1-\varepsilon}$.

16. Drei gleiche Bälle A, B, C von der Elastizität ε sind auf eine glatte, horizontale Ebene so gelegt, dass ihre Mittelpunkte in einer geraden Linie sich befinden. Denselben sind Geschwindigkeiten in der Richtung ABC erteilt, jene von A und C sind jede grösser als die von B. Nachdem zwei Stösse stattgefunden haben, sind die Geschwindigkeiten von A und B einander gleich. Welches ist das Verhältnis aus der anfänglichen, relativen Geschwindigkeit von C, B und derjenigen von A, B?

$\frac{1}{2} \frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}$ ist das verlangte Verhältnis.

17. Zwischen zwei Kugeln von gegebener Masse ist eine Reihe von Kugeln gelegt. Eine Geschwindigkeit wird einer der äusseren Kugeln erteilt, um sie in direkten

Stoss mit einer der dazwischen kommenden Kugeln zu bringen. Wie müssen die Grössen der dazwischen liegenden Kugeln beschaffen sein, wenn die Geschwindigkeit, welche die letzte Kugel erlangt, die grösstmögliche sein soll? Welches ist diese Geschwindigkeit, wenn die Reihe aus einer unendlich grossen Zahl von Kugeln gebildet wird? Sämtliche Kugeln seien vollkommen elastisch im letzten Falle.

Die dazwischen liegenden Massen müssen geometrische Mittel zwischen den beiden äusseren Massen sein. Wenn die Kugeln vollkommen elastisch sind, m_1, m_2 die Massen der äusseren Kugeln, a_1, a_2 die Geschwindigkeiten, welche m_1 mitgeteilt, m_2 erlangt, bezeichnen, so ist bei einer unendlich grossen Zahl der eingeschalteten Kugeln

$$a_2 = a_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

18. Eine unvollkommen elastische Kugel stösst auf eine Ebene. Man soll den Einfallswinkel und den Reflexionswinkel so bestimmen, damit die Geschwindigkeit vor dem Aufschlage zu der Geschwindigkeit nach demselben in dem Verhältnisse $\sqrt{2}:1$ steht, wenn der Elastizitätscoëfficient $\varepsilon = 1:\sqrt{3}$ ist.

Der Einfallswinkel ist gleich $\frac{1}{6}\pi$, der Reflexionswinkel $= \frac{1}{4}\pi$.

19. Die Kante eines glatten, elliptischen Tisches ist von einem vertikalen Rande umgeben. Ein vollkommen elastischer Ball werde längs dem Tisch aus einem seiner Brennpunkte in einer Richtung geworfen, welche mit der grossen Axe einen gegebenen Winkel einschliesst. Wie gross ist die Neigung seiner Spur zu derselben Axe zwischen dem n^{ten} und $(n+1)^{ten}$ Anschlage?

Wenn ϑ, ϑ_n den gegebenen, resp. den verlangten Winkel, e die Excentrizität der Ellipse darstellt, so wird die Relation gefunden werden

$$tg\frac{\vartheta_n}{2} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^n tg\frac{\vartheta}{2}.$$

20. Eine unelastische, sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit bewegende Kugel A stösst auf eine ruhende, unelastische Kugel B. Die Linie, welche die Mittelpunkte der zwei Kugeln in dem Momente des Stosses verbindet, macht einen gegebenen Winkel mit der Richtung der Bewegung von A. Welches ist die Geschwindigkeit von A nach dem Stosse?

Ist α der gegebene Winkel, sind m_1, m_2 die Massen der Kugeln A, B, u, v die Geschwindigkeiten von A vor und nach dem Stosse, so finden wir

$$v = u\sqrt{sin^2\alpha + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}cos^2\alpha}.$$

21. Eine sich bewegende Kugel A wird von einer gleichen Kugel B getroffen, welche dieselbe Geschwindigkeit besitzt; die beiden Geschwindigkeitsrichtungen schliessen einen Winkel α ein. In dem Augenblicke des Stosses fällt die die Mittelpunkte der Kugeln verbindende Linie mit der Richtung der Bewegung von B zusammen. Welches sind die Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stosse? Für welchen Wert von α ist die Geschwindigkeit von A ein Maximum? Der gemeinschaftliche Elastizitätscoëfficient sei ε.

Ist u die Geschwindigkeit einer jeden der Kugeln A, B vor dem Stosse, sind v_1, v_2 ihre Geschwindigkeiten nach demselben, so wird gefunden werden

$$v_1^2 = \frac{1}{4} u^2 \{ 1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon) \cos\alpha \}^2 + u^2 \sin^2\alpha.$$

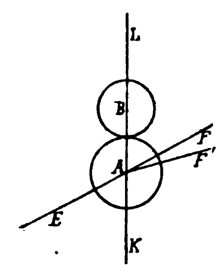
$$v_2^2 = \frac{1}{4} u^2 \{ 1 - \varepsilon + (1 + \varepsilon) \cos\alpha \}^2.$$

Für das Maximum von u muss sein $\cos\alpha = \frac{1-\varepsilon}{3-\varepsilon}$.

22. Drei vollkommen elastische Kugeln A, B, C befinden sich in den drei Eckpunkten eines ebenen Dreiecks mit bekannten Winkeln. Man soll die Massen der Kugeln vergleichen, wenn A schief auf B stossend so zurückgeworfen wird, dass sie C trifft und von da in ihre erste Lage zurückkehrt. Die Mittelpunkte der Kugeln A, B und A, C liegen in dem Momente des Stosses in geraden Linien, welche senkrecht zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten sind. Die Durchmesser der Kugeln sind unbedeutend im Vergleich zu den Längen der Dreiecksseiten.

Sind m_1, m_2, m_3 die Massen der Kugeln A, B, C, α, β, γ die Winkel des Dreiecks, in deren Scheiteln A, B, C plaziert sind, so ergiebt sich

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\gamma)}, \quad \frac{m_3}{m_1} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta-\alpha)}.$$



Figur 148.

23. Eine Kugel A, welche sich in der Richtung EAF (Fig. 148) mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegt, stösst auf eine ruhende Kugel B und es sind beide Kugeln von gleicher Elastizität. Annehmend AF' sei die Richtung der Bewegung von A nach dem Stosse und $KABL$ sei eine gerade, durch die Mittelpunkte der Kugeln gehende Linie in dem Momente des Stosses, zu finden die Werte der Winkel EAK und FAF', wenn der letztere Winkel seinen grössten Wert hat.

Wenn n das Verhältnis der Masse von A zu derjenigen von B, ε der gemeinschaftliche Elastizitätscoëfficient, $\sphericalangle EAK = \vartheta$, $\sphericalangle FAF' = \varphi$ ist, dann wird sich ergeben

$$tg\,\vartheta = \sqrt{\frac{n-\varepsilon}{n+1}}, \quad tg\,\varphi = \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{(n+1)(n-\varepsilon)}}.$$

1—23. Walton, p. 208—218.

24. Zwei Bälle sind in einer geraden Linie beweglich, nur auf den einen derselben werde durch eine Kraft gewirkt, welche konstant und immer nach dem anderen Balle gerichtet ist. Zu vergleichen die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen verfliessenden Zeiten.

Es sei $v =$ der relativen Geschwindigkeit der Bälle gerade vor dem ersten Zusammentreffen, dann ist εv ihre relative Geschwindigkeit gerade danach; folglich werden die Bälle nach einer Zeit gleich $\frac{2\varepsilon v}{\varphi}$ wieder in Berührung sein, wenn φ die Beschleunigung bezeichnet. Gleicherweise ist die nächste Zwischenzeit $\frac{2\varepsilon^2 v}{\varphi}$, die folgende $\frac{2\varepsilon^3 v}{\varphi}$ und so fort. Also ist ε das Verhältnis der Zeiten zwischen zwei aufeinander folgenden Zusammenstössen.

Walton, p. 226.

25. Ein Körper von bekannter Elastizität fällt aus einer gegebenen Höhe auf eine harte horizontale Ebene und prallt kontinuierlich zurück bis seine ganze Geschwindigkeit zerstört ist. Welches ist der ganze von ihm beschriebene Weg?

Es bezeichne h die gegebene Höhe, ε den Elastizitätscoëfficienten, s den verlangten Weg, so ist

$$s = \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} h.$$

26. Zwei vollkommen elastische Bälle beginnen in demselben Augenblicke aus verschiedenen Punkten der nämlichen vertikalen Linie zu fallen und stossen auf eine vollkommen harte, unter einem Winkel von 45° zum Horizont geneigte Ebene, sodann bewegen sie sich entlang einer festen, horizontalen Ebene mit den erlangten Geschwindigkeiten. Welche Strecke werden sie auf der horizontalen Ebene durchlaufen, ehe Collision stattfindet?

Wenn h_1, h_2 die Höhen bezeichnen, welche sie durchfallen, und s der verlangte Weg ist, so besteht die Beziehung

$$s = 2\sqrt{h_1 \cdot h_2}.$$

25—26. Walton, p. 227.

27. Ein materieller Punkt von der Elastizität ε fällt mit der Geschwindigkeit Null aus einer Höhe h in einem gleichförmigen Medium, welchem eine Widerstandsbeschleunigung $k v^2$ zukommt, auf eine vollkommen harte, horizontale Ebene stossend, sodann steigt und fällt er wechselweise. Welches ist der ganze Weg des Punktes bis zum Eintritte der Ruhe?

Der verlangte Weg ist $= h + \frac{1}{k} l \frac{1-\varepsilon^2 e^{-2kh}}{1-\varepsilon^2}$.

Bordoni, Memorie della Societa Italiana, 1816, p. 162. Walton, p. 247.

28. Zwei Kanonen, von denen jede frei zurückprallen kann, differieren nur in ihren Gewichten und in den Gewichten ihrer Kugeln. Annehmend, dass in irgend einem Augenblicke während der Explosion die Explosionskraft nur von dem Raume abhängt, welchen das Pulvergas einnimmt, zu vergleichen 1) die auftauchenden Geschwindigkeiten der Kugeln, 2) die hervorgehenden Geschwindigkeiten von Kugeln, welche aus derselben Kanone abgefeuert werden, wenn sie frei zum Zurückstoss und wenn sie fest ist.

1) Es seien m_1, m_2 die Massen der Kugeln, M_1, M_2 diejenigen der Kanonen, v_1, v_2 die auftretenden Geschwindigkeiten der Kugeln, dann ist

$$v_1 : v_2 = \sqrt{\frac{m_2 + M_2}{m_1 M_2}} : \sqrt{\frac{m_1 + M_1}{m_2 M_1}}.$$

2) Es sei m die Masse der Kugel, M diejenige der Kanone, v_1 die Geschwindigkeit der Kugel, wenn die Kanone frei, v_2 diejenige, wenn sie fest ist, dann wird sein

$$v_1 : v_2 = \sqrt{M} : \sqrt{m + M}.$$

Cayley, Messenger of Mathematics, Vol. V, p. 48. Walton, p. 233.

29. Ein unvollkommen elastischer, der Wirkung der Schwerkraft unterliegender, materieller Punkt wird aus einem bestimmten Punkte in einer horizontalen Ebene mit einer gegebenen Geschwindigheit und in einer

gegebenen Richtung geworfen. Welches ist die Einfalls- und Reflexionsgeschwindigkeit, die ganze Flugweite mit der entsprechenden Flugzeit, nachdem der materielle Punkt durch das Abspringen irgend eine Anzahl parabolische Bogen beschrieben hat?

Es sei ε die Elastizität des materiellen Punktes, u_x die Geschwindigkeit an jedem Ende des x^{ten} parabolischen Bogens, α_x die Horizontalneigung der Curve in diesem Punkte, t_x die Zeit, welche bis zum x^{ten} Aufschlage verfliesst, s_x der Abstand des x^{ten} Stosspunktes von der Anfangslage des materiellen Punktes.

Durch die Theorie des Stosses haben wir

$$u_{x+1} \cos \alpha_{x+1} = u_x \cos \alpha_x, \quad (1) \qquad u_{x+1} \sin \alpha_{x+1} = \varepsilon\, u_x \sin \alpha_x, \quad (2)$$

und durch die Eigenschaften der Bewegung von Projektilen

$$\varDelta t_x = \frac{2}{g} u_{x+1} \sin \alpha_{x+1}, \quad (3) \qquad \varDelta s_x = u_{x+1} \cos \alpha_{x+1} \varDelta t_x. \quad (4)$$

Aus (1) geht offenbar hervor, dass

$$u_x \cos \alpha_x = u_1 \cos \alpha_1, \tag{5}$$

wo u_1 die gegebene Geschwindigkeit und α_1 den gegebenen Wurfwinkel bezeichnet.

Ferner erhalten wir durch (2), $u_x \sin \alpha_x = v_x$ setzend,

$$\varDelta v_x = (\varepsilon - 1)\, v_x,$$

und daher, durch Integration,

$$v_x = C\, \varepsilon^x,$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet. Weil aber gleichzeitig $x = 1$, $v_x = v_1$, so ist $C\varepsilon = v_1$, mithin

$$v_x = v_1\, \varepsilon^{x-1}, \qquad u_x \sin \alpha_x = u_1 \sin \alpha_1\, \varepsilon^{x-1}. \tag{6}$$

Nun bekommen wir mit (5) und (6)

$$tg\, \alpha_x = tg\, \alpha_1 \,.\, \varepsilon^{x-1}, \qquad u_x = u_1 \cos \alpha_1 \left\{ 1 + tg^2\, \alpha_1\, \varepsilon^{2(x-1)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

womit die Wurfverhältnisse für jede der parabolischen Bahnen bestimmt sind

Weiter ergiebt sich mit (3) und (6)

$$\varDelta t_x = \frac{2}{g} u_1 \sin \alpha_1\, \varepsilon^x, \tag{7}$$

integrierend und eine Konstante addierend

$$t_x = \frac{2\, u_1 \sin \alpha_1}{g} \cdot \frac{\varepsilon^x}{\varepsilon - 1} + C;$$

aber es ist $t_0 = 0$, folglich $0 = \frac{2\, u_1 \sin \alpha_1}{g} \frac{1}{\varepsilon - 1} + C$, und daher

$$t_x = \frac{2\, u_1 \sin \alpha_1}{g} \cdot \frac{1 - \varepsilon^x}{1 - \varepsilon}.$$

Endlich folgt aus (4) und (7)

$$\Delta s_x = \frac{2}{g} u_1 \sin \alpha_1 \,.\, \varepsilon^x u_{x+1} \cos \alpha_{x+1},$$

mithin durch (5)

$$\Delta s_x = \frac{u_1^2 \sin 2\alpha_1}{g} \varepsilon^x,$$

wodurch, wenn wir integrieren und beachten, dass $s_0 = 0$,

$$s_x = \frac{u_1^2 \sin 2\alpha_1}{g} \cdot \frac{1-\varepsilon^x}{1-\varepsilon}.$$

Bordoni, Memorie della Societa Italiana, Tom. XVII, P. 1, p. 191, 1816.
Walton, p. 254.

30. Ein sphärisches Atom von der Elastizität ε wird mit einer Geschwindigkeit v unter einem Elevationswinkel α geworfen, in dem Augenblicke, wo dasselbe seine grösste Höhe erreicht, stösst es horizontal auf einen gleichen, materiellen Punkt, welcher mit einer Geschwindigkeit $\frac{1}{2} v$ vertikal abwärts fällt. Wie gross ist der Abstand der beiden materiellen Punkte von einander am Ende von t Sekunden nach dem Stosse?

Der verlangte Abstand ist gleich $\frac{1}{2} v\, t\,(1 + 4\,\varepsilon^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}$.

Walton, p. 256.

31. Ein schwerer Punkt ist unter einem gegebenen Winkel zu der geneigten Ebene AB (Fig. 149) geworfen worden; er schreitet fort die Ebene hinaufzusteigen, indem er eine Reihe von parabolischen Bogen springt. Welches ist der Einfalls- und der Reflexionswinkel nach einer beliebigen Zahl von Aufschlägen?

Figur 149.

Lasse sein i die Horizontalneigung der Ebene, α_x den Reflexionswinkel in dem x^{ten} Bogen, β_{x-1} den Einfallswinkel in dem $(x-1)^{ten}$ Bogen, ε die Elastizität des materiellen Punktes, dann ist

$$tg\,\alpha_x = \frac{(1-\varepsilon)\,\varepsilon^{x-1}\,tg\,\alpha_1}{1-\varepsilon-2\,(1-\varepsilon^{x-1})\,tg\,i\,tg\,\alpha_1} = \varepsilon\,tg\,\beta_{x-1}.$$

Bordoni, Memorie della Societa Italiana, Tom. XVII, P. 1, p. 191, 1816.

32. Eine Kugel von der Elastizität ε wird mit einer Geschwindigkeit v in einer mit dem Horizonte den Winkel $\alpha + i$ einschliessenden Richtung geworfen und springt von einer durch den Anfangspunkt der Bewegung gehenden Ebene ab, welche die Horizontalneigung i besitzt. Zu bestimmen die Relation zwischen R_x, R_{x+1}, R_{x+2}, drei aufeinander folgenden Wurfweiten auf der geneigten Ebene nach x, $x+1$, $x+2$ Zurückprallungen resp. und zu finden den Abstand desjenigen Punktes vom Anfangspunkte, in welchem das Hüpfen aufhört.

Wenn $\cot g\,\beta = (1-\varepsilon) \cot g\, i$, so ist

$$R_{x+2} - (\varepsilon + \varepsilon^2) R_{x+1} + \varepsilon^3 R_x = 0,$$

und der verlangte Abstand ist gleich

$$\frac{2\,V^2 \sin \beta \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{g \sin i \cos^2 \beta}.$$

31 und 32. Walton, p. 262.

33. Ein vollkommen elastischer Ball wird in einen glatten, cylindrischen Brunnen von einem Punkte in dem Umfangs der kreisförmigen Mündung aus geworfen. Zeige, dass die Intervalle zwischen den Reflexionen gleich sind, wenn der Ball beliebig viele Male von der Oberfläche des Cylinders zurückgeworfen wird. Beweise auch, dass der Ball die Oberfläche des Wassers in dem Momente der n^{ten} Reflexion erreicht, wenn der Ball horizontal in einer Richtung geworfen wird, welche einen Winkel $\frac{\pi}{n}$ mit der Tangente an den Mund im Wurfpunkte macht, und wenn der der Wurfgeschwindigkeit zu verdankende Weg gleich ist

$$\frac{(\text{Halbmesser})^2}{\text{Tiefe}} \times \left(n \sin \frac{\pi}{n}\right)^2.$$

34. Ein vollkommen elastischer Ball stösst mit einer Geschwindigkeit v und unter einem Winkel α zum Horizont auf eine geneigte Ebene. Die Stossrichtung befindet sich in einer vertikalen Ebene, welche zu dem Schnitte der geneigten Ebene mit dem Horizonte parallel ist. Nach dem Zurückwerfen fällt der Ball auf diese Ebene. Zeige, dass

$$2\, v \sin \alpha \sin \lambda = \sqrt{g\, h},$$

wenn λ die Horizontalneigung der Ebene und h der Abstand des ersten Stosspunktes von der horizontalen Ebene ist.

35. Ein Ball, welcher von irgend einem Punkte in einer der Wände eines rechteckigen Zimmers geworfen wird, kehrt in den Wurfpunkt zurück, nachdem er die drei anderen getroffen hat, ehe er auf den Boden fällt. Zeige, dass der der Wurfgeschwindigkeit zu verdankende Weg grösser als eine Diagonale des Fussbodens ist.

33—35. Walton, p. 644, 645.

Zweite Abteilung.

Die Systeme besitzen eine Translations- und Rotationsbewegung.

Wirken zwei starre Körper aufeinander ein, dann erfahren ihre Bewegungen sowohl bezüglich der Translation als auch der Rotation im allgemeinen eine Modifikation. Die Bestimmung der Beschaffenheit derselben in dem Falle von Körpern, deren Lagen und Bewegungen vor dem Momente des Zusammentreffens gegeben sind, bildet, wie bereits bemerkt, das allgemeine Problem des Stosses. Der Stossprozess kann in zwei Abschnitte unangebbar kleiner Zeitdauer zerlegt werden. Während des ersten Zeitintervalles sind die zwei Flächen, mit denen sich die beiden Körper berühren, gleiche Geschwindigkeiten in der Richtung ihrer gemeinschaftlichen Normalen anzunehmen genötigt. In dem zweiten Abschnitte findet, wenn die Körper nicht unelastisch sind, eine teilweise oder vollkommene Wiederersetzung der dadurch verlorenen Kraft statt, welche additionelle Reaktion gleich $s\,R$ ist, wenn s den gemeinschaftlichen Elastizitätsmodulus beider Körper, R die Grösse der Compressionskraft bezeichnet. Sind ω_1, ω_2, ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten des einen der Körper um seine Hauptaxen, v_1, v_2, v_3 die Componenten der Geschwindigkeit seines Schwerpunktes am Schlusse der ersten Periode während der Berührung, ω_1', ω_2', ω_3', v_1', v_2', v_3' die analogen Grössen des andern, so bekommen wir für die durch die Compressionskraft veränderte Bewegung

des ersten Körpers sechs Gleichungen, welche zusammen mit bekannten Grössen die Symbole $\omega_1, \omega_2, \omega_3, v_1, v_2, v_3, R$ enthalten, ebenso für den zweiten Körper in gleicher Weise die Gleichungen mit den Symbolen $\omega_1', \omega_2', \omega_3', v_1', v_2', v_3', R$. Im Ganzen gelangen wir also zu zwölf Gleichungen mit dreizehn Veränderlichen. Eine weitere Gleichung ist durch die Bedingung an die Hand gegeben, dass die Punkte der zwei Körper, in denen sie sich berühren, gleiche Geschwindigkeiten in der Richtung der gemeinschaftlichen Normalen besitzen werden. Mithin werden wir im Stande sein, die Modifikation der Bewegungen der zwei Körper, welche durch die Compressionskraft erzeugt wird, und auch die Grösse der Compressionskraft zu bestimmen. Handelt es sich um elastische Körper, dann muss noch eine Modifikation hinzugefügt werden, infolge der Restitutionskraft $e R$, welche aus der Untersuchung für den ersten Teil des Zusammenwirkens beider Körper als eine bekannte Kraft hervorgeht. Ist einer der zwei Körper unbeweglich, so vereinfacht sich die beschriebene Untersuchungsmethode. In diesem Falle reduzieren sich offenbar die dreizehn erwähnten Gleichungen auf sieben und die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der zwei Berührungsflächen ist gleich Null. Zur weiteren Information über diesen Gegenstand wird der Leser verwiesen auf Poisson, Traité de Mécanique, Tom. II, p. 254, seconde édition, und Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

Erster Abschnitt.

Bewegung eines einzelnen Körpers parallel einer Ebene. Die Oberflächen sind vollkommen glatt.

I. Ein Stab von unvollkommener Elastizität bewegt sich irgendwie in einer vertikalen Ebene und trifft auf eine glatte, horizontale Ebene. Welches ist die Anfangsbewegung des Stabes nach dem Stosse?

Zuerst nehmen wir an, dass der Stab unelastisch ist.

In diesem Falle wird das Stabende, welches die horizontale Ebene trifft, nach dem Stosse fortfahren auf dieser Ebene zu gleiten, ohne sich selbst wieder zu trennen.

Lasse sein PQ (Fig. 150) die Lage des Stabes zu einer beliebigen Zeit nach dem Zusammentreffen mit der Ebene, KL den Schnitt der horizontalen Ebene mit der durch PQ gelegten vertikalen Ebene, S den Schwerpunkt von PQ. Ziehe SM senkrecht zu KL. Ferner setze $QS = a$, $MS = y$, $\sphericalangle SQM = \vartheta$, $k =$ dem Trägheitsradius des Stabes um S, $M =$ seiner Masse, ω, $\omega' =$ den Winkelgeschwindigkeiten des Stabes um S, genommen in der Richtung der Pfeile in der Figur, augenblicklich vor und momentan nach dem Zusammentreffen, $u, v =$ den vertikalen Geschwindigkeiten von S, positiv abwärts genommen, gerade vor und gerade nach dem Zusammentreffen, $P =$ der Stosskraft.

Figur 150.

Da $\omega' - \omega$ die durch den Stoss erzeugte Winkelgeschwindigkeit ist,

so haben wir, wenn β den Wert von ϑ in dem Momente des Zusammentreffens bezeichnet,

$$\omega' - \omega = \frac{P\,a\cos\beta}{M k^2}, \tag{1}$$

und, weil $u - v$ die Geschwindigkeit von S unmittelber nach der Collision ist,

$$u - v = \frac{P}{M}. \tag{2}$$

Hierzu tritt noch die geometrische Bedingung

$$y = a \sin\vartheta.$$

Die Differentiation der letzten Gleichung giebt

$$\frac{dy}{dt} = a\cos\vartheta \frac{d\vartheta}{dt},$$

wo t die Zeit von dem Augenblicke des Stosses bis zu der Ankunft des Stabes in der durch die Figur dargestellten Lage bezeichnet. Folglich haben wir, da $-v$, $-\omega'$ die Werte von $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$ in dem Augenblicke nach dem Zusammentreffen sind,

$$v = a\cos\beta\,.\,\omega'. \tag{3}$$

Jetzt erhalten wir durch die Gleichungen (1), (2), (3)

$$u - \frac{P}{M} = a\cos\beta\left(\omega + \frac{P\,a\cos\beta}{M k^2}\right), \quad \frac{P}{M}\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\cos^2\beta\right) = u - a\,\omega\cos\beta,$$

$$P = M k^2 \frac{u - a\,\omega\cos\beta}{a^2\cos^2\beta + k^2}. \tag{4}$$

Nachdem so die Stosskraft bestimmt worden ist, ergiebt sich mit (1)

$$\omega' = \omega + a\cos\beta\,\frac{u - a\,\omega\cos\beta}{a^2\cos^2\beta + k^2} = \frac{a\,u\cos\beta + k^2\omega}{a^2\cos^2\beta + k^2},$$

oder, weil $k^2 = \frac{1}{3}a^2$ ist,

$$\omega' = \frac{3\,u\cos\beta + a\,\omega}{3\,a\cos^2\beta + a},$$

und mit (2)

$$v = u - k^2\frac{u - a\,\omega\cos\beta}{a^2\cos^2\beta + k^2} = a\cos\beta\,\frac{a\,u\cos\beta + k^2\omega}{a^2\cos^2\beta + k^2},$$

$$v = \cos\beta\cdot\frac{3\,u\cos\beta + a\,\omega}{3\cos^2\beta + 1}.$$

Nun wollen wir annehmen, dass der Stab unvollkommen elastisch ist, und seine Elastizität mit ε bezeichnen.

In diesem Falle muss der durch (4) für P gegebene Wert in dem Verhältnisse $(1 + \varepsilon) : 1$ vergrössert werden, sonach haben wir hier anstatt der Gleichung (4)

$$P = (1 + \varepsilon)\,M k^2 \frac{u - a\,\omega\cos\beta}{a^2\cos^2\beta + k^2},$$

womit die Grösse der Kraft beim Zusammentreffen bestimmt ist. Die Substitution dieses Wertes von P in die (1) giebt

$$\omega' = \omega + (1+\varepsilon)\, a\cos\beta \frac{u - a\,\omega\cos\beta}{a^2\cos^2\beta + k^2}$$

$$= \frac{(k^2 - a^2\varepsilon\cos^2\beta)\,\omega + (1+\varepsilon)\, a\, u\cos\beta}{a^2\cos^2\beta + k^2},$$

$$\omega' = \frac{(a + 3\,a\,\varepsilon\cos^2\beta)\,\omega + 3\,(1+\varepsilon)\, u\cos\beta}{3\,a\cos^2\beta + a},$$

und wenn wir denselben noch in (2) einführen

$$v = u - (1+\varepsilon)\, k^2 \frac{u - a\,\omega\cos\beta}{a^2\cos^2\beta + k^2}$$

$$= \frac{a^2 u\cos^2\beta - \varepsilon k^2 u + (1+\varepsilon)\, k^2 a\,\omega\cos\beta}{a^2\cos^2\beta + k^2},$$

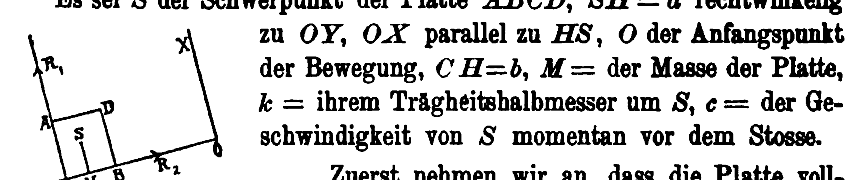
$$v = \frac{3\,u\cos^2\beta + \varepsilon u + (1+\varepsilon)\, a\,\omega\cos\beta}{3\cos^2\beta + 1}.$$

Die Geschwindigkeit von S parallel zu der Ebene KL wird nach dem Zusammentreffen ebenso gross sein wie vor demselben.

Das Stabende P wird sich jetzt von der horizontalen Ebene wieder trennen, weil v kleiner und ω' grösser ist, wenn ε einen endlichen Wert besitzt, als wenn es gleich Null ist.

2. Die Kante BC einer vertikalen Platte befindet sich auf einer Linie OY (Fig. 151) grösster Schräge einer schiefen Ebene. Nachdem sie auf der Ebene entlang einer gegebenen Strecke geglitten ist, stösst sie gegen ein kleines Hindernis bei C. Welches ist die Impulsivreaktion des Hindernisses und die Bewegung der Platte augenblicklich nach dem Zusammentreffen?

Es sei S der Schwerpunkt der Platte $ABCD$, $SH = a$ rechtwinkelig zu OY, OX parallel zu HS, O der Anfangspunkt der Bewegung, $CH = b$, $M =$ der Masse der Platte, $k =$ ihrem Trägheitshalbmesser um S, $c =$ der Geschwindigkeit von S momentan vor dem Stosse.



Figur 151.

Zuerst nehmen wir an, dass die Platte vollkommen unelastisch sei.

In diesem Falle wird der Punkt C der Lamina während der Stosszeit mit dem Hindernisse in Berührung bleiben und die Platte um diesen Punkt rotieren. Bezeichnen R_1, R_2 die Componenten der impulsiven Reaktion des Hindernisses parallel zu den Coordinatenaxen OX, OY, u, v die Geschwindigkeiten von S parallel zu diesen Geraden für die Vollendung des Stosses, ist ω die Winkelgeschwindigkeit zu derselben Zeit um S, dann haben wir für die Translationsbewegung

$$M u = R_1, \quad (1) \qquad M v = M c - R_2, \quad (2)$$

und für die Rotationsbewegung

$$M k^2 \omega = R_2 a - R_1 b. \quad (3)$$

Ferner ist die Geschwindigkeit des Punktes C der Platte parallel zu OX

$$u - \omega . CS . \cos \sphericalangle SCH, \quad \text{oder} \quad u - b\omega,$$

wobei das erste Glied dieses Ausdruckes aus der Bewegung von S, das zweite aus der Rotation der Platte um S hervorgeht.

Ebenso ist die Geschwindigkeit des Punktes C parallel zu OY

$$v - \omega . CS . \sin \sphericalangle SCH, \quad \text{oder} \quad v - a\omega.$$

Aber während des Stosses bleibt der Punkt C der Platte, weil sie unelastisch ist, in Ruhe, folglich haben wir offenbar

$$u - b\omega = 0, \quad (4), \qquad v - a\omega = 0. \quad (5)$$

Jetzt erhalten wir sofort die Werte der Reaktionen R_1 und R_2, nämlich mit (1) und (4), sowie mit (2) und (5), dieselben sind

$$R_1 = M b \omega, \quad (6) \qquad R_2 = M(c - a\omega). \quad (7)$$

Die Substitution dieser Werte von R_1 und R_2 in (3) giebt

$$k^2 \omega = ac - a^2 \omega - b^2 \omega,$$

und daher ist

$$\omega = \frac{ac}{a^2 + b^2 + k^2}, \qquad u = \frac{abc}{a^2 + b^2 + k^2}, \qquad v = \frac{a^2 c}{a^2 + b^2 + k^2}.$$

Mit diesem Werte von ω gehen die Relationen (6) und (7) über in

$$R_1 = M \frac{abc}{a^2 + b^2 + k^2}, \quad R_2 = M\left(c - \frac{a^2 c}{a^2 + b^2 + k^2}\right) = M \frac{b^2 + k^2}{a^2 + b^2 + k^2} c.$$

Ist der Stab elastisch, so erhalten wir mithin

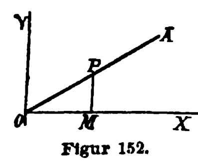
$$R_1 = M \frac{(1 + \varepsilon) abc}{a^2 + b^2 + k^2}, \quad R_2 = M \frac{(1 + \varepsilon)(b^2 + k^2)}{a^2 + b^2 + k^2} c,$$

und daher wird durch (1), (2), (3)

$$u = \frac{(1 + \varepsilon) abc}{a^2 + b^2 + k^2}, \quad v = \frac{a^2 - (b^2 + k^2)\varepsilon}{a^2 + b^2 + k^2}, \quad \omega = \frac{(1 + \varepsilon) ac}{a^2 + b^2 + k^2}.$$

1 u. 2. Walton, p. 578—582.

3. Ein gerader stabförmiger Körper, welcher in einer vertikalen Ebene um ein Charnier an dem einen seiner Enden drehbar ist, stützt sich auf einen Dübel, in einer horizontalen Ebene mit der Drehaxe gelegen. Welcher Stoss muss den Stab in vertikaler Richtung von unten treffen, damit er gerade in die vertikale Lage gelangen kann?



Figur 152.

Es sei OA (Fig. 152) der Stab in einer beliebigen Lage seines Emporsteigens, O das Charnier, die Horizontale OX in der Ebene der Bewegung Abscissen-, die Vertikale OY Ordinatenaxe, $M =$ der Masse des Stabes, $Mk'^2 =$ seinem Trägheitsmomente um O,

m = der Masse eines Stabelementes beim Punkte P, dessen Coordinaten x, y sind $OP = r$, $\sphericalangle AOX = \vartheta$, $OA = a$.

Weil hier nur die Schwerkraft in dieser Lage auf den Stab wirkt, so ist die Gleichung für die Bestimmung der Rotation um O

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{\Sigma(m g x)}{\Sigma(m r^2)} = -\frac{M g \bar{x}}{M k'^2} = -\frac{g a \cos\vartheta}{2 k'^2}.$$

Die Multiplikation mit $2\frac{d\vartheta}{dt}$ und die hierauf bewirkte Integration giebt

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C - \frac{g a}{k'^2} \sin\vartheta.$$

Bezeichnet nun ω die Winkelgeschwindigkeit, welche dem Stabe durch den Stoss mitgeteilt worden ist, so ist $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, wenn $\vartheta = 0$, daher $C = \omega^2$, mithin

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \omega^2 - \frac{g a}{k'^2} \sin\vartheta.$$

Damit der Stab mit der Winkelgeschwindigkeit gleich Null in die vertikale Position OY gelangt, muss $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ sein, wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ wird. Die erforderliche Winkelgeschwindigkeit ergiebt sich demnach aus der Gleichung

$$0 = \omega^2 - \frac{g a}{k'^2},$$

und es ist

$$\omega^2 = \frac{g a}{k'^2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{g a}}{k'}.$$

Die Grösse des Impulses ist daher so zu bestimmen, dass er dem Stabe diese Winkelgeschwindigkeit mitteilt. Um dieselbe zu finden, verfahren wir folgendermassen. Es sei OA (Fig. 152a) der Stab in einer horizontalen Lage und der Stoss erfolge bei P mit einer Kraft V. Dieses wird eine Impulsivreaktion R des Charniers vertikal abwärts verursachen. Nun denken wir uns den Stab als einen freien Körper, R und V als gleichzeitige Impulse nehmend, dann ist mit Rücksicht auf die Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes S für diesen Punkt

Figur 152a.

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{V - R}{M} + C,$$

und, wenn ω_1 die Winkelgeschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit während der Impulsivwirkung bezeichnet, Mk^2 das Trägheitsmoment des Stabes um S ist,

$$\omega_1 = \frac{V.\overline{SP} + R.\overline{OS}}{Mk^2} + C'.$$

Aber beim Beginn des Stosses ist $t = 0$, $V = 0$, $R = 0$, $\frac{d\bar{y}}{dt} = 0$, $\omega_1 = 0$,

folglich sind auch die Konstanten C und C' gleich Null, am Ende der Stosswirkung muss $\omega_1 = \omega$ sein, mithin haben wir

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{V - R}{M}, \qquad \omega = \frac{V.\overline{SP} + R.\overline{OS}}{Mk^2}.$$

Weil nun $\frac{d\bar{y}}{dt} = \overline{OS}.\omega$, und $\omega = \frac{\sqrt{ga}}{k'}$, so ist auch

$$\overline{OS}.\frac{\sqrt{ga}}{k'} = \frac{V - R}{M}, \qquad \frac{\sqrt{ga}}{k'} = \frac{V.\overline{SP} + R.\overline{OS}}{Mk^2}.$$

Zwischen diesen zwei Gleichungen haben wir R zu eliminieren, wodurch wir finden

$$V = \frac{M(k^2 + \overline{OS}^2)}{\overline{OP}}.\frac{\sqrt{ag}}{k'},$$

oder, weil $Mk'^2 = Mk^2 + M.\overline{OS}^2$,

$$V = M\sqrt{ag}\frac{k'}{\overline{OP}}, \quad k'^2 = \frac{1}{3}\overline{OA}^2, \quad \therefore V = M\sqrt{\frac{ag}{3}}.\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}},$$

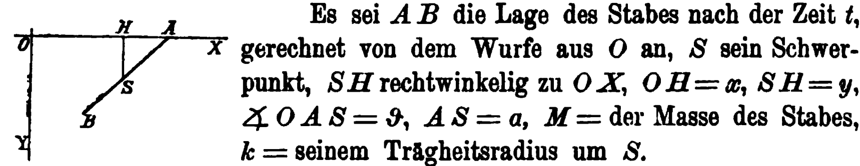
womit die verlangte Stosskraft bestimmt ist.

Mittelst derselben Gleichungen finden wir auch den Druck auf das Charnier O, es ergiebt sich

$$R = M\sqrt{ag}.\frac{k^2 - \overline{OS}.\overline{SP}}{k'.\overline{OP}}.$$

In dem besonderen Falle, wo $k^2 = \overline{OS}.\overline{SP}$ ist, haben wir $R = 0$, so dass dann kein Druck auf das Charnier stattfindet, dieses geschieht, wenn P der Stossmittelpunkt ist.

4. Ein gerader, stabförmiger Körper AB (Fig. 153) befindet sich ursprünglich in einer vertikalen Lage, vom Punkte O herab in der Linie OY hängend. Das Ende A des Stabes werde von O aus mit einer gegebenen Geschwindigkeit entlang einer glatten, horizontalen Rinne OX geworfen. Welches ist die Bewegung des Stabes?



Figur 153.

Es sei AB die Lage des Stabes nach der Zeit t, gerechnet von dem Wurfe aus O an, S sein Schwerpunkt, SH rechtwinkelig zu OX, $OH = x$, $SH = y$, $\measuredangle OAS = \vartheta$, $AS = a$, $M =$ der Masse des Stabes, $k =$ seinem Trägheitsradius um S.

Damit haben wir für die Bewegung des Stabes zu einer beliebigen Zeit t nach dem Wurfe durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$M\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} = C + 2Mgy, \tag{1}$$

und durch das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes

$$\frac{dx}{dt} = C'. \tag{2}$$

Die Vereinigung dieser beiden Gleichungen giebt

$$M\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} = C'' + 2\,M g\,y.$$

Nun besteht hier stets die geometrische Bedingung

$$y = a \sin \vartheta,$$

mithin ist auch

$$M\,(a^2 \cos^2 \vartheta + k^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C'' + 2\,M g\,a \sin \vartheta. \tag{3}$$

Bezeichnet P die Wurfstärke, welche dem Ende A des Stabes mitgeteilt worden ist, u die Geschwindigkeit von A durch den Wurf, ω die Winkelgeschwindigheit des Stabes um S momentan nach dem Stosse, v die S durch den Stoss erteilte Translationsgeschwindigkeit, dann werden wir haben

$$M.v = P, \qquad M k^2.\omega = P.a. \tag{4}$$

Ferner wird die Geschwindigkeit von A entlang OX gleich sein

$$v + a\,\omega,$$

wo das erste Glied dieses Ausdruckes der Bewegung von S, das zweite der Rotation um S zu verdanken ist. Weil aber, durch die Annahme, die Geschwindigkeit von A auch gleich u ist, so kommt die Relation:

$$v + a\,\omega = u.$$

Die Gleichungen (4) geben uns $k^2\omega = a v$, so dass wir erhalten

$$u = v + \frac{a^2}{k^2}v, \quad v = \frac{k^2 u}{a^2 + k^2}, \quad \omega = \frac{a u}{a^2 + k^2}.$$

Nun haben wir gleichzeitig $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, folglich ist mit (3)

$$M k^2 \omega^2 = C'' + 2\,M g\,a,$$

und daher

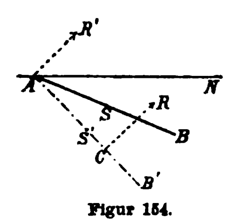
$$(a^2\cos^2\vartheta + k^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = k^2\omega^2 - 2\,g\,a(1 - \sin\vartheta) = \frac{k^2 a^2 u^2}{(a^2+k^2)^2} - 2ga(1-\sin\vartheta). \tag{5}$$

Die Gleichung (2) sagt uns, dass der Wert von $\frac{dx}{dt}$ konstant sein muss, es ergiebt sich mithin noch

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{k^2 u}{a^2 + k^2}, \quad x = \frac{k^2 u\,t}{a^2 + k^2}, \tag{6}$$

womit die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S parallel zur Axe OX und der Wert von x am Ende einer beliebigen Zeit t der Bewegung bestimmt ist. Die Winkelgeschwindigkeit des Stabes ist für jede seiner Lagen durch die Gleichung (5) gegeben.

5. Ein unelastischer Stab AB (Fig. 154), welcher befähigt ist, sich in einer vertikalen Ebene um eine feste horizontale Axe durch A zu drehen, stösst gegen ein festes Hindernis bei C. Welches ist der Stoss auf die Axe?



Figur 154.

Es sei S der Schwerpunkt des Stabes AB, AN eine horizontale Linie in der Ebene der Bewegung durch den Punkt A, $M =$ der Masse des Stabes, $\sphericalangle SAN = \vartheta$, zu einer beliebigen, vom Beginne der Bewegung an gerechneten Zeit t des Herabsinkens des Stabes, $\alpha =$ dem Anfangswerte von ϑ, $k =$ dem Trägheitshalbmesser des Stabes um S, $AS = a$.

Für die Rotationsbewegung des Stabes während seines Niedersinkens besteht die Gleichung

$$M(a^2 + k^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Mga\cos\vartheta,$$

multiplizieren wir ihre Seiten mit $2\frac{d\vartheta}{dt}$ und integrieren, so wird

$$M(a^2 + k^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2Mga\sin\vartheta + C.$$

Aber es ist $\vartheta = \alpha$, wenn $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, folglich

$$0 = 2Mga\sin\alpha + C,$$

und daher

$$(a^2 + k^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2ga(\sin\vartheta - \sin\alpha).$$

Es sei nun $\sphericalangle CAN = \beta$ und in dem Augenblicke vor dem Stosse $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, dann ist auch

$$(a^2 + k^2)\omega^2 = 2ga(\sin\beta - \sin\alpha). \tag{1}$$

Die Impulsivreaktionen des Hindernisses C und der Axe A in dem Momente des Zusammentreffens, welche beide rechtwinkelig zu der Länge des Stabes wirken werden, wollen wir mit R und R' bezeichnen. Der Effekt von R ist der, die ganze Winkelgeschwindigkeit des Stabes um A zu zerstören, indem ihm diese Reaktion eine gleiche, entgegengesetzt gerichtete Winkelgeschwindigkeit erteilt, folglich haben wir, $CA = c$ setzend,

$$M\omega(a^2 + k^2) = Rc. \tag{2}$$

Ferner ist die Differenz der Momente von R und R' um den Schwerpunkt des Stabes $R(c - a) - R'a$, und es muss sein

$$R(c - a) - R'a = Mk^2\omega. \tag{3}$$

Durch die Gleichungen (2) und (3) erhalten wir nun

$$M\omega(a^2+k^2)(c-a)-R'ac = Mk^2c\omega,$$
$$R'ac = M\omega\{(c-a)(a^2+k^2)-ck^2\},$$
$$R' = M\omega\left\{a-\frac{a^2+k^2}{c}\right\},$$

und daher mittelst (1)

$$R' = M\sqrt{2ag}\cdot\sqrt{\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{a^2+k^2}}\left(a-\frac{a^2+k^2}{c}\right).$$

Wenn $R'=0$, so ist

$$a-\frac{a^2+k^2}{c}=0, \qquad \text{also} \qquad c=\frac{a^2+k^2}{a},$$

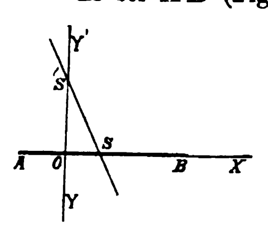
es ist mithin in diesem Falle C der Schwingungsmittelpunkt (Stossmittelpunkt) des Stabes in dem Momente des Zusammentreffens.

Ist der Stab elastisch, dann müssen wir den durch (2) gegebenen Wert von R in dem Verhältnisse $(1+\varepsilon):1$ grösser nehmen, wo ε die Elastizität des Stabes bezeichnet, und es ergiebt sich in diesem Falle durch (3)

$$R' = \frac{M\omega}{ac}\{(1+\varepsilon)(c-a)(a^2+k^2)-ck^2\}.$$

6. Ein gerader, stabförmiger Körper, welcher sich ohne Rotation entlang einer glatten, horizontalen Ebene bewegt, stösst auf einen festen, zu dieser Ebene rechtwinkeligen Stab. Welches ist die Impulsivreaktion des Stabes und die Bewegung des Körpers infolge des Zusammentreffens?

Es sei AB (Fig. 155) die Lage des Körpers in dem Momente des Zusammentreffens, O der Ort des Hindernisses, S der Schwerpunkt des Körpers, $S'S$ die Linie, in welcher sich der Schwerpunkt S vor der Collision bewegt. Lege in der Ebene der Bewegung zwei unbegrenzte Gerade OX, YOY' so, dass sie senkrecht aufeinander stehen und OX mit AB zusammenfällt, wobei YOY' die SS' in S' schneiden möge. Ferner sei $R=$ der Impulsivreaktion von O, welche entlang der Linie OY' ausgeübt werden wird, $u=$ der Geschwindigkeit von S vor dem Zusammentreffen, $\sphericalangle OS'S=\alpha$, $OS=c$, $k=$ dem Trägheitshalbmesser von AB um S, $M=$ der Masse des Körpers. Endlich bezeichne mit v_x, v_y die Geschwindigkeiten von S parallel zu den Coordinatenaxen gerade nach dem Stosse und mit ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um S.



Figur 155.

Damit erhalten wir durch die Gleichungen der Stossbewegung

$$Mv_x = Mu\sin\alpha, \quad (1) \qquad Mv_y = Mu\cos\alpha - R, \quad (2)$$
$$Mk^2\omega = Rc. \quad (3)$$

Ferner muss die Geschwindigkeit des Punktes O des Körpers in der Richtung Oy in dem Augenblicke nach dem Zusammentreffen $v_y - c\omega$ sein, wo v_y die Geschwindigkeit, welche der Bewegung von S, $-c\omega$ die Geschwindigkeit, welche der Bewegung des Körpers um S zu verdanken ist. Wenn der Körper unelastisch ist, so ist die Wirkung des Stosses die der Zerstörung der zu AB senkrechten Componente der Geschwindigkeit von O, folglich muss v_y gleich $c\omega$ sein.

Wir haben sonach durch (2)

$$Mc\omega = Mu\cos\alpha - R,$$

und daher mit Hilfe von (3)

$$Mc^2\omega = Muc\cos\alpha - Mk^2\omega,$$

oder

$$\omega = \frac{cu\cos\alpha}{c^2 + k^2}.$$

Folglich ist durch (3)

$$R = \frac{Mk^2 u\cos\alpha}{c^2 + k^2},$$

und demnach mit (2)

$$v_y = u\cos\alpha - \frac{k^2 u\cos\alpha}{c^2 + k^2} = \frac{c^2 u\cos\alpha}{c^2 + k^2}.$$

Auch ist durch (1)

$$v_x = u\sin\alpha.$$

Mithin haben wir jetzt vollständig die augenblickliche Bewegung des Körpers nach dem Stosse und die Impulsivreaktion des Stabes bei O bestimmt.

Es kann dargethan werden, dass der Körper nach Vollzug der wechselseitigen Aufeinanderwirkung, wenn die ursprüngliche Bewegung des Körpers genau so ist, wie dieses unsere besondere Figur darstellt, sich selbst von dem Hindernisse trennen und sich dann frei mit den Geschwindigkeiten v_x, v_y, ω, deren Werte wir oben erhalten haben, weiter bewegen wird. In der That würden wir finden, wenn wir annehmen würden, der Körper berühre immer das Hindernis, dass das Hindernis eine kontinuierliche Attraktion anstatt einer Reaktion ausgeübt haben würde.

4—6. Walton, p. 582—586.

7. Ein Faden ist rund um den Umfang einer kreisrunden Rolle gewunden, das freie Fadenende ist an einen festen Punkt gefesselt. Die Rolle wird in die Höhe gehoben und so fallen gelassen, dass der Faden in dem Augenblicke, in welchem er straff wird, vertikal und zu einer Tangente an die Rolle wird. Dabei finde die ganze Bewegung in einer Ebene statt. Welches ist die Stärke des Impulses und die Bewegung der Rolle nach dem Stosse?

Die Rolle fällt in dem ersten Zeitintervall ohne Rotation.

Es sei v die Geschwindigkeit ihres Mittelpunktes in dem Augenblicke, wo der Faden straff wird, v' die Geschwindigkeit dieses Punktes, ω' die Winkelgeschwindigkeit der Rolle gerade nach dem Stosse, T die Impulsivspannung des Fadens, Mk^2 das Trägheitsmoment der Rolle um ihre Axe, a ihr Radius.

Um die unbekannte Spannung in den Bewegungsgleichungen zu vermeiden, nehmen wir Momente um den Berührungspunkt des Fadens und der Rolle, dann erhalten wir

$$M(v'-v)\,a + Mk^2\omega = 0. \tag{1}$$

Gerade nach dem Stosse hat der Teil der Rolle, welcher mit dem Faden in Berührung ist, keine Geschwindigkeit, folglich muss sein

$$v' - a\,\omega' = 0. \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergiebt sich

$$\omega' = \frac{a\,v}{a^2 + k^2}.$$

Besteht die Rolle aus einem homogenen Cylinder, so haben wir $k^2 = \frac{1}{2}a^2$, also

$$\omega' = \frac{2}{3}\cdot\frac{v}{a}, \qquad v' = \frac{2}{3}\,v.$$

Für die Grösse der Impulsivspannung des Fadens haben wir

$$-T = M(v'-v), \qquad \text{folglich} \qquad T = \frac{1}{3}M.v. \tag{3}$$

Der Mittelpunkt der Rolle beginnt vertikal abwärts zu fallen und es wirkt an demselben keine horizontale Kraft, so dass er kontinuierlich in einer vertikalen Linie fällt und mithin die Bewegung des Fadens nach dem Stosse durchweg vertikal ist. Nehmen wir nun an, es sei F die anfängliche Spannung des Fadens, dann wird die Bewegung der Rolle ebenso erfolgen, als fiele dieselbe auf einer vollkommen rauhen, geneigten Ebene, deren Reibungswiderstand F und deren Horizontalneigung gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Dadurch haben wir die Bewegungsgleichungen

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - F, \qquad Ma\frac{d^2x}{dt^2} + Mk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Mag, \qquad x = a\vartheta.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{3}g, \qquad F = \frac{1}{3}Mg,$$

$$\frac{dx}{dt} = C + \frac{2}{3}gt, \qquad x = Ct + \frac{1}{3}gt^2 + D.$$

Die Geschwindigkeit gerade nach dem Stosse ist $v' = \frac{2}{3}v$, so dass zur Zeit $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = v'$, $x = 0$, folglich $C = v'$, $D = 0$, mithin

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}(v + gt), \qquad x = \frac{1}{3}(2vt + gt^2), \qquad \vartheta = \frac{1}{3a}(2vt + gt^2),$$

womit die gleichförmig beschleunigte Bewegung der Rolle nach dem Stosse vollständig gegeben ist.

Haben wir es mit einem elastischen Faden zu thun, dann ist die vorhin gefundene Impulsivspannung mit dem Faktor $(1 + \varepsilon)$ zu multiplizieren um die Impulsivspannung für diesen Fall zu erhalten, dieselbe ist also

$$T' = \frac{1}{3}(1 + \varepsilon) Mv.$$

Für die Bewegung der Rolle, welche Folge dieser bekannten Impulsivkraft, ist

$$M(v' - v) = -\frac{1}{3}M(1 + \varepsilon)v, \qquad \text{oder} \qquad v' - v = -\frac{1}{3}(1 + \varepsilon)v,$$

$$Mk^2\omega' = \frac{1}{3}Mva(1 + \varepsilon), \qquad \text{oder} \qquad k^2\omega' = \frac{1}{3}va(1 + \varepsilon),$$

aus welchen Relationen sich ergiebt

$$v' = \frac{1}{3}(2v - \varepsilon), \qquad \omega' = \frac{1}{3}\frac{va}{k^2}(1 + \varepsilon) = \frac{2}{3}\cdot\frac{v}{a}(1 + \varepsilon).$$

Der von der Rolle nach dem Stosse in der Zeit t zurückgelegte Weg ist

$$x = v't + \frac{1}{3}gt^2 = \frac{1}{3}(2v - \varepsilon) + \frac{1}{3}gt^2,$$

wenn von einer weiteren Dehnung des Fadens abgesehen wird.

Routh, Dynamics, p. 131.

8. Eine freie Platte von beliebiger Gestalt dreht sich in ihrer eigenen Ebene um ein Momentancentrum C und stösst auf ein Hindernis bei P, gelegen in der geraden Linie, welche den Schwerpunkt S der Platte und das Momentancentrum verbindet. Wie muss die Lage des Punktes P beschaffen sein, damit die Grösse des Stosses ein Maximum sein kann?

Wir nehmen zuerst an, dass das Hindernis P fest ist.

Es sei $SP = x$, $R =$ der Stosskraft, $CS = h$, ω die Winkelgeschwindigkeit um den Schwerpunkt vor, ω' diejenige um denselben Punkt nach dem Stosse. Die Translationsgeschwindigkeit von S gerade vor dem Stosse ist dann $h\omega$ und es sei noch v' diejenige nach dem Stosse. Dadurch bekommen wir die Gleichungen

$$\omega' - \omega = -\frac{R x}{M k^2}, \qquad v' - h\,\omega = -\frac{R}{M}, \tag{1}$$

und wenn wir annehmen, dass der Stosspunkt nach dem Stosse zur Ruhe gekommen ist, erhalten wir noch

$$v' - x\,\omega' = 0. \tag{2}$$

Indem wir nun die Werte von v', ω' durch die Gleichungen (1) bestimmen, in die (2) einführen und die resultierende Gleichung für R auflösen, ergiebt sich

$$R = M\omega k^2 \frac{x+h}{x^2+k^2}.$$

Dieser Ausdruck ist zu einem Maximum zu machen. Differentiieren wir nach R und x und setzen den Differentialquotienten gleich Null, so folgt

$$\frac{dR}{dx} = M\omega k^2 \cdot \frac{(x^2+k^2) - 2(x+h)x}{(x^2+k^2)^2} = 0,$$

so dass für das Maximum von R diese Gleichung liefert

$$x^2 + 2hx - k^2 = 0, \qquad x = -h \pm \sqrt{h^2+k^2}. \tag{3}$$

Einer dieser Werte von x ist positiv, der andere negativ. Die entsprechend maximalen Stosspunkte liegen aber in entgegengesetzten Richtungen. Es ist also ein Punkt P vorhanden, mit welchem der Körper in der Fronte, und ein Punkt P', mit welchem er nach hinten während seiner eigenen Translation im Raume mit grösserer Kraft als mit jedem anderen Punkte stösst.

Es mag gezeigt werden, dass die zwei Punkte P, P' von C gleich weit entfernt sind, dass ferner, wenn O der Schwingungsmittelpunkt mit Bezug auf C als Aufhängepunkt ist, alsdann die Relation besteht $\overline{CP}^2 = CS.CO$.

Wenn P zum Aufhängepunkt gemacht wird, so ist P' der entsprechende Schwingungsmittelpunkt, auch wird PP' durch S und O harmonisch geteilt. Die Grössen der beiden Stösse in P und P' sind umgekehrt proportional den Abständen dieser Punkte von S.

Zweitens wollen wir annehmen, das das Hindernis ein freier, materieller Punkt von der Masse m ist.

Ausser der Gleichung (1) haben wir hier noch die Gleichung für die Bewegung des Punktes m. Ist V' die Geschwindigkeit dieses Punktes nach dem Stosse, dann muss sein

$$V' = \frac{R}{m}.$$

Nach erfolgtem Stosse wird der Stosspunkt beider Körper dieselbe Geschwindigkeit besitzen, so dass wir hier an Stelle der Gleichung (2) haben

$$V' = v' + x\,\omega'.$$

Die Elimination von ω', v', V' giebt

$$R = M \omega k^2 \frac{m(x+h)}{(M+m)k^2 + m x^2}.$$

Dieser Ausdruck wird zu einem Maximum mit

$$x = -h \pm \sqrt{h^2 + k^2\left(1 + \frac{M}{m}\right)}. \tag{4}$$

Daher fallen die Punkte P, P' mit den vorhin gefundenen nicht zusammen, es sei denn m unendlich gross. Um zu finden, wann der Stosspunkt mit dem Schwingungsmittelpunkte zusammenfällt, müssen wir $k^2 = hx$ setzen. Dieses giebt $\frac{M}{m} = \frac{x+h}{h}$ oder, wenn $l = x + h$ die Länge des einfachen äquivalenten Pendels bezeichnet, $\frac{M}{m} = \frac{l}{h}$. Weil $V' = \frac{R}{m}$, so ist es klar, dass einem Maximalwerte von R auch ein solcher von V' entspricht. Folglich können die zwei durch die Gleichung (4) gefundenen Punkte die Mittelpunkte grösster Stossgeschwindigkeit genannt werden.

Es giebt hier noch einzelne besondere Punkte des Körpers, deren Lagen gefunden werden können. Wir können verlangen den Punkt zu finden, mit welchem der Körper auf ein festes Hindernis stossen muss, damit die Lineargeschwindigkeit des Schwerpunktes oder die Winkelgeschwindigkeit ein Maximum sein kann. Diese Punkte nannte Poinsot die Centra maximaler Reflexion und Conversion resp. Die Gleichung (1) lehrt uns, dass wenn v' ein Maximum, R entweder ein Maximum oder ein Minimum ist, folglich kann gezeigt werden, dass der erste dieser Punkte mit dem Punkte grössten Stosses zusammenfällt. Damit ω' ein Maximum werde, haben wir $\omega - \frac{Rx}{Mk^2}$ zu einem Maximum zu machen. Setzen wir für R seinen Wert, so bekommen wir $x^2 - 2\frac{k^2}{h}x = 0$. Mit O als Schwingungsmittelpunkt haben wir $SO = \frac{k^2}{h}$, welche Länge durch h' dargestellt sein mag, dann wird

$$x^2 - 2h'x - k^2 = 0. \tag{5}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die nämlichen Funktionen von h' und k wie jene der Gleichung (3) von h und k, ausgenommen, dass die Zeichen entgegengesetzt sind. Nun liegen C und O auf entgegengesetzten Seiten von S, folglich stellen die Lagen der zwei Centra maximaler Conversion zu O und S die nämliche Relation her wie die zwei Centra maximaler Reflexion zu C und S. Wenn der Aufhängepunkt von C nach O verlegt

wird, so wechseln die Lagen der Centra maximaler Reflexion und Conversion.

Poinsot, Sur la percussion des corps, Liouville's Journal, 1857.
Routh, Dynamics, p. 134

9. Ein gleichförmiger, horizontaler Stab fällt auf den Boden infolge der Wirkung der Schwerkraft und stösst mit dem einen Ende gegen einen Stein. Vergleiche den Stoss, den er erhält, mit demjenigen, welchen er erhalten haben würde, wenn beide Stabenden gleichzeitig gegen zwei Steine gestossen hätten und die Stösse rechtwinkelig zu dem Stabe stattfinden.

Der Stoss, welchen er empfängt, ist gleich der Hälfte derjenigen Stosskraft, welche bei der zweiten Annahme auf den Stab wirken wird, bei welcher er jeden der zwei Steine trifft.

10. Ein Ende eines geraden, spröden Stabes wird mit der Hand gehalten und sein anderes Ende gegen einen Tisch geschlagen, bis der Stab bricht. Wo liegt der Bruchpunkt?

Bezeichnet a die Länge des Stabes, dann wird der Bruch in einem Abstande von dem festgehaltenen Ende stattfinden, welcher gleich $a:\sqrt{3}$ ist.

11. Ein dünner, gleichförmiger, spröder Stab, welcher sich um den einen seiner Endpunkte drehen kann, wird durch einen gegebenen Impuls in einem gegebenen Punkte getroffen. In welchem Punkte besitzt der Stab die grösste Neigung zu zerbrechen?

Bezeichnet l die Länge des Stabes, a den Abstand des Stosspunktes von dem freien Ende, dann ist, wenn $a < \frac{1}{3} l$, der Bruchpunkt von dem festen Ende um Strecke $l \sqrt{\frac{\frac{1}{3} l - a}{l - a}}$ entfernt, ist aber $a > \frac{1}{3} l$, so fällt der verlangte Punkt mit dem Stosspunkte zusammen.

12. Ein vollkommen unelastischer Stab gleitet in der Richtung seiner Länge eine geneigte Ebene hinab und trifft auf eine horizontale Ebene. Wie gross sind die Impulse, welche auf die zwei Stabenden in dem Augenblicke des Stosses ausgeübt werden?

Ist V die Geschwindigkeit des Stabes in dem Augenblick vor dem Stosse, m seine Masse, α die Neigung der Ebene, dann sind die durch das höhere und das tiefere Ende erfahrenen Impulse

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{m V \sin 2\alpha}{2 + \cos 2\alpha}, \quad \frac{m V \sin \alpha}{2 + \cos 2\alpha}.$$

13. Ein hohler Kreiscylinder, welcher an beiden Enden offen ist, kann sich um einen Durchmesser eines seiner Enden bewegen. Welches ist der Abstand der Linie des Stossmittelpunktes von diesem festen Diameter?

Bezeichnet a den Radius des Cylinders, b seine Länge, dann ist der verlangte Abstand gleich $\frac{a^2}{b} + \frac{2}{3} b$.

Mit $y =$ dem Abstande der verlangten Linie von der Drehaxe ist allgemein

$$y = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

9–13. Walton, p. 586—588.

14. Ein gleichförmiger Stab CE (Fig. 156) dreht sich um eine Axe CX, welche mit ihm den Punkt C gemeinschaftlich hat. Bestimme die rechtwinkeligen Coordinaten $CF = x$, $FO = y$ des Stossmittelpunktes O.

Figur 156.

Bezeichnet h die Projektion CD der Stablänge auf der Umdrehungsaxe, r den Abstand des Stabendes E von dieser Axe, M die Masse des Stabes, dann ist

$$x = \frac{\text{Centrifugalkraftmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{\frac{1}{3} M h r}{\frac{1}{2} M r} = \frac{2}{3} h.$$

$$y = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{\frac{1}{3} M r^2}{\frac{1}{2} M r} = \frac{2}{3} r.$$

15. Eine rechtwinkelige Dreiecksfläche CDE (Fig. 156) dreht sich um die Kathede CD; ihre Masse sei M, ihre Katheten CD und DE seien gleich h und r resp. Welches sind die Coordinaten des Stossmittelpunktes?

Bezeichnet O die Lage des verlangten Punktes und sind seine rechtwinkeligen Coordinaten $CF = a$, $FO = b$, dann haben wir

$$a = \frac{\frac{1}{4} M r h}{\frac{1}{3} M r} = \frac{3}{4} h, \qquad b = \frac{\frac{1}{6} M r^2}{\frac{1}{3} M r} = \frac{1}{2} r.$$

16. Eine freie Platte von beliebiger Gestalt dreht sich in ihrer eigenen Ebene um ein Momentancentrum C und stösst auf ein festes Hindernis P, gelegen in der Geraden, welche den Schwerpunkt S und C verbindet. Zu finden die Lage von P erstens so, dass der Schwerpunkt S zur Ruhe gelangt, zweitens so, dass seine Geschwindigkeit nach dem Stosse dieselbe von entgegengesetzter Richtung werden kann.

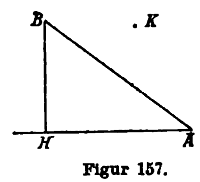
Im ersten Falle muss P entweder mit S oder mit dem Schwingungsmittelpunkte zusammenfallen. Im zweiten Falle werden die Punkte $x = SP$ durch die Gleichung gefunden $x^2 - \frac{k^2}{2h} x + \frac{k^2}{2} = 0$, wo $CS = h$ ist.

Zweiter Abschnitt.

Bewegung mehrerer Körper parallel einer Ebene. Die Oberflächen sind vollkommen glatt.

1. Eine schwere Kugel K (Fig. 157, S. 470) fällt aus einer gegebenen Höhe auf einen ruhenden Körper, dessen obere Fläche eine glatte, geneigte Ebene bildet. Der Körper kann mit seiner unteren ebenen Fläche frei entlang einer glatten horizontalen Ebene gleiten. Die vertikale Ebene durch die Schwerpunkte der Kugel und des Körpers schneidet die geneigte Ebene in einer Linie grösster Schiefe. Welches sind nach erfolgtem Stosse die

anfänglichen Bewegungen der Kugel und des Körpers, wenn beide als vollkommen unelastisch angenommen werden?



Figur 157.

Es sei ABH der Schnitt des Körpers durch diejenige vertikale Ebene, welche die Schwerpunkte des Körpers und der Kugel enthält, AH der Schnitt dieser Ebene mit der horizontalen Ebene. Ferner lasse sein V die Geschwindigkeit der Kugel gerade vor dem Zusammentreffen mit dem Körper, u, v die Componenten ihrer Geschwindigkeit, senkrecht und parallel zu der Hypothenuse des rechtwinkeligen Dreieckes ABH, u' die Geschwindigkeit des Körpers parallel zu AH in dem Augenblicke nach dem Stosse, m die Masse der Kugel, m' diejenige des Körpers, P die Stosskraft, $\measuredangle BAH = \alpha$.

Der Stoss erfolgt rechtwinkelig zu AB und sind die Gleichungen für die Bewegung der Kugel

$$mu = mV\cos\alpha - P, \quad (1) \qquad v = V\sin\alpha, \qquad (2)$$

auch ist die Gleichung für die Bewegung des Körpers

$$m'u' = P\sin\alpha. \qquad (3)$$

Diese drei Gleichungen enthalten vier unbekannte Grössen u, v, u', P, so dass zur Lösung der Aufgabe noch eine weitere Gleichung erforderlich ist. Da die beiden Körper vollkommen unelastisch sind, so ist die Wirkung des Stosses nur die, das Eindringen des einen Körpers in den anderen Körper zu verhindern, ohne irgend ein Zurückprallen zu verursachen, welches nur resultieren könnte aus dem Vorhandensein von Elastizität. Folglich muss die Geschwindigkeit der Kugel rechtwinkelig zu AB nach der Collision gleich sein der Geschwindigkeit irgend eines bestimmten Punktes in dieser Linie, genommen in der nämlichen Richtung. Nun ist die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes in BA senkrecht zu AB gleich $u'\sin\alpha$, so dass wir als weitere Gleichung erhalten

$$u'\sin\alpha = u. \qquad (4)$$

Zufolge der Gleichungen (1), (3), (4) ergiebt sich

$$mP\sin^2\alpha = mm'V\cos\alpha - m'P,$$

daher

$$P = \frac{mm'V\cos\alpha}{m\sin^2\alpha + m'}, \qquad (5)$$

womit die Intensität des Stosses bestimmt ist.

Mit (3) und (5) bekommen wir

$$u' = \frac{mV\sin\alpha\cos\alpha}{m\sin^2\alpha + m'}, \qquad (6)$$

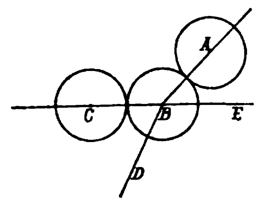
wodurch die Bewegung des Körpers bekannt ist.

Mit (6) und (4) ergiebt sich schliesslich als Geschwindigkeit der Kugel in senkrechter Richtung zu der geneigten Ebene

$$u = \frac{m V \sin^2 \alpha \cos \alpha}{m \sin^2 \alpha + m'}. \quad (7)$$

D'Arcy, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris 1747, p. 344.

2. Zwei Billardkugeln B und C (Fig. 158) liegen in Berührung auf einem glatten Tische. In welcher Richtung muss der Ball B durch einen dritten Ball A gestossen werden, so dass er in einer gegebenen Richtung BD abgeht, wenn die Bälle von gleichem Volumen, gleichem Gewichte und vollkommen glatt sind?



Figur 158.

Es mache die Richtung AB, welche sich durch die geradlinige Verbindung der Mittelpunkte von A und B in dem Momente der Collision ergiebt, einen Winkel ϑ mit der geraden Linie CBE, welche durch die Mittelpunkte der ruhenden Kugeln läuft, und es sei $\sphericalangle CBD = \alpha$.

Denken wir uns zuerst die Bälle als unelastisch. Die Componenten der Geschwindigkeit von A in der Richtung AB vor und nach dem Zusammentreffen seien a, a' resp.; b, c seien die Geschwindigkeiten von B, C; m stelle die Masse einer jeden der Kugeln, R die Intensität des Stosses zwischen A, B, S diejenige zwischen B, C dar.

Damit erhalten wir für die Bewegung von B, indem wir die Kräfte senkrecht und parallel zu CE zerlegen,

$$m b \sin \alpha = R \sin \vartheta, \quad (1) \qquad m b \cos \alpha = R \cos \vartheta - S, \quad (2)$$

und für die Bewegung von C

$$m c = S. \quad (3)$$

Ferner ist hier, weil nach der Collision die Geschwindigkeiten von B und C in der Richtung EC gleich sein müssen,

$$b \cos \alpha = c. \quad (4)$$

Die Gleichungen (3) und (4) geben

$$m b \cos \alpha = S,$$

weshalb mit (2)

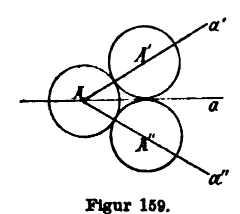
$$m b \cos \alpha = R \cos \vartheta - m b \cos \alpha, \qquad R \cos \vartheta = 2 m b \cos \alpha. \quad (5)$$

Nun bekommen wir mit (1) und (5)

$$m b \sin \alpha \cos \vartheta = 2 m b \cos \alpha \sin \vartheta, \quad \text{d. i.} \quad tg\, \vartheta = \frac{1}{2} tg\, \alpha,$$

wodurch der Punkt bestimmt ist, in welchem A mit B zusammentreffen muss. Denken wir uns nun die Bälle elastisch, dann nehmen die Grössen R und S in dem Verhältnisse $(1 + \varepsilon) : 1$ zu. Hier wird offenbar die Richtung der Bewegung von B nicht durch irgend eine Alteration der absoluten Grössen von R und S beeinflusst, wenn das Verhältnis aus ihren Intensitäten konstant bleibt. Daher sehen wir, dass die Betrachtung elastischer Bälle die Lösung der Aufgabe nicht modifizieren wird.

3. Ein Billardball stösst gleichzeitig auf zwei andere in Berührung ruhende Billardbälle. Welches ist die Bewegung der drei Bälle nach der Collision?



Figur 159.

Es sei A (Fig. 159) der Mittelpunkt des stossenden Balles in dem Augenblicke des Zusammentreffens mit den Bällen A', A'', deren Mittelpunkte A', A'' sind. Ziehe die Halbstrahlen $A A' a'$, $A A'' a''$ und die gemeinschaftliche Tangente $A a$ an die zwei Bälle A', A''. Dann wird offenbar nach dem Stosse die Bewegung von A die Linie $A a$ erzeugen, während A', A'' die geraden Linien $A' a'$, $A'' a''$ beschreiben. Lasse sein u, v die Geschwindigkeiten von A in dem Augenblicke vor und nach dem Zusammentreffen, v' die Geschwindigkeit eines jeden der Bälle A', A''. Weil das Dreieck $A A' A''$ offenbar ein gleichseitiges ist, so haben wir $\sphericalangle aAa' = \frac{1}{6}\pi = \sphericalangle aAa''$. Nun bezeichne noch P die Stosskraft zwischen A, A' und A, A'', m die Masse eines jeden der Bälle.

Damit ist

$$m v = m u - 2 P \cos\frac{\pi}{6}, \quad (1) \qquad m v' = P. \quad (2)$$

Zunächst wollen wir voraussetzen, dass die Bälle vollkommen unelastisch sind. In diesem Falle müssen in dem Augenblicke nach dem Zusammentreffen sowohl die Bälle A, A', als auch die Bälle $A A''$ in Berührung sich bewegen, folglich müssen wir haben

$$v' = v \cos\frac{\pi}{6}.$$

Dadurch ergiebt sich mit (2)

$$P = m v \cos\frac{\pi}{6},$$

und sonach durch (1)

$$m v = m u - 2 m v \cos^2\frac{\pi}{6}, \qquad v = \frac{u}{1 + 2\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{5} u,$$

also ist

$$v' = v \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{5}\sqrt{3} \,.\, u, \qquad P = \frac{1}{5}\sqrt{3} \,.\, m \,.\, u. \quad (3)$$

Sind ferner die Bälle elastisch, dann haben wir, wenn ε ihre gemeinschaftliche Elastizität bezeichnet, den Wert von P in (3) mit $(1 + \varepsilon)$ zu multiplizieren, um in diesem Falle die Stosskraft zu bekommen, so dass jetzt

$$P = (1 + \varepsilon)\frac{\sqrt{3}}{5} m u, \quad (4)$$

und demnach durch (1)

$$m v = m u - \frac{3}{5}(1 + \varepsilon) m u, \qquad v = \frac{1}{5}(2 - 3\varepsilon) u.$$

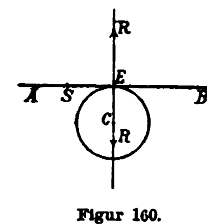
Endlich geben noch die Gleichungen (2) und (4)

$$m v' = (1 + \varepsilon) \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot m u, \qquad v' = \frac{\sqrt{3}}{5}(1 + \varepsilon) u.$$

Maclaurin, Treatise of Fluxions. D'Alembert, Traité de Dynamique, p. 227.

4. Ein Ball C (Fig. 160) stösst auf einen unelastischen Balken AB mit einer gegebenen, zu der Länge des Balkens senkrechten Geschwindigkeit. Welches sind die Grösse des Stosses und der Anfangszustand der Bewegung des Balkens und des Balles?

Es sei S der Schwerpunkt des Balkens AB, m' seine Masse, k sein Trägheitsradius um S, E der Berührungspunkt des Balkens und Balles mit dem Mittelpunkte C, $ES = a$, $u =$ der Geschwindigkeit des Balles im Augenblicke vor dem Aufschlagen, $v =$ seiner Geschwindigkeit augenblicklich darauf, $R =$ der Grösse des gegenseitigen Impulses, $v' =$ der Geschwindigkeit von S, $\omega =$ der Winkelgeschwindigkeit des Balkens um S eben nach der Collision, $m =$ der Masse des Balles.



Figur 160.

Für die Anfangsbewegung des Balles nach der Collision besteht die Gleichung

$$m v = m u - R, \tag{1}$$

und für die Anfangsbewegung des Balkens haben wir die Bedingungen

$$m' v' = R, \quad (2) \qquad m' k^2 \omega = R a; \tag{3}$$

auch ist die Geschwindigkeit des Punktes E des Balkens gleich

$$v' + a\omega;$$

das erste Glied dieses Ausdruckes geht hervor aus der Bewegung von S, das zweite aus der Rotation um S. Weil aber beide Körper unelastisch sind, so muss die Geschwindigkeit des Punktes E des Balkens nach dem Stosse gleich der Geschwindigkeit des Punktes E des Balles sein, d. i. gleich der Geschwindigkeit seines Mittelpunktes C, folglich besteht noch die Gleichung

$$v = v' + a\omega. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (1), (2), (3), (4) ergiebt sich

$$u - \frac{R}{m} = \frac{R}{m'} + \frac{R a^2}{m' k^2},$$

daher ist $$R = \frac{u}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} + \frac{a^2}{m' k^2}} = \frac{m m' k^2 u}{(m + m') k^2 + m a^2}.$$

Substituieren wir diesen Wert von R in die Gleichungen (1), (2), (3), so folgt

$$v = u - \frac{m' k^2 u}{(m+m')k^2 + m a^2} = \frac{m(k^2+a^2)u}{(m+m')k^2 + m a^2},$$

$$v' = \frac{m k^2 u}{(m+m')k^2 + m a^2}, \qquad \omega = \frac{m a u}{(m+m')k^2 + m a^2}.$$

1—4. Walton, p 602—607.

5. Vier gleiche Stäbe, jeder von der Länge $2a$ und der Masse m, sind frei so miteinander verbunden, dass sie ein Rhombus bilden. Das System fällt aus der Ruhe mit einer Diagonale in vertikaler Richtung unter der Wirkung der Schwerkraft und stösst auf eine feste, unelastische, horizontale Ebene. Welches ist die daraus hervorgehende Bewegung?

Lasse sein AB, BC, CD, DA die Stäbe, AC die vertikale Diagonale, welche mit ihrem Endpunkte A auf die horizontale Ebene stösst, $V =$ der Geschwindigkeit eines jeden Punktes des Rhombus gerade vor dem Stosse, $\alpha =$ dem Winkel, welchen jeder Stab mit der Vertikalen macht. Ferner bezeichne u die horizontale, v die vertikale Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Systemes und ω die Winkelgeschwindigkeit eines jeden der oberen Stäbe gerade nach dem Stosse. Dann sind die Effektivkräfte eines jeden der oberen Stäbe äquivalent der vertikalen Kraft $m(v - V)$, der horizontalen Kraft mu, welche Kräfte in dem Schwerpunkte angreifen, und einem Kräftepaare, das bestrebt ist, den Winkel α zu vergrössern. Ist R der Impuls bei C, welcher infolge der symmetrischen Beschaffenheit des Rhombus bezüglich AC eine horizontale Richtung besitzt, dann bekommen wir, Momente um B nehmend, zur Vermeidung der unbekannten Reaktion bei B in unseren Gleichungen, für den Stab BC

$$m k^2 \omega + m(v - V) a \sin\alpha - m u a \cos\alpha = -R . 2a\cos\alpha. \quad (1)$$

Jeder der tieferen Stäbe wird beginnen, sich um sein Ende A als einen festen Punkt zu drehen. Wenn ω' die Winkelgeschwindigkeit des einen dieser Stäbe gerade nach dem Stosse ist, so wird das augenblickliche Moment um A gerade nach dem Stosse $m(a^2 + k^2)\omega'$ und gerade vor dem Stosse $m V a \sin\alpha$ sein. Der Unterschied dieser zwei Momente ist das Moment der Effektivkräfte an einem der beiden tieferen Stäbe um A. Nehmen wir nun Momente um A für die zwei Stäbe AB, BC zusammen, so erhalten wir

$$m(k^2 + a^2)\omega' - m V a \sin\alpha - m k^2 \omega + m(v - V) a \sin\alpha + m u . 3a\cos\alpha$$
$$= R . 4a\cos\alpha. \quad (2)$$

Weil die zwei Stäbe mit der Vertikalen während der ganzen Bewegung gleiche Winkel einschliessen, so ist ferner

$$\omega' = \omega. \quad (3)$$

Weiter müssen, weil die zwei Stäbe bei B miteinander verbunden sind, die Geschwindigkeiten der Endpunkte der zwei Stäbe nach Richtung und Grösse gleich sein. Indem wir diese in horizontaler und vertikaler Richtung zerlegen, bekommen wir

$$u + a\omega\cos\alpha = 2a\omega'\cos\alpha, \quad (4) \qquad v - a\omega\sin\alpha = 2a\omega'\sin\alpha. \quad (5)$$

Diese fünf Gleichungen genügen zur Bestimmung der anfänglichen Bewegung.

Indem wir R zwischen den Gleichungen (1) und (2) eliminieren, u, v, ω' mittelst der geometrischen Bedingungen durch ω ausdrücken, finden wir

$$\omega = \frac{3}{2} \cdot \frac{V\sin\alpha}{a(1 + 3\sin^2\alpha)}. \tag{6}$$

In diesem Probleme kann die Einführung der unbekannten Reaktion R durch den Gebrauch des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten vermieden werden. Nehmen wir an, dass das System eine solche kleine Verschiebung erhalte, durch welche die Neigung eines jeden Stabes zu der Vertikalen um die nämliche kleine Grösse $\delta\alpha$ wächst, dann giebt dieses Prinzip

$$mk^2\omega\delta\alpha - m(v - V)\delta(3a\cos\alpha) + mu\delta(a\sin\alpha) + m(k^2 + a^2)\omega'\delta\alpha$$
$$+ mV\delta(a\cos\alpha) = 0,$$

welche Gleichung sich reduzieren lässt auf

$$(2k^2 + a^2)\omega - Va\sin\alpha + 3(v - V)a\sin\alpha + ua\cos\alpha = 0,$$

und die Lösung kann wie vorher fortgesetzt werden.

Es mag dem Leser überlassen bleiben zu zeigen, dass das Rhombus durch den Stoss $\frac{1}{1 + 3\sin^2\alpha}$ von seiner Bewegungsgrösse verliert, dass ferner die Richtung der Impulsivwirkung an den Charnieren B, D mit dem Horizonte einen Winkel macht, dessen trigonometrische Tangente gleich ist $\frac{3\sin^2\alpha - 2}{tg\,\alpha}$.

Die auf den Stoss folgende Bewegung kann sehr leicht durch die Methode der lebendigen Kraft gefunden werden, wir wollen jedoch hier in einer anderen Weise vorgehen. Die Effektivkräfte an jedem der oberen Stäbe werden durch die Differentialquotienten dargestellt sein $m\frac{dv}{dt}$, $m\frac{du}{dt}$, $mk^2\frac{d\omega}{dt}$; das Moment für einen jeden der unteren Stäbe wird sein $m(k^2 + a^2)\frac{d\omega'}{dt}$. Bezeichnet nun ϑ den Winkel, welchen irgend einer

der Stäbe mit der Vertikalen zu der Zeit t einschliesst, dann erhalten wir, indem wir in derselben Weise wie vorher Momente nehmen,

$$m k^2 \frac{d\omega}{dt} + m \frac{dv}{dt} a \sin\vartheta - m \frac{du}{dt} a \cos\vartheta = -R . 2 \cos\vartheta + m g a \sin\vartheta, \quad (1')$$

$$m(k^2 + a^2) \frac{d\omega'}{dt} - m k^2 \frac{d\omega}{dt} + m \frac{dv}{dt} a \sin\vartheta + m \frac{du}{dt} \cdot 3 a \cos\vartheta$$
$$= R . 4 a \cos\vartheta + 2 m g a \sin\vartheta. \quad (2')$$

Die geometrischen Gleichungen sind dieselben wie jene, welche oben gegeben worden sind, wir haben jetzt nur ϑ für α zu schreiben.

Indem wir nun R eliminieren und die Werte für u, v substituieren, bekommen wir

$$(2 k^2 + a^2) \frac{d\omega}{dt} + a^2 \left\{ 9 \sin\vartheta \frac{d}{dt} (\omega \sin\vartheta) + \cos\vartheta \frac{d}{dt} (\omega \cos\vartheta) \right\}$$
$$= 4 g a \sin\vartheta.$$

Die Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ und die Integration giebt

$$\{2(k^2 + a^2) + 8 a^2 \sin^2\vartheta\} \omega^2 = C - 8 g a \cos\vartheta.$$

Beim Beginne der Bewegung ist $\vartheta = \alpha$ und ω hat den durch die Gleichung (6) gegebenen Wert. Wir finden dadurch, dass die Winkelgeschwindigkeit ω, wenn die Neigung irgend eines der Stäbe zu der Vertikalen gleich ϑ ist, aus der Gleichung resultiert

$$(1 + 3 \sin^2\vartheta) \omega^2 = \frac{9 V^2}{4 a^2} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{1 + 3 \sin^2\alpha} + \frac{3 g}{a} (\cos\alpha - \cos\vartheta).$$

Routh, Dynamics, p. 132.

6. Ein Cylinder dreht sich mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit um seine horizontale Axe; plötzlich beginnt derselbe ein aus unelastischem Materiale bestehendes Gewicht mittelst eines um ihn gewundenen, unelastischen Fadens aufwärts zu ziehen. Wie gross ist die Zeit während welcher das System die Bewegung fortsetzt? Wie gross muss der ursprüngliche Abstand des Gewichtes von dem Cylinder sein, damit in dem Augenblicke, wo die Bewegung aufhört, das Gewicht den Cylinder gerade berührt?

Lasse sein $a =$ dem Halbmesser des Cylinders, $m =$ seiner Masse, $k =$ dem Trägheitsradius für seine Axe, $m' =$ der Masse des Gewichtes, ω, ω' die Winkelgeschwindigkeiten des Cylinders gerade vor und gerade nach dem Beginn des Aufwärtsziehens des Gewichtes, $u =$ der Geschwindigkeit des Gewichtes beim Anfange seiner Bewegung, $P =$ der Impulsivkraft, die anfangs durch den Faden auf das Gewicht ausgeübt wird.

Damit haben wir die Bewegungsgleichungen

$$\omega' = \omega - \frac{P a}{m k^2}, \quad u = \frac{P}{m'};$$

aber es ist $u = a\omega'$, folglich

$$\frac{P}{m'} = a\omega - \frac{P a^2}{m k^2},$$

und daher
$$P = \frac{m m' a \omega k^2}{m' a^2 + m k^2}, \quad u = \frac{m a \omega k^2}{m' a^2 + m k^2}. \tag{1}$$

Nun bezeichne ϑ den Winkel, durch welchen sich der Cylinder um seine Axe während der Zeit t, gerechnet vom Beginne des Aufsteigens des Gewichtes an, dreht, x die entsprechende Entfernung des Gewichtes von der horizontalen Ebene durch die Cylinderaxe. Alsdann ist vermöge des Prinzipes der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$m'\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m k^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2 m' g x + C. \tag{2}$$

Bedeutet noch b den Wert von x beim Beginne des Aufsteigens des Gewichtes, so ist durch die Geometrie klar, dass

$$x + a\vartheta = b, \qquad \text{folglich} \qquad a\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{dx}{dt}.$$

Dadurch geht die (2) über in

$$\frac{m' a^2 + m k^2}{a^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2 m' g x + C.$$

Indem wir bezüglich t differentiieren, sodann mit $2\frac{dx}{dt}$ teilen, bekommen wir

$$(m' a^2 + m k^2)\frac{d^2 x}{dt^2} = m' a^2 g,$$

und wenn wir jetzt integrieren, so wird

$$(m' a^2 + m k^2)\frac{dx}{dt} = m' a^2 g t + C.$$

Mit $t = 0$ ist $\frac{dx}{dt} = -u$, folglich $C = -(m' a^2 + m k^2)u$, oder durch (1) $C = -m a \omega k^2$, demnach

$$(m' a^2 + m k^2)\frac{dx}{dt} = m' a^2 g t - m a \omega k^2. \tag{3}$$

Eine nochmalige Integration bezüglich t liefert

$$(m' a^2 + m k^2) x = C' + \frac{1}{2} m' a^2 g t^2 - m a \omega k^2 t.$$

Aber mit $t = 0$ ist $x = b$, folglich $C' = (m' a^2 + m k^2) b$, daher

$$(m' a^2 + m k^2) x = (m' a^2 + m k^2) b + \frac{1}{2} m' a^2 g t^2 - m a \omega k^2 t. \tag{4}$$

Ist t' die Zeit, nach welcher die Bewegung für einen Augenblick aufhört, dann ist mit (3), weil $\frac{dx}{dt} = 0$, wenn $t = t'$ ist,

$$0 = m' a^2 g t' - m a \omega k^2, \qquad t' = \frac{m \omega k^2}{m' a g}.$$

Ferner folgt aus (4), weil $x = 0$, wenn $t = t'$ ist,

$$(m'a^2 + mk^2) b = m a \omega k^2 t' - \frac{1}{2} m' a^2 g t'^2 = \frac{m^2 \omega^2 k^4}{2 m' g},$$

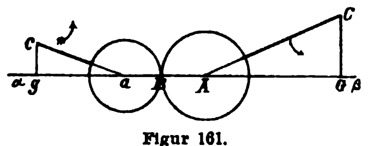
so dass

$$b = \frac{m^2 \omega^2 k^4}{2 m' g (m'a^2 + m k^2)}.$$

Weil für einen homogenen Cylinder $k^2 = \frac{1}{2} a^2$ ist, so können wir noch schreiben

$$t' = \frac{m \omega a}{2 m' g}, \qquad b = \frac{m^2 \omega^2 a^2}{4 m' g (2 m' + m)}.$$

7. Zwei unelastische Kugeln mit den Mittelpunkten A, a sind an starre Stäbe CA, ca (Fig. 161) gefesselt, welche sich in einer einzigen Ebene um zu dieser Ebene senkrechte Axen C, c bewegen, und es stossen die Kugeln mit gegebenen Geschwindigkeiten gegen einander. Welches sind die anfänglichen Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stosse?



Figur 161.

Lege durch die Mittelpunkte A, a der beiden Kugeln in dem Augenblicke ihrer Berührung eine unbegrenzte Gerade $\alpha\beta$, von C, c ziehe die geraden Linien CG, cg rechtwinkelig zu $\alpha\beta$. Lasse sein $CG = C$, $cg = c$, Ω, ω die Winkelgeschwindigkeiten von CA, ca um C, c resp. unmittelbar vor, Ω', ω' diejenigen unmittelbar nach dem Stosse, wobei die Winkelbewegungen gerechnet werden sollen in der Richtung der Pfeile, P die Stosskraft, J das Trägheitsmoment der Kugel A mit ihrem Stabe AC um die Axe durch C, i dasjenige der anderen Kugel mit Stab um die Axe durch c.

Weil $\Omega' - \Omega$ die Winkelgeschwindigkeit ist, welche CA gewinnt und $\omega - \omega'$ diejenige, welche ca durch den Stoss verliert, so haben wir

$$J(\Omega' - \Omega) = P.C, \qquad i(\omega - \omega') = P.c. \tag{1}$$

Da die beiden Kugeln unelastisch sind, so wird der Punkt B der Kugel a in dem Augenblicke nach dem Stosse dieselbe Geschwindigkeit entlang $\alpha\beta$ besitzen, wie der Punkt B der Kugel A, folglich ist

$$\Omega'.CB.\sin\measuredangle CBG = \omega'.cB.\sin\measuredangle cBg,$$

oder

$$\Omega'.C = \omega'.c. \tag{2}$$

Nun geben die Gleichungen (1)

$$c.J(\Omega'-\Omega)+C.i(\omega'-\omega)=0,$$

daher erhalten wir mittelst (2)

$$c.J(c\omega'-C.\Omega)+C^2.i(\omega'-\omega)=0,\quad (c^2J+C^2i)\omega'=C(c.J.\Omega+C.i.\omega)$$

und auch $\qquad (c^2J+C^2i)\Omega'=c(c.J.\Omega+C.i.\omega),$

so dass die zwei letzten Gleichungen die Werte von ω' und Ω' geben.

Die Lösung eines besonderen Falles dieses Problemes wurde erfolgreich von Johann Bernoulli, Sohn des berühmten Johann Bernoulli, versucht. Siehe: Les Mémoires de St. Petersbourg, Tom. VII. Die korrekte Lösung dieser Aufgabe in ihrer allgemeinsten Form gab D'Alembert: Traité de Dynamique, p. 221, second edition.

8. Eine Impulsivspannung wird in der Richtung der Tangente einem Endpunkte eines homogenen, vollkommen biegsamen, schweren Fadens mitgeteilt, welcher auf einer glatten, horizontalen Ebene liegt. Die Gestalt des Fadens soll so bestimmt werden, dass alle seine Punkte beginnen können, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit zu bewegen.

Lasse sein t die impulsive Spannung des Fadens in einem seiner Punkte, dessen Coordinaten x, y sind, v_x, v_y die Anfangsgeschwindigkeiten dieses Punktes parallel zu den Coordinatenaxen, μ die Masse einer Längeneinheit des Fadens, ϱ seinen Krümmungshalbmesser für den Punkt (x, y), c die konstante Anfangsgeschwindigkeit.

Mit diesen Notationen sind die Bewegungsgleichungen des Fadens

$$\frac{d}{ds}\left(t\frac{dx}{ds}\right)=\mu v_x,\quad \frac{d}{ds}\left(t\frac{dy}{ds}\right)=\mu v_y. \tag{1}$$

Durch diese Gleichungen ergiebt sich

$$\begin{aligned}\mu^2(v_x^2+v_y^2)&=\left(t\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dt}{ds}\right)^2+\left(t\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dt}{ds}\right)^2\\&=\left(\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}\right)\frac{dt^2}{ds^2}+2t\frac{dt}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)\\&\qquad+t^2\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right\},\end{aligned}$$

$$\mu^2(v_x^2+v_y^2)=\frac{dt^2}{ds^2}+\frac{t^2}{\varrho^2}.$$

Weil die Geschwindigkeit beim Beginne der Bewegung des Fadens für seine sämtlichen Punkte von gleicher Grösse sein soll, so muss die Bedingung erfüllt werden

$$\frac{dt^2}{ds^2}+\frac{t^2}{\varrho^2}=c. \tag{2}$$

Ferner können wir zufolge der Gleichungen (1) zeigen, dass

$$\frac{d^2t}{ds^2}=\frac{t}{\varrho^2}. \tag{3}$$

Nun ergiebt sich mit (2) und (3)

$$\frac{dt^2}{ds^2} + t\frac{d^2t}{ds^2} = c, \quad t\frac{dt}{ds} = cs + c', \quad t^2 = cs^2 + 2c's + c''.$$

Folglich wird

$$\varrho^2 = \frac{t}{\frac{d^2t}{ds^2}} = \frac{t^2}{t\frac{d^2t}{ds^2}} = \frac{t^2}{c - \frac{dt^2}{ds^2}} = \frac{t^4}{ct^2 - (cs + c')^2},$$

$$\varrho^2 = \frac{\left(s^2 + \frac{2c'}{c}s + \frac{c''}{c}\right)^2}{\frac{cc'' - c'^2}{c^2}},$$

so dass mit $s + \frac{c'}{c} = \sigma$, $a = \sqrt{\frac{cc'' - c'^2}{c^2}}$ sich ergiebt

$$\varrho = \frac{\sigma^2 + a^2}{a}. \tag{4}$$

Die Gleichung (4) zeigt, dass die anfängliche Gestalt des Fadens eine Kettenlinie sein muss, wenn nicht $a = 0$ oder $cc'' = c'^2$ ist, in welchem Falle $\varrho = \infty$ und sonach seine Form geradlinig ist.

Tait and Steele, Dynamics of a Particle, 2nd. Edition, p. 294.

6—8. Walton, p. 607—612.

9. Auf die eine Schale einer Wage fällt eine gegebene unelastische Masse aus gegebener Höhe, zwei andere unelastische Massen werden aus verschiedenen Höhen so auf die andere Schale fallen gelassen, dass die drei Stösse gleichzeitig stattfinden. Welches sind die Relationen zwischen den Massen und den Höhen, wenn die Wage dabei permanent in Ruhe bleibt?

Ist m die gegebene Masse, sind m', m'' die anderen zwei Massen, h, h', h'' resp. die drei Fallhöhen, alsdann besteht die Beziehung

$$m : m' : m'' = (\sqrt{h'} - \sqrt{h''}) : (\sqrt{h} - \sqrt{h''}) : (\sqrt{h'} - \sqrt{h}).$$

10. Eine unelastische Kugel A gleitet auf einer geneigten Ebene herab und kommt mit einer gleichen unelastischen Kugel B in Contact, welche auf einer horizontalen Ebene liegt und die geneigte Ebene berührt. Wie gross sind die zwei Geschwindigkeiten der Kugeln gerade nach der Collision? Welches ist die Winkelgeschwindigkeit der die Mittelpunkte A, B der Kugeln verbindenden geraden Linie in dem Augenblicke bevor sie horizontal wird?

Lasse sein $l =$ der Länge desjenigen Teiles der geneigten Ebene, auf welchem die Kugel A aus der Ruhe bis zur Collision mit B herabgleitet, $\alpha =$ der Neigung dieser Ebene, $r =$ dem Radius einer jeden der Kugeln, v, v' die Geschwindigkeiten von A, B, resp. gerade nach dem Stosse, ω die Winkelgeschwindigkeit des gegenseitigen Abstandes ihrer Mittelpunkte. Damit wird gefunden werden

$$v = \frac{\cos^2\alpha}{1 + \cos^2\alpha}\sqrt{2gl\sin\alpha}, \quad v' = \frac{\cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha}\sqrt{2gl\sin\alpha}.$$

$$\omega^2 = \frac{g\sin^3\alpha}{2r^2} \cdot \frac{(l + 2r)\cos^2\alpha + 2r}{(1 + \cos^2\alpha)^2}.$$

11. Ein gleichförmiger, in einer vertikalen Ebene um das eine seiner Enden beweglicher Stab fällt aus einer horizontalen Lage und trifft einen vollkommen elastischen Ball. Zu bestimmen die grösste Geschwindigkeit, welche er dem Balle mitteilen kann, und die Lage zu finden, in welcher der Ball getroffen werden muss, damit er diese Geschwindigkeit erhält.

Es bezeichne a die Länge des Stabes, m seine Masse, m' diejenige des Balles, dann ist die grösste Geschwindigkeit, welche dem Balle mitgeteilt werden kann, gleich $\sqrt{g a \frac{m}{m'}}$. Damit er diese Geschwindigkeit erlangt, muss sich der Ball vertikal unter dem Aufhängepunkte in einem Abstande gleich $a\sqrt{\frac{m}{3\,m'}}$ von diesem Punkte befinden.

12. Zwei gleiche, unelastische, durch einen starren, gewichtslosen Stab mit ihren Mittelpunkten verbundene Bälle gleiten entlang einer glatten, vertikalen und einer glatten, horizontalen Ebene; die vertikale Ebene durch den Stab ist senkrecht auf der Schnittlinie dieser zwei Ebenen. Der tiefere Ball stösst direkt auf einen gleichen, ruhenden Ball. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit des Stabes in dem Augenblicke nach der Collision, wenn seine Winkelgeschwindigkeit und Lage in dem Augenblicke vor dem Zusammentreffen bekannt sind?

Bezeichnet α die Neigung und ω die Winkelgeschwindigkeit des Stabes gerade vor dem Stosse, so wird seine Winkelgeschwindigkeit gerade nachher gleich sein

$$\frac{\omega}{1 + \sin^2 \alpha}.$$

13. Eine rechteckige, offene Thür wird in der äusseren Kante senkrecht zu ihrer Ebene durch einen Körper gestossen, dessen Masse gleich $\frac{1}{3}$ von derjenigen der Thür ist, und bewegt er sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit. Wie gross ist die Geschwindigkeit, welche dadurch der äusseren Kante der Thür mitgeteilt wird, wenn die Thürangeln glatt sind und der stossende Körper unelastisch ist?

Die äussere Kante der Thür wird eine Geschwindigkeit erhalten, welche gleich der Hälfte der Geschwindigkeit des stossenden Körpers ist.

14. Ein schlanker, homogener Stab liegt auf einer glatten, horizontalen Ebene. Derselbe ist durch ein Charnier in seiner Mitte in zwei Teile zerlegt und in Bewegung versetzt durch einen Stoss, welcher in dem einen seiner Endpunkte senkrecht zu seiner Länge wirkt. Man soll die Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunktes des Stabes mit derjenigen vergleichen, welche er haben würde, wenn der Stab kein Charnier besässe.

Die Geschwindigkeit des Mittelpunktes des geteilten Stabes ist doppelt so gross als diejenige, welche er besitzen würde, wenn er aus einem Stücke bestünde, aber von entgegengesetzter Richtung.

15. Der eine Endpunkt eines auf einer glatten, horizontalen Ebene liegenden Stabes ist fest. Ein Ball A befindet sich auf dieser Ebene, den Stab in einem gegebenen Abstande von dem festen Ende berührend. In welchem Punkte des Stabes muss auf seiner anderen Seite ein zweiter Ball A' direkt stossen, damit A die grösstmögliche Geschwindigkeit mitgeteilt werden kann, wenn der Stab und die Bälle unelastisch sind?

Lasse sein a, a' die Abstände der Bälle A, A' resp. von dem festen Ende des

Stabes in dem Augenblicke des Zusammentreffens, m, m' die Massen von A, A' resp., μk^2 das Trägheitsmoment des Stabes um seine Drehaxe, dann ist

$$a' = \sqrt{\frac{1}{m'}(m a^2 + \mu k^2)}.$$

O'Brien and Ellis: Solutions of the Senate-House Problems for 1844.

16. Eine rechtwinkelige Thür vom Gewichte G ist anfangs offen und in Ruhe, sie wird mittelst eines Gewichtes G' geschlossen, welches an dem einen Ende einer über eine Rolle in der Kante der Thür, wenn sie geschlossen, laufende Schnur aufgehangen ist. Der mit der Thür verbundene Endpunkt der Schnur beschreibt einen horizontalen Kreisbogen vom Halbmesser gleich der Breite der Thür. Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit der Thür in dem Augenblicke vor und in dem Augenblicke nach dem Schlusse der Thür?

Es sei $\alpha =$ der Neigung der Anfangslage der Thür zu ihrer Stellung, wenn sie geschlossen ist, $b =$ der Breite der Thür; ω, ω' seien die verlangten Winkelgeschwindigkeiten in dem Augenblicke bevor und in demjenigen sofort nach dem Schlusse der Thür, dann ist

$$\omega^2 = \frac{6 G' g \alpha}{b(G + 3G')}, \quad \omega' = \frac{G - 3G'}{G + 3G'}\omega.$$

Wenn $G = 3G'$ ist, so ergiebt sich, dass die Thüre in Ruhe bleiben wird, wenn sie schliesst.

17. Zwei gerade Stäbe ACB, CD von gleicher Dicke und Dichtigkeit liegen rechtwinkelig zu einander auf einer glatten, horizontalen Ebene, das Ende C des letzteren Stabes ist mit dem ersteren in Berührung. In welchem Punkte kann der Stab ACB durch eine Kraft ohne Folge von Rotation gestossen werden?

Es sei $AC = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $AC > BC$, dann liegt der verlangte Stosspunkt in CA und in einem Abstande von C gleich

$$\frac{a^2 - b^2}{2(a + b + c)}.$$

18. Zwei gleiche, glatte, gleichförmige Stäbe sind mit je einem ihrer Enden frei verbunden und auf eine glatte, horizontale Ebene gelegt. Wo befindet sich der Punkt, in welchem einer der beiden Stäbe gestossen werden muss, damit das System beginnen kann, sich so zu bewegen, wie wenn es starr wäre?

Ist $2a$ die Länge eines Stabes, 2α der Winkel zwischen den Stäben, dann muss der Stoss in einem Abstande gleich $a \sin^2 \alpha$ von dem Charnier erfolgen.

19. Vier gleiche Stäbe sind mit ihren Endpunkten so frei verbunden, dass sie die Seiten eines Quadrates bilden. Eine Ecke trifft ein Schlag in der Richtung einer der Seiten. Vergleiche die Anfangsgeschwindigkeiten der Mittelpunkte der vier Stäbe.

Die verlangten Anfangsgeschwindigkeiten stehen in der Proportion von 2, 5, 2, −1.

9—19. Walton, p. 612—615.

Dritter Abschnitt.

Das ballistische Pendel.

Die Bestimmung der Geschwindigkeit einer Kugel, wenn sie die Mündung einer Kanone verlässt, ist eine Sache von bedeutender Wichtigkeit in der Theorie der Ge-

schützkunst. Durch dieses Mittel können wir die Richtigkeit irgend einer Theorie, welche wir Grund haben für die Bewegung eines Geschosses in einer Kanone aufzustellen, vollständig prüfen; oder wir können durch Experimente die besonderen Wirkungen finden, welche folgen aus der Variation der Länge der Kanone, aus der Veränderung der Quantität und Qualität des Pulvers, aus der Veränderung des Gewichtes der Geschosse. Durch die Ermittelung der Geschwindigkeit eines Geschosses in verschiedenen Abständen von der Kanone können wir die den Widerstand der Luft regierenden Gesetze entdecken.

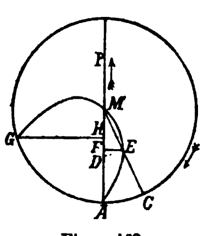
Um diese Anfangsgeschwindigkeit zu bestimmen, erfand Mr. Robins gegen das Jahr 1743 das ballistische Pendel. Vor dieser Zeit wurden nur kleine Fortschritte in der Aufstellung einer richtigen Theorie für die Bewegung der Wurfgeschosse gemacht. Seine New Principles of Gunnery wurden bald in mehrere Sprachen übertragen. Euler fügte seiner Übersetzung ins Deutsche einen ausgedehnten Commentar hinzu, so dass Eulers Arbeit wieder in das Englische im Jahre 1784 übersetzt wurde. Die Experimente von Robins wurden alle mit Musketenkugeln, die ungefähr das Gewicht einer Unze besassen, ausgeführt. Späterhin setzte jedoch Dr. Hutton diese Experimente mehrere Jahre hindurch fort und verwendete er Kanonenkugeln von ein bis drei englischen Pfund Gewicht. Seine Versuchsresultate gelten jetzt noch als solche von grosser Genauigkeit für Kanonen glatter Bohrung.

Die Anwendung des ballistischen Pendels geschieht nach zwei Methoden, welche beide von Robins gebraucht wurden. Bei der ersten Methode wird das Rohr an einem sehr schweren Pendel befestigt. Wird das Geschütz abgefeuert, so versetzt der Rückstoss das Pendel um seine Axe in Schwingungen, es oscilliert durch einen messbaren Bogen und die Geschwindigkeit der Kugel kann von der Grösse dieses Bogens abgeleitet werden. Bei der zweiten Methode wird die Kugel in das Pendel hineingefeuert. Die Geschwindigkeit der Kugel selbst ist zu gross, um direkt gemessen werden zu können, aber die Winkelgeschwindigkeit des Pendels kann so klein gemacht werden, wie es wünschenswert erscheint, da sie mit der Vergrösserung seiner Masse abnimmt. Ist der Schwingungsbogen gemessen, dann kann die Geschwindigkeit der Kugel durch Calculation gefunden werden.

Die Anfangsgeschwindigkeit kleiner Geschosse lässt sich auch durch den Gebrauch eines Rotationsapparates bestimmen. Zwei kreisrunde Papierscheiben werden mit ihren Ebenen senkrecht an einer starren, geraden, ihre Mittelpunkte verbindenden Linie befestigt und rotieren mit einer grossen, bekannten Geschwindigkeit. Anstatt zweier Scheiben kann auch ein Papiercylinder gebraucht werden. Die durch die rotierenden Flächen gefeuerte Kugel lässt in den Papierscheiben oder dem Papiercylinder zwei kleine Löcher zurück, und es kann durch die Beobachtung der Lage dieser Löcher die Geschwindigkeit der Kugel berechnet werden. Dieses war auch ursprünglich eine italienische Erfindung, sie wurde sehr viel verbessert und angewendet durch Olinthus Gregory anfangs des jetzigen Jahrhunderts.

I. Messung der Geschwindigkeit eines Geschosses mittelst eines um seine vertikale Axe rotierenden Papiercylinders.

Durchstreicht das Geschoss, welches wir hier als einen materiellen Punkt ansehen, einen Durchmesser des Cylinders, so kann auf dieser Strecke seine Geschwindigkeit als konstant angenommen werden. Es sei die Geschwindigkeit des materiellen Punktes P, welcher sich in der Richtung des Cylinderdurchmessers AMP (Fig. 162, S. 184) bewegt, gleich c, v die



Figur 162.

Geschwindigkeit des Cylindermantels, r der Radius MA des Cylinders, A der Punkt in dem Cylindermantel, durch welchen P nach der Richtung des Durchmessers AMP in den Cylinder eingeht, M der Mittelpunkt des horizontalen Cylinderschnittes ACG, C der Punkt im Mantel, welcher dann in A ist wenn P in D ist, also wenn die Gerade MC gezogen und aus M mit MD der Bogen DE beschrieben wird, E der Punkt auf MC, welchen P trifft in dem Augenblicke, wo P den Weg AD zurückgelegt hat, womit E ein Punkt der relativen Bahn von P ist. Fällen wir nun EF normal auf AM, setzen die Abscisse $AF = x$, die Ordinate $FE = y$, den Bogen $CA = r\alpha$, so haben wir $AD : AC = AD : r\alpha = c : v$, also $AD = \frac{rc}{v}\alpha$, folglich $MD = ME = r - \frac{rc}{v}\alpha = r\,(1 - \frac{c}{v}\alpha)$, mithin

$$x = r - r\,(1 - \frac{c}{v}\alpha)\cos\alpha, \quad (1) \qquad y = r\,(1 - \frac{c}{v}\alpha)\sin\alpha. \qquad (2)$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt, weil $tg\,\alpha = \frac{y}{r - x}$ ist,

$$(r - x)^2 + y^2 = r^2\left(1 - \frac{c}{v}\,arc\,tg\,\frac{y}{r - x}\right)^2. \qquad (3)$$

Ist noch G der Ausgangspunkt des Geschosses, dann haben wir sowohl für A als G

$$(r - x)^2 + y^2 = r^2, \quad \text{also} \quad r^2 = r^2\left(1 - \frac{c}{v}\,arc\,tg\,\frac{y}{r - x}\right)^2,$$

folglich $\qquad 1 - \frac{c}{v}\,arc\,tg\,\frac{y}{r - x}, \quad$ oder $\quad 1 - \frac{c}{v}\alpha = \pm 1,$

wo das obere Zeichen für A, das untere für G zu nehmen ist. Für G entsteht daher $\alpha = \frac{2v}{c}$, so dass wir für die zugehörige Abscisse AH und die zugehörige Ordinate HG erhalten

$$AH = r\left(1 + \cos\frac{2v}{c}\right), \quad HG = r\sin\frac{2v}{c}.$$

Soll G mit A zusammenfallen, d. h. soll die Kugel durch dasselbe Loch ausgehen, durch welches sie einging, so muss $r\left(1 + \cos\frac{2v}{c}\right) = 0$ und $r\sin\frac{2v}{c} = 0$ sein, woraus $\frac{2v}{c} = \pi$ folgt, welches Resultat auch leicht unmittelbar zu erkennen ist. Für die Geschwindigkeit c des Geschosses haben wir mithin die drei Relationen

$$c = \frac{2v}{\alpha}, \quad c = \frac{2v}{arc\left(\cos = \frac{AH - r}{r}\right)}, \quad c = \frac{2v}{arc\left(\sin = \frac{HG}{r}\right)},$$

wodurch dieselbe im bestimmten Falle leicht in der einen oder anderen Weise gefunden werden kann. Die Lösung dieser Bewegungsaufgabe hier, gab die Natur der Sache an die Hand.

II. Ein gezogenes Geschützrohr ist in einer horizontalen Lage an einem grossen Holzblocke befestigt, welcher sich frei um eine horizontale Axe drehen kann. Das Gewehr werde abgefeuert, so dass der Rückstoss das Pendel nötigt, sich um seine Axe so lange zu drehen, bis es durch die Wirkung der Schwerkraft zur Ruhe gebracht wird. Ein an dem Pendel befestigtes Stück Schnur wird während der Rückwärtsbewegung des Pendels von einer Haspel abgewickelt, welches dazu dienen kann, den Betrag des Rückstosswinkels zu messen. Mit diesem Apparate kann die Geschwindigkeit des Geschosses wie folgt bestimmt werden.

Die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel ist bedeutend grösser als diejenige des Pendels, wir können deshalb annehmen, dass die Kugel das Rohr bereits verlassen habe, ehe das Pendel sich merkbar aus seiner Anfangslage bewegt hat. Die anfängliche Bewegungsgrösse der Kugel kann als ein Mass für den dem Pendel mitgeteilten Stoss genommen werden.

Es sei h der Abstand des Schwerpunktes des Systems, f der Abstand der Axe des Rohres, c derjenige des Befestigungspunktes der Schnur von der Aufhängeaxe, m die Masse der Kugel, M diejenige des Pendels und des Rohres, n das Verhältnis von M zu m, b die Sehne des Bogens des Rückstosses, welcher durch die Schnur gemessen wird, k' der Trägheitshalbmesser von Rohr und Pendel für die Schwingungsaxe, v die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel.

Die Explosion des Schiesspulvers erzeugt eine gleiche impulsive Wirkung auf die Kugel und das Rohr. Weil die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel v ist, so wird diese Wirkung durch mv gemessen. Die in dem Pendel infolge dieses Stosses erzeugte Anfangsgeschwindigkeit ist $\omega = \frac{mv.f}{Mk'^2}$, und die nachfolgende Bewegung ist gegeben durch

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{gh}{k'^2}\sin\vartheta, \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C + \frac{2gh}{k'^2}\cos\vartheta.$$

Wenn $\vartheta = 0$, so haben wir $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, und wenn α der Rückstosswinkel ist, mit $\vartheta = \alpha$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$. Folglich ist

$$\omega^2 = \frac{2gh}{k'^2}(1 - \cos\alpha).$$

Die Elimination von ω giebt

$$v = \frac{nk'}{f} \cdot 2 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gh}.$$

Aber die Sehne des Rückstossbogens ist $b = 2c\sin\frac{\alpha}{2}$, mithin erhalten wir für die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses die einfache Relation

$$\therefore v = \frac{nbk'}{cf}\sqrt{gh}.$$

Die Grösse von k' kann experimentell gefunden werden, indem wir die Zeit einer kleinen Schwingung des Pendels und Rohres beobachten. Bezeichnet T die halbe Schwingungszeit, so ist $T = \pi\sqrt{\frac{k'^2}{gh}}$, woraus folgt $k'^2 = \frac{T^2}{\pi^2}gh$.

Diese Formel gab Poisson in dem zweiten Bande seiner Mechanik. Der Leser wird in dem Philosophical Magazine for June 1854 einen Bericht über einige von Dr. S. Haughton geleitete Experimente finden, welcher diese Formel dazu benutzte, die Anfangsgeschwindigkeiten für Geschosse geriffelter Läufe zu berechnen.

Die Formel kann indessen nur als eine solche angesehen werden, welche einen ersten Annäherungswert giebt, denn der Rückstoss des Pendels, wenn das Rohr ohne eine Kugel zu enthalten, abgefeuert wird, ist vernachlässigt worden. Bei Dr. Haughton's Experimenten war die Pulverladung verhältnismässig klein und diese Annahme war nahezu korrekt. Aber bei einigen von Dr. Hutton angestellten Versuchen, für welche eine verhältnismässig grosse Pulverladung gebraucht wurde, fand sich, dass der Rückstoss ohne Kugel sehr beträchtlich ist. In Anbetracht dessen und Mr. Robins folgend, nahm Dr. Hutton an, dass die Wirkung der Pulverladung auf den Rückstoss des Gewehres dieselbe mit oder ohne Kugel ist. Wenn p die durch das Pulver erzeugte Bewegungsgrösse ist, so wird die ganze in dem Pendel erzeugte Bewegungsgrösse gleich $p + mv$ anstatt mv sein, und finden wir durch Einschlagung desselben Weges wie vorhin

$$mv + p = \frac{Mbk'}{cf}\sqrt{gh}.$$

Wiederholen wir das Experiment mit einer gleichen Ladung ohne Kugel, so ist

$$p = \frac{Mb_0k'}{cf}\sqrt{gh},$$

wo b_0 die durch die Schnur gemessene Sehne bedeutet. Aus diesen zwei Gleichungen folgt daher

$$v = \frac{M}{m} \cdot \frac{b - b_0}{cf} \sqrt{gh} = n \frac{b - b_0}{cf} \sqrt{gh}.$$

Mithin unterscheidet sich Dr. Hutton's Formel von derjenigen Poisson's dadurch, dass die Schwingungssehne zuerst bestimmt wird für eine beliebige Ladung ohne eine Kugel, sodann für eine gleiche Ladung mit einer Kugel. Der Unterschied dieser Sehnen ist als diejenige Sehne anzusehen, welche dem Rückstosse durch das Vorhandensein der Kugel zu verdanken ist.

Wenn die Pulverladung verhältnissmässig klein ist, so geben die zwei Gebrauchsmethoden des ballistischen Pendels annähernd dasselbe Resultat. Mit grossen Pulverladungen fand Dr. Hutton, dass die Differenz sehr beträchtlich war, eine geringere Geschwindigkeit wurde bei der Beobachtungsmethode des Rückstosses als bei dem Hineinfeuern der Kugel in das Pendel angezeigt. Er folgerte daraus, dass die Wirkung der Pulverladung auf den Rückstoss des Laufes nicht dieselbe ist, wenn er abgefeuert wird ohne eine Kugel und wenn er mit einer Kugel entladen wird. Wir können das Verhältnis dieser Verschiedenheit bis zu einem gewissen Grade verstehen, wenn wir besonders die Wirkungen des angezündeten Pulvers beachten während die Kugel in dem Laufe ist und nachdem sie das Rohr verlassen hat. Nehmen wir als blose Annäherung an, dass das die Kugel vorwärts treibende Gas von gleichförmiger Dichtigkeit ist, dann kann sein Schwerpunkt, in dem Augenblicke wo die Kugel den Lauf verlässt, angesehen werden als mit dem Mittelpunkte des Rohres zusammenfallend und sich relativ zu dem Rohre mit der halben relativen Geschwindigkeit des Geschosses bewegend. Bezeichnet μ die Pulvermasse, ω' die dem Pendel mitgeteilte Winkelgeschwindigkeit, dann ist dieselbe näherungsweise durch die Gleichung gegeben

$$M k'^2 \omega' = \left(m + \frac{\mu}{2}\right) v f.$$

Nachdem die Kugel das Rohr verlassen hat, entflieht das entflammte Pulver durch die Mündung und fährt fort einen gewissen Druck auszuüben, welcher bestrebt ist, den Betrag des Rückstosses zu vermehren. Die Bestimmung dieser Bewegung ist ein Problem der mechanischen Wärmetheorie, welches hier nicht gelöst werden kann. Wir können indessen annehmen, dass Robins Prinzip sich mehr auf diesen Teil der Bewegung als auf die ganze bezieht. Unter dieser Annahme lässt sich die durch das hervorbrechende Gas erzeugte Bewegungsgrösse als ein Impuls betrachten, welcher näherungsweise derselbe ist für eine gegebene Pulverladung und ein gegebenes Rohr, welches auch die Grösse sein mag. Bezeichnet p' die erzeugte Bewegungsgrösse, so haben wir

$$\left(m+\frac{\mu}{2}\right)v+p'=\frac{Mbk'}{cf}\sqrt{gh}.$$

Sind v_0 und b_0 die Werte von v und b, wenn das Rohr ohne Geschoss abgefeuert wird, dann ist

$$v-\frac{\mu}{2m}(v_0-v)=\frac{M}{m}\frac{b-b_0}{cf}\sqrt{gh}.$$

Weil v_0 grösser als v ist, so würde diese Gleichung zeigen, dass bei beträchtlichen Ladungen Dr. Huttons Formel einen zu kleinen Wert für v giebt. Der Wert von v_0 ist indessen sehr unvollkommen genau.

III. Ein Geschütz ist vor der Fronte eines schweren Pendels, welches sich frei um eine horizontale Axe drehen kann, aufgestellt. Das Geschoss trifft das Pendel horizontal in einem Abstande i von der Aufhängeaxe; dasselbe dringt eine kurze Strecke in das Pendel hinein und teilt ihm eine gewisse Bewegungsgrösse mit. Die Sehne des Schwingungsbogens wird wie vorhin durch ein Stück Schnur gemessen. Welches ist die Geschwindigkeit des Geschosses?

Die Zeit, welche das Geschoss nötig hat, um in die nur wenig elastische Masse des Pendels, die manchmal auch aus Thon bestand, einzudringen, ist so kurz, dass wir annehmen können, dieselbe sei vollständig verflossen, ehe das Pendel beginnt seine Anfangslage zu verlassen. Wenn wir dieselben Bezeichnungen wie vorhin verwenden, dann ist das Trägheitsmoment des Pendels und des Geschosses zusammen um die Schwingungsaxe Mk'^2+mi^2, der Abstand des Schwerpunktes beider Massen von derselben Axe $\frac{Mh+mi}{M+m}$. Indem wir dasselbe Verfahren wie vorhin einschlagen, finden wir

$$v=\frac{b\sqrt{g}}{ci}\cdot\frac{\sqrt{Mk'^2+mi^2}\sqrt{Mh+mi}}{m}.$$

Wird das Geschütz so aufgestellt, dass die Kugel möglichst nahe dem Schwerpunkte des Pendels einschlägt, dann kann $h=i$ genommen werden und die Formel nimmt, weil M im Vergleich mit m sehr gross ist, die einfache Gestalt an

$$v=\frac{M+m}{m}\cdot\frac{bh}{ci}\sqrt{gl},$$

wo l den Abstand des Schwingungsmittelpunktes des Pendels und des Geschosses zusammen von der Aufhängeaxe bezeichnet.

Die Unbequemlichkeit der zweiten Methode im Vergleich mit der ersten besteht darin, dass die Geschosse während der Zeit einer ganzen Reihe von Experimenten in dem Pendel bleiben. Das Gewicht, die Lage

des Schwerpunktes und Oscillationsmittelpunktes ändern sich bei dem Hinzukommen eines jeden Geschosses in der Holzfüllung des Pendels Selbst dann fallen die durch jeden Stoss in dem Pendel selbst hervorgebrachten Änderungen weg. Ein grosser Fortschritt wurde von den Franzosen bei ihren Versuchen zu Metz im Jahre 1839 und zu L'Orient im Jahre 1842 gemacht. Anstatt einer Holzmasse, die einer öfteren Erneuerung bedarf, wie dieses mit dem englischen Pendel der Fall ist, wurde ein permanenter Recepteur substituiert. Dieser Empfänger wird innerhalb eines abgekürzten Kegels gebildet, welcher genügend lang ist, um zu verhindern, dass das Geschoss den Sand, mit welchem er gefüllt ist, gänzlich passiert. Die Vorderseite ist mit einer dünnen Bleiplatte bedeckt, damit der Sand nicht auslaufen kann. Die Platte ist markirt durch eine horizontale und eine vertikale Linie, deren Schnitt der Axenlage des Kegels entspricht, so dass die wirkliche Lage des Schusses, wenn er in den Empfänger eingedrungen ist, leicht durch diese Linien bestimmt werden kann.

Es lässt sich zeigen, dass nach jedem Geschoss, welches in ein englisches Pendel hineingefeuert wird, h um $\frac{m}{M}(i-h)$ und l um $\frac{m}{M}(i-l)$ zunehmen muss, um annähernd die Formel für den nächsten Schuss zu verbessern.

Dr. Haughton fand, dass für gezogene Rohre mit einer konstanten Ladung die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses wechselte umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Masse des Geschosses und direkt wie die Quadratwurzel aus der Länge des Rohres. Dadurch lässt sich zeigen, dass die durch die Explosion des Pulvers entwickelte und durch den Reibungswiderstand des Rohres verminderte Kraft konstant ist, während das Geschoss den Lauf passiert.

Dr. Hutton fand, dass bei glatten Bohrungen die Geschwindigkeit in einem Verhältnisse mit der Länge des Rohres wächst, welches etwas kleiner als die Quadratwurzel aus dieser Länge, aber grösser als die Kubikwurzel derselben ist. Zeige, dass man dies erwarten konnte von der geringeren Reibung bei glatter Bohrung im Vergleich mit derjenigen bei einem geriffelten Laufe.

Wenn die Geschwindigkeit eines Geschosses, welches die Mündung eines 30 englische Zoll langen Rohres verlässt, in der Sekunde 1000 englische Fuss beträgt, so ist die Zeit, welche die Kugel in Anspruch nahm, um den Lauf zu passieren, ungefähr gleich $\frac{1}{200}$ Sekunden.

Es ist durch Experimente gefunden worden, dass, wenn ein Geschoss in einen grossen, festen Holzblock gefeuert wird, das Eindringen des Geschosses in das Holz annähernd proportional dem Quadrate der Geschwin-

digkeit ist, also fällt die Tiefe des Eindringens verhältnissmässig um so kürzer aus, je mehr die Geschwindigkeit wächst. Unter der Annahme dieser Regel zeige, dass der dem Eindringen sich entgegenstellende Widerstand konstant ist, dass ferner die Zeit des Eindringens das Verhältnis aus dem zweifachen Wege und der Anfangsgeschwindigkeit der Kugel ist. Bei einem Experimente feuerte Dr. Hutton eine Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1500 englischen Fuss in der Sekunde ab und fand, dass das Geschoss ungefähr auf eine Strecke von 14 englischen Zoll in einen gesunden Ulmenblock während einer Zeit von $\frac{1}{643}$ Sekunden eindrang.

Routh, Dynamics, p. 94 & c.

Vierter Abschnitt.

Bewegung eines einzelnen Körpers in drei Richtungen. Die Oberflächen sind vollkommen glatt. Bestimmung der Momentanaxe etc.

1. Ein unveränderliches, ruhendes, materielles System wird von einem beliebigen Systeme gleichzeitiger Stösse getroffen. Welches ist die Lage und die Geschwindigkeit der Spontanaxe? Die Spontanaxe ist eine fest mit dem Systeme verbundene gerade Linie, die nur eine Bewegung in der Richtung ihrer Länge besitzt, wenn die Stösse erfolgen.

Zum Ursprunge rechtwinkeliger Coordinatenaxen wählen wir den Schwerpunkt des Systemes. Die gesammten Stosskräfte können auf die Impulsivpressungen X, Y, Z in dem Ursprunge, entlang den Axen der x, y, z wirkend, und drei Impulsivpaare in den Ebenen der yz, zx, xy, deren Momente L, M, N resp. sein mögen, reduziert werden. Es seien V_x, V_y, V_z die Componenten der absoluten Geschwindigkeit des materiellen Punktes δm mit den Coordinaten x, y, z, augenblicklich nach der Wirkung der Stösse, parallel zu den Coordinatenaxen, V_x', V_y', V_z' die Componenten der Geschwindigkeit desselben materiellen Punktes relativ zu dem Schwerpunkte, $\overline{V}_x$, $\overline{V}_y$, $\overline{V}_z$ die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes, ω_1, ω_2, ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten des Systemes um die drei Coordinatenaxen.

Für die Translationsgeschwindigkeiten bestehen hier die Beziehungen

$$V_x = \overline{V}_x + V_x', \qquad V_y = \overline{V}_y + V_y', \qquad V_z = \overline{V}_z + V_z',$$

und $$V_x' = z\,\omega_2 - y\,\omega_3, \qquad V_y' = x\,\omega_3 - z\,\omega_1, \qquad V_z' = y\,\omega_1 - x\,\omega_2. \tag{1}$$

Für die Bewegung des Schwerpunktes haben wir die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma\,\delta m\,(y\,V_z'-z\,V_y')=L,\qquad \Sigma\,\delta m\,(z\,V_x'-x\,V_z')=M,\\ \Sigma\,\delta m\,(x\,V_y'-y\,V_x')=N,\end{array}\right\}\quad(2)$$

welche, wenn wir für V_x', V_y', V_z' die in (1) gegebenen Werte substituieren, übergehen in

$$\left.\begin{array}{l}\omega_1\Sigma\,(y^2+z^2)\,\delta m-\omega_2\,\Sigma\,x\,y\,\delta m-\omega_3\,\Sigma\,x\,z\,\delta m=L\\ \omega_2\Sigma\,(z^2+x^2)\,\delta m-\omega_3\,\Sigma\,y\,z\,\delta m-\omega_1\,\Sigma\,y\,x\,\delta m=M\\ \omega_3\Sigma\,(x^2+y^2)\,\delta m-\omega_1\,\Sigma\,x\,z\,\delta m-\omega_2\,\Sigma\,y\,z\,\delta m=N\end{array}\right\}\quad(3)$$

Um diese Gleichungen zu vereinfachen, wählen wir das Coordinatensystem so, dass die Coordinatenaxen mit den Hauptaxen durch den Schwerpunkt zusammenfallen, und es seien A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Systemes, alsdann ist offenbar

$$A\,\omega_1=L,\qquad B\,\omega_2=M,\qquad C\,\omega_3=N.\quad(4)$$

Ferner ist noch für die Bewegung des Schwerpunktes, wenn m die ganze Masse des Systemes bezeichnet,

$$m\,.\,\bar{V}_x=X,\qquad m\,.\,\bar{V}_y=Y,\qquad m\,.\,\bar{V}_z=Z.\quad(5)$$

Demnach erhalten wir für die Componenten der absoluten Geschwindigkeit eines beliebigen materiellen Punktes δm des Systemes die Relationen

$$\left.\begin{array}{l}V_x=\bar{V}_x+V_x'=\dfrac{X}{m}+z\dfrac{M}{B}-y\dfrac{N}{C}\\[2mm] V_y=\bar{V}_y+V_y'=\dfrac{Y}{m}+x\dfrac{N}{C}-z\dfrac{L}{A}\\[2mm] V_z=\bar{V}_z+V_z'=\dfrac{Z}{m}+y\dfrac{L}{A}-x\dfrac{M}{B}\end{array}\right\}.\quad(6)$$

Betrachten wir V_x, V_y, V_z als konstant, dann stellen irgend zwei der Gleichungen (6) eine gerade Linie dar. Multiplizieren wir die drei Gleichungen (6) der Reihe nach mit $\frac{L}{A}$, $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$ und addieren die Resultate, so erhalten wir eine Bedingung, welcher V_x, V_y, V_z unterworfen sind, dieselbe lautet

$$\frac{L.V_x}{A}+\frac{M.V_y}{B}+\frac{N.V_z}{C}=\frac{L.X}{m.A}+\frac{M.Y}{m.B}+\frac{N.Z}{m.C}.\quad(7)$$

Die Richtungscosinus der Linie sind, wie aus ihren Gleichungen hervorgeht, proportional den Grössen

$$\frac{L}{A},\quad\frac{M}{B},\quad\frac{N}{C},$$

aber wenn die Linie die Spontanaxe ist, dann müssen diese Cosinus, infolge der Definition, auch proportional sein V_x, V_y, V_z, folglich,

$$V_x=k\frac{L}{A},\quad V_y=k\frac{M}{B},\quad V_z=k\frac{N}{C}\quad(8)$$

setzend, ist aus (7) ersichtlich, dass

$$k = \frac{\frac{L.X}{m.A} + \frac{M.Y}{m.B} + \frac{N.Z}{m.C}}{\left(\frac{L}{A}\right)^2 + \left(\frac{M}{B}\right)^2 + \left(\frac{N}{C}\right)^2}. \tag{9}$$

Mit (8) und (9) ergiebt sich nun, wenn V die Geschwindigkeit der Spontanaxe bezeichnet,

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = k\sqrt{\left(\frac{L}{A}\right)^2 + \left(\frac{M}{B}\right)^2 + \left(\frac{N}{C}\right)^2},$$

$$V = \frac{\frac{L.X}{m.A} + \frac{M.Y}{m.B} + \frac{N.Z}{m.C}}{\sqrt{\left(\frac{L}{A}\right)^2 + \left(\frac{M}{B}\right)^2 + \left(\frac{N}{C}\right)^2}}.$$

Die Gleichungen (6) werden durch (8)

$$\left.\begin{aligned} k\frac{L}{A} &= \frac{X}{m} + z\frac{M}{B} - y\frac{N}{C} \\ k\frac{M}{B} &= \frac{Y}{m} + x\frac{N}{C} - z\frac{L}{A} \\ k\frac{N}{C} &= \frac{Z}{m} + y\frac{L}{A} - x\frac{M}{B} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

womit die Gleichungen der Spontanaxe gefunden sind, denn der Wert von k ist bereits durch die Gleichung (9) gegeben.

Der Studierende, welcher sich weiter über dieses Problem zu informieren wünscht, wird auf zwei Scripturen in „The Cambridge Mathematical Journal“, Vol. IV. November 1844, aufmerksam gemacht. Das erste dieser Schriftstücke ist beigetragen worden durch Mr. Goodwin, jetzt Bishop of Carlisle.

2. Das eine Ende der kleinen Axe einer elliptischen Platte ist fest; sie wird in einer Richtung senkrecht zu ihrer Ebene gestossen, welche durch den einen ihrer Brennpunkte geht. Wie gross muss die Excentrizität der Ellipse sein, damit die Axe anfänglicher Rotation durch den anderen Brennpunkt geht?

Lasse sein A, B die Trägheitsmomente der elliptischen Platte um die Tangente und die Normale der Curve in dem festen Punkte, P die Grösse der Stosskraft, ω_1, ω_2 die augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten um diese Tangente und Normale, a, b die Halbaxen der Ellipse, e ihre Excentrizität.

Weil die Tangente und die Normale Hauptaxen sind, so haben wir

$$A\,\omega_1 = P.b, \qquad B\,\omega_2 = -P.a.e.$$

Aber es ist $A = \frac{5}{4}\pi\,a\,b^3$, $B = \frac{1}{4}\pi\,a^3\,b$, folglich $\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{a}{5\,b\,e}$. Weil die Momentanaxe durch den anderen Brennpunkt gehen soll, so muss die Bedingung erfüllt werden

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{a e}{b},$$

mithin ist
$$e^2 = \frac{1}{5}.$$

3. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped rotiert mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit um eine Diagonale. Eine seiner Kanten, welche die Diagonale nicht schneidet, wird plötzlich fest. Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit um diese Kante?

Es bezeichne ω die gegebene Winkelgeschwindigkeit. Die fest werdende Kante OC nehmen wir zu der Axe der z, so dass die Kanten OA, OB die Axen der x, y resp. sind. Ferner sei Mk'^2 das Trägheitsmoment des Körpers um OC und ω' die verlangte Winkelgeschwindigkeit um diese Kante. Weil alle Stösse auf den Körper durch die Axe der z gehen, so wird das Moment der Bewegungsgrösse des Körpers um diese Axe durch die Impulsivwirkung nicht berührt, folglich muss sein

$$M k'^2 \omega' = \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right).$$

Nun seien $2a$, $2b$, $2c$ die Längen der Kanten des Parallelopipedes, so dass a, b, c die Coordinaten seines Schwerpunktes sind, x', y', z' die Coordinaten eines beliebigen materiellen Punktes des Systemes, bezogen auf Axen durch den Schwerpunkt, welche parallel zu OA, OB, OC sind, dann ist auch

$$M k'^2 \omega' = \Sigma m \left\{ (a + x') \frac{dy'}{dt} - (b + y') \frac{dx'}{dt} \right\}.$$

Sind ferner $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten um die Axen der x', y', z' vor dem Stosse, dann ist noch

$$\frac{dx'}{dt} = \omega_2 z' - \omega_3 y', \qquad \frac{dy'}{dt} = \omega_3 x' - \omega_1 z'.$$

Weil der neue Ursprung der Schwerpunkt ist und die neuen Coordinatenaxen Hauptaxen sind, so folgt

$$M k'^2 \omega' = \Sigma \left\{ m \omega_3 (x'^2 + y'^2) \right\} = M k^2 \omega_3,$$

wenn k den Trägheitsradius des Körpers für die Axe der z' bezeichnet, mithin ist

$$k'^2 \omega' = k^2 \omega_3.$$

Es kann nun leicht ermittelt werden, dass $\frac{k^2}{k'^2} = \frac{1}{4}$, daher ergiebt sich

$$\omega' = \frac{1}{4} \omega_3 = \frac{1}{4} \omega \cos \gamma,$$

wo γ die Neigung der fest werdenden Kante zu der Diagonale, um welche sich der Körper ursprünglich dreht, bezeichnet.

1—3. Walton, p. 588—592.

4. Ein starrer Körper bewegt sich um einen festen Punkt. Zu gleicher Zeit wirken auf ihn gegebene Impulse. Welches sind die allgemeinen Gleichungen für seine Bewegung augenblicklich nach dem Stosse?

Es sei der feste Punkt O der Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes, $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, $(\Omega'_x, \Omega'_y, \Omega'_z)$ seien die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers gerade vor und augenblicklich nach dem Stosse, L, M, N die Momente der Impulsivkräfte um die Coordinatenaxen.

Nach dem Prinzipe von D'Alembert ist der Unterschied zwischen den Bewegungsgrössen der materiellen Punkte des Systemes gerade vor und eben nach der Wirkung der Impulse gleich dem Momente der Impulse.

Das Moment der Bewegungsgrösse eines um einen festen Punkt sich bewegenden Körpers ist bezüglich der Abscissenaxe, wenn δm die Masse eines materiellen Punktes des Systemes bezeichnet,

$$\Sigma \delta m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = C_1.$$

Nun ist aber $\frac{dz}{dt} = \Omega_x y - \Omega_y x$, $\frac{dy}{dt} = \Omega_z x - \Omega_x z$, folglich

$$\Sigma \delta m (y^2 + z^2) . \Omega_x - \Sigma (\delta m x y) . \Omega_y - \Sigma (\delta m x z) . \Omega_z = C_1.$$

Daher erhalten wir für das Moment der Impulsivkräfte um dieselbe Axe

$$\Sigma \delta m (y^2 + z^2) . (\Omega_x' - \Omega_x) - \Sigma (\delta m x y) . (\Omega_y' - \Omega_y) - \Sigma (\delta m x z) . (\Omega_z' - \Omega_z) = C'$$

oder, mit $(\Omega_x' - \Omega_x) = \omega_x$, $(\Omega_y' - \Omega_y) = \omega_y$, $(\Omega_z' - \Omega_z) = \omega_z$,

$$\omega_x . \Sigma \delta m (y^2 + z^2) - \omega_y . \Sigma (\delta m x y) - \omega_z \Sigma (\delta m x z) = C'.$$

Weil aber $\Sigma \delta m (y^2 + z^2) = A =$ dem Trägheitsmomente für die Abscissenaxen ist, so folgt für die Bewegung des Körpers augenblicklich nach dem Stosse offenbar das Gleichungensystem

$$\left.\begin{aligned} A \omega_x &= \omega_y \Sigma (\delta m x y) + \omega_z \Sigma (\delta m x z) + L \\ B \omega_y &= \omega_z \Sigma (\delta m y z) + \omega_x \Sigma (\delta m x y) + M \\ C \omega_z &= \omega_x \Sigma (\delta m x z) + \omega_y \Sigma (\delta m y z) + N \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Sind die Coordinatenaxen zugleich die Hauptaxen des Systemes, dann nehmen diese Gleichungen die einfache Gestalt an

$$A \omega_x = L, \qquad B \omega_y = M, \qquad C \omega_z = N. \qquad (2)$$

Wenn die Werte von ω_x, ω_y, ω_z bekannt sind, so können wir den Druck auf den festen Punkt bestimmen. Nach dem Prinzipe von D'Alembert ist die Änderung der linearen Bewegungsgrösse des Körpers in irgend einer Richtung gleich der Summe der Projektionen der Impulsivkräfte auf diese Richtung. Folglich ist, wenn F, G, H die Componenten des Druckes auf den festen Punkt des Körpers und X, Y, Z diejenigen der äusseren Kräfte parallel zu den Coordinatenaxen sind,

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma X + F &= m\frac{d\bar{x}}{dt} = m(\omega_y . \bar{z} - \omega_z . \bar{y}),\\
\Sigma Y + G &= m\frac{d\bar{y}}{dt} = m(\omega_z . \bar{x} - \omega_x . \bar{z}),\\
\Sigma Z + H &= m\frac{d\bar{z}}{dt} = m(\omega_x . \bar{y} - \omega_y . \bar{x}).
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

5. Eine Platte von der Gestalt eines Kreisquadranten, welche mit einem Endpunkte ihres Bogens fest ist, wird in dem anderen Endpunkte ihres Bogens senkrecht zu ihrer Ebene von einem Schlage getroffen. Welches ist die Lage der Momentanaxe?

Wir nehmen den festen Punkt als Coordinatenursprung, legen in der Ebene der Platte die Axe der x durch den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, so dass die Axe der y mit der Tangente an den Bogen zusammenfällt und die Axe der z senkrecht zu der Ebene der Platte ist. P bezeichne die Stosskraft, a den Halbmesser des Kreises.

In dem gegenwärtigen Falle reduzieren sich die Gleichungen (1) des allgemeinen Problemes auf

$$A . \omega_x = \omega_y . \Sigma(\delta m x y) + P a, \quad B . \omega_y = \omega_x . \Sigma(\delta m x y) - P a, \quad C . \omega_z = 0.$$

Wählen wir nun μ als Masseneinheit der Lamina, so wird

$$\begin{aligned}
\Sigma(\delta m x y) &= \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r\, d\vartheta\, dr (a - r\cos\vartheta) r \sin\vartheta\\
&= \frac{1}{12}\mu a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - 3\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta,
\end{aligned}$$

$$\Sigma(\delta m x y) = \frac{5}{24}\mu a^4.$$

$$A = \frac{1}{4}a^2 . \frac{1}{4}\mu\pi a^2 = \frac{1}{16}\pi\mu a^4.$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \mu r\, d\vartheta\, dr . x^2 = \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r\, d\vartheta\, dr (a - r\cos\vartheta)^2,$$

$$B = \frac{1}{24}\mu a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (15 - 16\cos\vartheta + 3\cos 2\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{48}\mu a^4 (15\pi - 32).$$

Mit diesen Werten erhalten wir

$$\frac{1}{16}\pi\mu a^4 \omega_x = \frac{5}{24}\mu a^4 \omega_y + P a, \quad \frac{1}{48}\mu a^4 \omega_y (15\pi - 32) = \frac{5}{24}\mu a^4 \omega_x - P . a,$$

woraus folgt

$$(15\pi - 42)\,\omega_y = (10 - 3\pi)\,\omega_x,$$

und daher ist, wenn φ die Neigung der Momentanaxe zu der Axe der x bezeichnet,

$$tg\,\varphi = \frac{10 - 3\pi}{15\pi - 42}.$$

Walton, p. 593.

6. Eine homogene, von einem Parabelbogen OM (Figur 163), dessen Axe ON, dessen Ordinate NM ist, begrenzte Platte ist mit ihrem Scheitel befestigt. Die Platte empfängt einen Stoss P senkrecht zu ihrer Ebene in dem anderen Endpunkte M des begrenzenden Bogens. Welches ist die anfängliche Bewegung?

Figur 163.

Es sei die Gleichung der Parabel $y^2 = 4px$, die Axe der z senkrecht zu der Ebene der Platte in ihrer Anfangslage, μ die Masse der Flächeneinheit, m die Masse der ganzen Platte, $ON = c$.

Im vorliegenden Falle haben wir $\Sigma(\delta m x z) = 0$, $\Sigma(\delta m z y) = 0$,

$$\Sigma(\delta m x y) = \mu \iint x y \, dx \, dy = \mu \int_0^c x \frac{y^2}{2} dx = 2\mu \int_0^c p x^2 \, dx$$
$$= \frac{2}{3} \mu p c^3 = \frac{m}{2} \sqrt{p c^3}.$$

Die Trägheitsmomente für die Coordinatenaxen sind

$$A = \frac{1}{3} \mu \int_0^c y^3 \, dx = \frac{16}{15} \mu p^{\frac{3}{2}} . c^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} m p c,$$

$$B = \mu \int_0^c x^2 y \, dx = \frac{4}{7} \mu \sqrt{p c^7} = \frac{3}{7} m c^2,$$

$$C = A + B = m c \left(\frac{4}{5} p + \frac{3}{7} c\right).$$

Die Momente der Stosskraft um die Coordinatenaxen sind

$$L = 2P\sqrt{pc}, \quad M = -Pc, \quad N = 0.$$

Daher erhalten wir

$$A\omega_x = \frac{2}{3}\mu p c^3 \omega_y + 2P\sqrt{pc}, \quad B\omega_y = \frac{2}{3}\mu p c^3 \omega_x - Pc, \quad C\omega_z = 0,$$

oder

$$\frac{16}{15}\mu \sqrt{p^3 c^5} . \omega_x - \frac{2}{3}\mu p c^3 \omega_y = 2P\sqrt{pc},$$

$$\frac{4}{7}\mu \sqrt{p c^7} . \omega_y - \frac{2}{3}\mu p c^3 \omega_x = -Pc, \quad \omega_z = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Winkelgeschwindigkeiten ω_x, ω_y bestimmen. Die Elimination von P giebt

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{7}{25} \cdot \frac{2\sqrt{pc}}{c}.$$

Die Axe OQ, um welche die Platte beginnt sich zu drehen, schliesst daher mit der Abscissenaxe den Winkel ϑ ein, welcher durch die Gleichung gegeben ist

$$tg\,\vartheta = \frac{7}{25}\cdot\frac{2\sqrt{pc}}{c}.$$

Folglich ist $NQ = \frac{7}{25}\cdot NP$. Die resultierende Winkelgeschwindigkeit ist

$$\omega = \sqrt{\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2} = \frac{75}{26}\cdot\frac{P}{\mu p c^3}\cdot OQ.$$

Routh, Dynamics, p. 241.

7. Ein freier Körper bewegt sich um seinen Schwerpunkt, welcher in Ruhe ist; plötzlich wird ein gegebener Punkt des Körpers fest. Welches ist die Lage der Momentanaxe in dem nachfolgenden Augenblicke, wenn die Bewegung augenblicklich vorher bekannt ist?

Es seien h, k, l die Coordinaten des gegebenen Punktes, bezogen auf SX', SY', SZ', die Hauptaxen durch den Schwerpunkt S des Körpers, ω_x, ω_y, ω_z die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen SX', SY', SZ' in dem Augenblicke vor dem Festwerden des gegebenen Punktes, Ω_x, Ω_y, Ω_z diejenigen um parallele Axen durch diesen Punkt, augenblicklich nach dem Festwerden, A', B', C' die Trägheitsmomente um SX', SY', SZ' und A, B, C diejenigen um die parallelen Axen.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir die Gleichungen

$$A'\omega_x = A\,\Omega_x - \Sigma(\delta m\,xy)\,\Omega_y - \Sigma(\delta m\,xz)\,\Omega_z,$$
$$B'\omega_y = B\,\Omega_y - \Sigma(\delta m\,yz)\,\Omega_z - \Sigma(\delta m\,yx)\,\Omega_x,$$
$$C'\omega_z = C\,\Omega_z - \Sigma(\delta m\,zx)\,\Omega_x - \Sigma(\delta m\,zy)\,\Omega_y.$$

Bezeichnen a, b, c die Hauptträgheitshalbmesser für den Schwerpunkt und ist μ die Masse des Körpers, dann haben wir

$$A = \Sigma\{\delta m\,(y^2 + z^2)\} = \Sigma\,\delta m\,\{(y'-k)^2 + (z'-l)^2\}$$
$$= \Sigma\,\delta m\,\{y'^2 + z'^2 - 2ky' - 2lz' + k^2 + l^2\} = \mu(a^2 + k^2 + l^2),$$
$$\Sigma(\delta m\,xy) = \Sigma\{\delta m\,(x'-h)(y'-k)\}$$
$$= \Sigma\{m\,(x'y' - hy' - kx' + hk)\} = \mu hk,$$

folglich ist $\quad a^2\omega_x = (a^2 + k^2 + l^2)\,\Omega_x - hk\,\Omega_y - hl\,\Omega_z.$

In gleicher Weise ergiebt sich

$$b^2\omega_y = (b^2 + l^2 + h^2)\,\Omega_y - kl\,\Omega_z - kh\,\Omega_x,$$
$$c^2\omega_z = (c^2 + h^2 + k^2)\,\Omega_z - lh\,\Omega_x - lk\,\Omega_y.$$

Durch Multiplikation übers Kreuz und einige Transformationen werden wir finden, dass — wenn $r^2 = h^2 + k^2 + l^2$ gesetzt wird —

$$\Omega_x\{(r^2+a^2)(r^2+b^2)(r^2+c^2) - h^2(r^2+b^2)(r^2+c^2) - k^2(r^2+c^2)(r^2+a^2)$$
$$- l^2(r^2+a^2)(r^2+b^2)\}$$
$$= hr^2(ha^2\omega_x + kb^2\omega_y + lc^2\omega_z) + a^2\omega_x\{h^2(b^2+c^2) + b^2k^2 + c^2l^2 + b^2c^2\}$$
$$+ b^2c^2h(k\omega_y + l\omega_z).$$

In gleicher Weise finden wir die Formeln für Ω_y, Ω_z, dieselben können aber auch sofort angeschrieben werden, wir haben nur nötig, die entsprechenden Buchstabenvertauschungen in der Formel für Ω_x vorzunehmen, mit welcher sie symmetrisch sind.

Mit Hilfe obiger Resultate können wir leicht die folgende Relation erhalten

$$h\,\Omega_x + k\,\Omega_y + l\,\Omega_z = \frac{\dfrac{a^2 h\,\omega_x}{r^2+a^2} + \dfrac{b^2 k\,\omega_y}{r^2+b^2} + \dfrac{c^2 l\,\omega_z}{r^2+c^2}}{1 - \dfrac{h^2}{r^2+a^2} - \dfrac{k^2}{r^2+b^2} - \dfrac{l^2}{r^2+c^2}}.$$

8. Ein Punkt eines rotierenden, starren Körpers ist fest. Der Körper empfängt einen Stoss von gegebener Grösse in der Richtung nach einem gegebenen Punkte des Körpers. Unter welcher Bedingung steht die Momentanaxe nach dem Stosse senkrecht auf der Momentanaxe vor derselben?

Die Coordinatenaxen mögen in dem zu betrachtenden Zeitpunkte mit den Hauptaxen des festen Punktes zusammenfallen. h, k, l seien die Coordinaten des gegebenen Punktes des Körpers, X, Y, Z die Componenten des Stosses, A, B, C die Hauptträgheitsmomente für den festen Punkt, ω_x', ω_y', ω_z' die Componenten der durch den Stoss erzeugten Winkelgeschwindigkeit, ω_1, ω_2, ω_3 die Componenten der Winkelgeschwindigkeit in dem Augenblicke vor dem Stosse, ω_x, ω_y, ω_z die Componenten der Winkelgeschwindigkeit in dem Augenblicke nach dem Stosse.

Damit sind die Bewegungsgleichungen

$$A\,\omega_x' = Yl - Zk, \qquad B\,\omega_y' = Zh - Xl, \qquad C\,\omega_z' = Xk - Yh,$$
$$\omega_x = \omega_1 + \omega_x', \qquad \omega_y = \omega_2 + \omega_y', \qquad \omega_z = \omega_3 + \omega_z'.$$

Demnach erhalten wir

$$A\,\omega_x = A\,\omega_1 + Yl - Zk, \qquad B\,\omega_y = B\,\omega_2 + Zh - Xl,$$
$$C\,\omega_z = C\,\omega_3 + Xk - Yh.$$

Folglich sind die Gleichungen der Momentanaxe unmittelbar nach dem Stosse

$$\frac{Ax}{A\,\omega_1 + Yl - Zk} = \frac{By}{B\,\omega_2 + Zh - Xl} = \frac{Cz}{C\,\omega_3 + Xk - Yh}.$$

Damit diese Rotationsaxe rechtwinkelig zu der Momentanaxe unmittelbar vor dem Stosse sein kann, muss die Bedingung erfüllt werden

$$\frac{\omega_1}{A}(A\,\omega_1 + Yl - Zk) + \frac{\omega_2}{B}(B\,\omega_2 + Zh - Xl)$$
$$+ \frac{\omega_3}{C}(C\,\omega_3 + Xk - Yh) = 0.$$

Sind x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Linie der Wirkung des Stosses, bezogen auf Coordinatenaxen, welche durch den Punkt (h, k, l) gehen und parallel zu den Hauptaxen des Körpers für den festen Punkt sind, dann haben wir, wenn R die Intensität des Stosses bezeichnet,

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

und daher, $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega^2$ setzend,

$$\frac{\omega^4}{R^2}(x^2 + y^2 + z^2) = \left\{\frac{\omega_1}{A}(l y - k z) + \frac{\omega_2}{B}(h z - l x) + \frac{\omega_3}{C}(k x - h y)\right\}^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Ort der Richtung des Stosses ein gerader Kreiskegel sein muss, seine geometrische Axe besitzt die Gleichungen

$$\frac{1}{x}\left(\frac{l\omega_2}{B} - \frac{k\omega_3}{C}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{h\omega_3}{C} - \frac{l\omega_1}{A}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{k\omega_1}{A} - \frac{h\omega_2}{B}\right).$$

Weil $h\left(\frac{l\omega_2}{B} - \frac{k\omega_3}{C}\right) + k\left(\frac{h\omega_3}{C} - \frac{l\omega_1}{A}\right) + l\left(\frac{k\omega_1}{A} - \frac{h\omega_2}{B}\right) = 0$

ist, so folgt, dass die Axe dieses Kegels senkrecht auf der geraden Linie steht, welche den gegebenen Punkt des Körpers mit dem festen Punkte desselben verbindet.

9. Ein gegebener Punkt eines starren, ruhenden Körpers ist fest. Die Lage einer in dem Körper festen, durch diesen Punkt gehenden Axe soll so bestimmt werden, dass der Körper die grösstmögliche lebendige Kraft erlangen kann, wenn er durch einen gegebenen Stoss getroffen wird.

Lasse sein L, M, N die Componenten des Momentes des Stosses um den gegebenen Punkt in Relation zu den Hauptaxen für den gegebenen Punkt, l, m, n die Richtungscosinus der festen Axe, A, B, C die Hauptträgheitsmomente.

Die dem Körper durch den Stoss mitgeteilte Winkelgeschwindigkeit ist gleich

$$\frac{Ll + Mm + Nn}{Al^2 + Bm^2 + Cn^2},$$

und daher wird die erlangte lebendige Kraft gleich sein

$$\frac{(Ll + Mm + Nn)^2}{Al^2 + Bm^2 + Cn^2}.$$

Setzen wir $l = \frac{L}{A} + u$, $m = \frac{M}{B} + v$, $n = \frac{N}{C} + w$, dann geht der Zähler in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft über in

$$\left(\frac{L^2}{A}+\frac{M^2}{B}+\frac{N^2}{C}\right)\left(\frac{L^2}{A}+\frac{M^2}{B}+\frac{N^2}{C}+2Lu+2Mv+2Nw+Au^2 + Bv^2+Cw^2\right)$$

$$-\left(\frac{L^2}{A}+\frac{M^2}{B}+\frac{N^2}{C}\right)(Au^2+Bv^2+Cw^2)+(Lu+Mv+Nw)^2$$

und der Nenner nimmt die Gestalt an

$$A\left(\frac{L}{A}+u\right)^2+B\left(\frac{M}{B}+v\right)^2+C\left(\frac{N}{C}+w\right)^2=\frac{L^2}{A}+\frac{M^2}{B}+\frac{N^2}{C} +2Lu+2Mv+2Nw+Au^2+Bv^2+Cw^2.$$

Folglich ist die lebendige Kraft gleich

$$\frac{L^2}{A}+\frac{M^2}{B}+\frac{N^2}{C} - \frac{\left\{Nv\sqrt{\frac{B}{C}}-Mw\sqrt{\frac{C}{B}}\right\}^2+\left\{Lw\sqrt{\frac{C}{A}}-Nu\sqrt{\frac{A}{C}}\right\}^2+\left\{Mu\sqrt{\frac{A}{B}}-Lv\sqrt{\frac{B}{A}}\right\}^2}{A\left(\frac{L}{A}+u\right)^2+B\left(\frac{M}{B}+v\right)^2+C\left(\frac{N}{C}+w\right)^2}.$$

Dieses Resultat zeigt, dass die lebendige Kraft am grössten ist, wenn u, v, w, daher wenn l, m, n proportional $\frac{L}{A}$, $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$ sind. Mithin fällt die feste Axe für das Maximum von lebendiger Kraft mit der Linie zusammen, welche die Momentanaxe des Körpers gewesen sein würde, wenn er sich frei ohne irgend welchen Zwang, ausser dem dem festen Punkte zu verdankenden, hätte bewegen können. Euler's Theorem.

Lagrange, Mécanique Analytique, Tom. I, p. 294. Thomson and Tait, Natural Philosophy, Vol. I, p. 216.

7—9. Walton, p. 594—598.

10. Wie müssen die auf einen freien, ruhenden Würfel einwirkenden Impulse beschaffen sein, damit ipso motus initio eine Diagonale des Würfels in Ruhe bleiben kann?

Es seien X, Y, Z die Componenten der resultierenden Stosskraft durch den Schwerpunkt O des Würfels, entlang rechtwinkeligen zu den Würfelkanten parallelen Axen OX, OY, OZ, L, M, N die Componenten des Resultantenpaares um diese Axen. Die Gleichung der fest bleibenden Diagonale ist $x=y=z$, und wir werden finden

$$X=Y=Z=0, \qquad L=M=N.$$

Diese Resultate zeigen, dass die resultierende Stosskraft gleich Null, dass die Ebene des resultierenden Paares rechtwinkelig zu der ruhenden Diagonale sein muss.

11. Wie müssen die Impulse, welche auf einen freien, ruhenden Würfel wirken, beschaffen sein, damit eine seiner Kanten einen Augenblick in Ruhe bleibt?

Bezeichnet $2a$ die Länge einer Würfelkante, so sind die Gleichungen der ruhenden Kante $y=a$, $z=a$, und für die Kräfte ergeben sich die Relationen

$$X = 0, \qquad M = N = 0, \qquad Y = \frac{3}{2}\frac{L}{a}, \qquad Z = -\frac{3}{2}\frac{L}{a}.$$

Diese Resultate zeigen, dass die resultierende Kraft rechtwinkelig zu der Diagonalebene durch die ruhende Kante und die Ebene des resultierenden Paares senkrecht zu dieser Kante sein muss.

12. Ein Würfel wird von drei Impulsen getroffen, welche entlang dreier Kanten wirken, die sich weder schneiden noch parallel sind. Ist hier augenblicklich nach dem Stosse eine Momentanaxe vorhanden oder nicht?

Hier giebt es keine Momentanaxe in einem endlichen Abstande von dem Körper.

Griffin, Solutions of the Examples on the Motion of a rigid body, p. 57.

13. Eine Platte von der Form einer Halbellipsenfläche, mit der kleinen Axe als Begrenzungslinie, ist um den Mittelpunkt, als einen festen Punkt, beweglich und fällt aus der Lage, in welcher ihre Ebene horizontal ist.

1) Bestimme den Impuls, welcher dem Schwerpunkte bei vertikaler Lage der Platte mitgeteilt werden muss, damit sie zur Ruhe zurückkehrt. 2) Wenn diese Kraft senkrecht zu der Platte in dem Endpunkte einer Ordinate durch den Schwerpunkt mitgeteilt wird, anstatt in dem Schwerpunkte selbst zu wirken, die Lage der Rotationsaxe in dem Momente nachher zu ermitteln.

Bezeichnet m die Masse der Ellipse, dann ist der gesuchte Impuls gleich $m\sqrt{\frac{3}{8}\pi g a}$, die verlangte Axe ist die grosse Axe.

Mackenzie and Walton, Solutions of the Cambridge Problems for 1854.

14. Der Eckpunkt A einer dreieckigen Platte ABC ist fest. Bei B oder C wird rechtwinkelig zu der Ebene der Lamina ein Stoss ausgeübt. Welches ist die Lage der Momentanaxe?

Die Momentanaxe geht durch einen der Dreiteilungspunkte von BC.

15. Eine quadratische Platte bewegt sich frei um eine Diagonale mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit. Eines der Enden der anderen Diagonale wird plötzlich fest. Welches ist die Pressung auf den festen Punkt und die momentane Winkelgeschwindigkeit?

Ist ω die gegebene Winkelgeschwindigkeit, m die Masse der Platte, c die Länge einer Halbdiagonale, dann ist der impulsive Druck und die momentane Winkelgeschwindigkeit bezw. gleich $\frac{1}{7} m c \omega$ und $\frac{1}{7}\omega$.

16. Eine quadratische Platte, von welcher ein Eckpunkt fest ist, wird von zwei Stössen getroffen, der eine wirkt entlang einer Seite, die nicht in dem festen Punkte endigt, der andere senkrecht zu der Ebene der Platte in einem Eckpunkte, welcher nicht mit dem festen Eckpunkte zusammenfällt und nicht in der Richtung des ersten Stosses liegt. Welches ist die Lage der Momentanaxe unmittelbar nach dem Stosse und die Lage der invariablen Ebene?

Es sei die Seite, die in dem festen Punkte endigt und senkrecht zu der Richtung des ersten Stosses ist, die Axe der x, die andere durch den festen Punkt gehende Seite die Axe der y, so dass die Axe der z senkrecht zu der Ebene der Platte ist, dann sind die Gleichungen der Momentanaxe

$$x:y:z = 32:24:7,$$

und die Gleichung der invariablen Ebene ist

$$16x + 12y + 7z = 0.$$

17. Eine rechtwinkelige Platte mit festem Mittelpunkte wird senkrecht an einem Punkte in einer gegebenen Linie durch ihren Schwerpunkt gestossen. Welches ist die Lage der Momentanaxe?

Lasse sein 2α den Winkel zwischen den Diagonalen des Rechteckes, β die Neigung der gegebenen Linie zu einer seiner Seiten, ϑ die Neigung der verlangten Axe zu derselben Seite, dann werden wir finden

$$tg\,\vartheta = \frac{tg^2\,\alpha}{tg\,\beta}.$$

Griffin, ib., p. 57.

18. Eine freie, rechtwinkelige Platte wird in einem gegebenen Punkte senkrecht gestossen. Welches ist die Lage der Momentanaxe?

Lasse sein a, b die Längen der Seiten der Lamina, die Geraden OX, OY durch den Schwerpunkt O und parallel zu diesen Seiten Coordinatenaxen, h, k die Coordinaten des gegebenen Punktes, dann ist die Gleichung der verlangten Momentanaxe

$$\frac{hx}{a^2} + \frac{ky}{b^2} + \frac{1}{12} = 0.$$

Griffin, ib., p. 57.

19. Eine kreisförmige Platte vom Halbmesser a dreht sich um einen Durchmesser mit der Winkelgeschwindigkeit ω, sie wird von einem senkrecht zu ihrer Ebene gerichteten Stosse getroffen, in dem einen Endpunkte desjenigen Diameters, welcher senkrecht zu dem ersteren ist, und hat dann die Winkelgeschwindigkeit ω'. Welches ist der Abstand zwischen der ursprünglichen und der letzteren Rotationsaxe?

Der verlangte Abstand ist gleich $\frac{a}{4} \cdot \frac{\omega' - \omega}{\omega'}$.

Griffin, ib., p. 58.

10—19. Walton, p. 599—601.

20. Ein aus vier gleichförmigen, mit ihren Enden durch Charniere verbundenen Stäben gebildetes Rechteck dreht sich um seinen Mittelpunkt auf einer glatten, horizontalen Ebene mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit. Plötzlich wird ein Punkt in einer der Seiten fest. Bestimme die Winkelgeschwindigkeit einer der Seiten, welche der den festen Punkt enthaltenden Seite benachbart sind in dem Augenblicke, nachdem der Punkt fest geworden ist.

Wenn $2a =$ der Länge der Seite, von welcher ein Punkt fest wird, $2b =$ der Länge einer anstossenden Seite und ω die gegebene Winkelgeschwindigkeit des Rechteckes ist, so ist die verlangte Winkelgeschwindigkeit gleich

$$\frac{3a + b}{6a + 4b} \cdot \omega.$$

21. Ein vollkommen unelastisches und glattes Ellipsoid mit den Halbaxen a, b, c dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe c und stösst auf eine ruhende Kugel von gleicher Grösse mit der Geschwindigkeit v. In dem Augenblicke vor der Collision liegt die Halbaxe a in der Richtung der Bewegung des Schwerpunktes des Ellipsoides. In dem Augenblicke des Stosses berührt die Kugel das Ellipsoid in dem Endpunkte des Parameters seines a und b enthaltenden Hauptschnittes

und ist die Excentrizität dieses Hauptschnittes gleich $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Bestimme die Relation zwischen v und ω so, dass das Ellipsoid nach der Collision nicht rotiert.

Die verlangte Relation ist

$$\frac{v}{\omega} = 2a.$$

20—21. Walton, p. 616.

22. Ein starrer Körper wird von einem Stosspaare getroffen. Welches ist der Maximalwert des Winkels zwischen der Axe des Paares und der Axe, um welche der Körper zu rotieren beginnen wird?

Der Cosinus des Maximalwertes des Winkels ist gleich

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{B}{C}}+\sqrt{\frac{C}{B}}}, \quad \frac{2}{\sqrt{\frac{C}{A}}+\sqrt{\frac{A}{C}}}, \quad \frac{2}{\sqrt{\frac{A}{B}}+\sqrt{\frac{B}{A}}},$$

wo A, B, C die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt sind.

23. Ein ruhendes Ellipsoid wird durch ein System von Stössen getroffen, die Resultanten derselben sind eine durch den Schwerpunkt gehende Kraft mit dem Richtungscosinus l, m, n und ein Paar, dessen Axe die Richtungscosinus λ, μ, ν besitzt. Welches ist das Verhältnis der Geschwindigkeit der Spontanaxe zu der Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Ellipsoides?

Das verlangte Verhältnis ist gleich

$$\frac{\frac{l\lambda}{b^2+c^2}+\frac{m\mu}{c^2+a^2}+\frac{n\nu}{a^2+b^2}}{\left\{\frac{\lambda^2}{(b^2+c^2)^2}+\frac{\mu^2}{(c^2+a^2)^2}+\frac{\nu^2}{(a^2+b^2)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

21 u. 22. Walton, p. 601 u. 602.

Fünfter Abschnitt.

Die Oberflächen der auf einander stossenden Körper sind rauh.

1. Ein sphärischer Ball bewegt sich ohne Rotation auf einer glatten, horizontalen Ebene und stösst mit einer Geschwindigkeit V gegen eine rauhe, vertikale Ebene, deren Reibungscoëfficient μ ist. Die Einfallslinie der Bewegung des Schwerpunktes macht mit der Normalen zu der vertikalen Fläche einen Winkel α. Wie ist die Bewegung augenblicklich nach dem Stosse beschaffen?

Lasse sein u, v die Componenten der Geschwindigkeit des Mittelpunktes des Balles parallel und senkrecht zu der vertikalen Ebene und positiv genommen in dem Augenblicke vor dem Stosse, dann ist $u = V\sin\alpha$, $v = V\cos\alpha$, ferner u', v' die Componenten der Geschwindigkeit des Mittelpunktes in irgend einem Augenblicke während des Stosses nach denselben

Richtungen, ω' die Winkelgeschwindigkeit in diesem Zeitmomente. Damit erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$u' - u = -\frac{F}{m}, \quad v' - v = -\frac{R}{m}, \quad \omega' = \frac{Fa}{mk^2}.$$

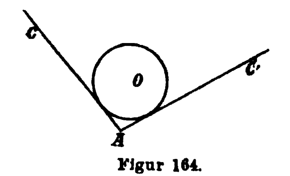
Wenn die Bewegung zu der Zeit betrachtet wird, in welcher die Tangentialgeschwindigkeit des Berührungspunktes verschwindet, so haben wir $u' - a\omega' = 0$. Dieses giebt, weil $k^2 = \frac{2}{5}a^2$ ist, $F = \frac{2}{7} m v \sin\alpha$. Weil F unabhängig von dem betrachteten Zeitpunkte ist, so sehen wir, dass keine Reibung ins Spiel kommt, nachdem die Tangentialgeschwindigkeit des Berührungspunktes in Null übergegangen ist. In dem Augenblicke grösster Compression ist die Normalgeschwindigkeit des Berührungspunktes gleich Null, folglich $v' = 0$ und $R = m v \cos\alpha$. Wenn $F < \mu R$ ist, d. h. wenn $\frac{2}{7} tg\,\alpha < \mu$, so werden dieses die richtigen Werte von F und R sein und durch Substitution derselben in die obigen Gleichungen können wir die Bewegung der Kugel finden. Aber wenn $\frac{2}{7} tg\,\alpha > \mu$ ist, so wird sich die Kugel unmerklich von der vertikalen Ebene trennen, ehe ein genügender Reibungswiderstand hervorgerufen worden ist, um die Tangentialgeschwindigkeit des Berührungspunktes in Null überzuführen. In diesem Falle müssen wir F durch μR in den Gleichungen ersetzen. In dem Augenblicke grösster Compression haben wir wie vorher $v' = 0$, was $R = m v \cos\alpha$ giebt. Durch Substitution in die Gleichungen kann die Bewegung der Kugel gefunden werden. Die Anfangsgeschwindigkeit des Berührungspunktes ist, wie leicht zu sehen, $u' - a\omega' = v(\sin\alpha - \frac{7}{2}\mu\cos\alpha)$. Wenn diese negativ wäre, so würde die Reibung am Ende des Stosses in der Richtung relativer Bewegung wirken, was unmöglich ist. Diese Lösung ist daher nur dann korrekt, wenn $\frac{2}{7} tg\,\alpha > \mu$ ist.

Ist die Kugel unvollkommen elastisch, dann kommt eine normale Restitutionskraft $\varepsilon m v \cos\alpha$ in's Spiel. Wenn dann $\frac{2}{7} m v \sin\alpha < \mu(1+\varepsilon) m v \cos\alpha$ ist, so ist der Reibungswiderstand, welcher zur Zerstörung der Tangentialgeschwindigkeit des Berührungspunktes nötig ist, kleiner als derjenige im Grenzfalle. Unter diesen Verhältnissen können wir u', v', ω' dadurch finden, dass wir in den Bewegungsgleichungen schreiben $F = \frac{2}{7} m v \sin\alpha$, $R = (1+\varepsilon) m v \cos\alpha$. Ist $\frac{2}{7} m v \sin\alpha > \mu(1+\varepsilon) m v \cos\alpha$, so

müssen wir setzen $R = (1+\varepsilon)\, m\, v \cos\alpha$, $F = \mu(1+\varepsilon)\, m\, v \cos\alpha$, und die nämlichen Gleichungen werden nun u', v', ω' geben.

Routh, Dynamics, p. 140.

2. Ein unelastischer Kreiscylinder rollt auf einer vollkommen rauhen Ebene CA (Fig. 164) herab und trifft auf eine vollkommen rauhe Ebene $C'A$; während der Bewegung ist die Cylinderaxe stets parallel zu der Schnittlinie beider Ebenen. Mit welcher Geschwindigkeit bewirkt der Cylinder sein Hinaufsteigen auf die zweite Ebene? Wie gross ist der Grenzwinkel der Neigung beider Ebenen, für den ein Hinaufrollen überhaupt möglich ist?



Figur 164.

Es sei $\measuredangle\, C A C' = \alpha$, $k =$ dem Trägheitsradius des Cylinders um seine Axe, $a =$ seinem Halbmesser, $m =$ seiner Masse, $u =$ der Geschwindigkeit des Mittelpunktes O eines Kreisschnittes des Cylinders gerade vor dem Zusammentreffen mit $C'A$, $v =$ der Geschwindigkeit dieses Punktes augenblicklich danach, $R =$ der impulsiven Kraft der Reibung, welche in dem Augenblicke des Stosses von der Ebene $C'A$ auf den Cylinder ausgeübt wird, genügend um vollkommenes Rollen zu sichern.

Für die Bewegung des Schwerpunktes des Cylinders parallel zu AC' besteht die Gleichung

$$m v = R - m u \cos\alpha, \tag{1}$$

und es ist der Wert der durch den Impuls R verursachten Abnahme der Winkelgeschwindigkeit des Cylinders um seine Axe $\frac{R a}{m k^2}$, welcher vermöge der Gleichung (1) gleich ist

$$\frac{a(v + u\cos\alpha)}{k^2}.$$

Weil die beiden Ebenen als vollkommen rauh vorausgesetzt werden, so ist $\frac{u}{a}$ die Winkelgeschwindigkeit vor, $\frac{v}{a}$ diejenige unmittelbar nach dem Zusammentreffen, folglich muss sein

$$\frac{u}{a} - \frac{v}{a} = \frac{a(v + u\cos\alpha)}{k^2}, \qquad u - v = \frac{a^2}{k^2}(v + u\cos\alpha),$$

aber es ist hier $a^2 = 2k^2$, mithin:

$$u - v = 2v + 2u\cos\alpha,$$

und demnach

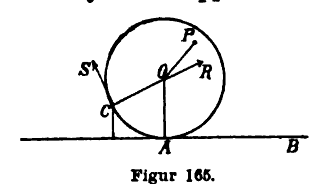
$$v = \frac{1}{3}(1 - 2\cos\alpha)\, u,$$

welche Gleichung die Geschwindigkeit giebt, mittelst der der Cylinder beginnt, die schiefe Ebene AC' hinaufzurollen.

Weil infolge der Beschaffenheit des Falles v keinen negativen Wert besitzen kann, ist sofort ersichtlich, dass ein Hinaufsteigen des Cylinders auf die Ebene AC' unmöglich ist, wenn nicht $\alpha > \frac{1}{3}\pi$ ist.

3. Ein unelastischer Kreiscylinder rollt ohne zu gleiten entlang einer Ebene und trifft auf einen vollkommen rauhen, festen Punkt; der Cylinder kommt mit dem Hindernisse so in Berührung, dass die vertikale, zu der Axe des Cylinders senkrechte Ebene durch diesen Punkt den Cylinder in zwei congruente Teile zerlegt. Welches ist der kleinste Abstand des festen Punktes von der Ebene, damit der Cylinder infolge des Stosses in den Ruhezustand übergehen kann?

Es sei ω die Winkelgeschwindigkeit des Cylinders um seine Axe unmittelbar vor, ω' diejenige eben nach dem Stosse, C der feste Punkt über den Cylinder kippen kann, a der Radius, O der Mittelpunkt des Normalschnittes des Cylinders durch C, (Fig. 165). Der Mittelpunkt O des Normalschnittes wird eine horizontale Geschwindigkeit $a\omega$ vor und eine Geschwindigkeit $a\omega'$ rechtwinkelig zu dem Radius CO gerade nach dem Stosse besitzen. Bezeichnet c den Abstand des festen Punktes C von der Ebene, auf welcher der Cylinder rollt, R die Normal-, S die Tangentialreaktion bei C, dann besteht für die Translationsbewegung rechtwinkelig zu CO die Gleichung



Figur 165.

$$m a \omega' = m a \omega \frac{a - c}{a} + S, \tag{1}$$

und für die Rotation um O

$$\frac{1}{2} m a^2 \omega' = \frac{1}{2} m a^2 \omega - S \, . \, a. \tag{2}$$

Durch die Elimination der Reaktion S aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$\omega' = \omega . \frac{3a - 2c}{3a} .$$

Dieses Resultat zeigt, dass der Cylinder über den festen Punkt rollen wird, wenn $c < \frac{3}{2} a$ ist.

Die vorliegende Aufgabe kann auch in der folgenden Weise gelöst werden.

Die Bewegung des Cylinders in dem Augenblicke vor dem Stosse besteht aus zwei Teilen, der eine ist eine Translation mit der Geschwindigkeit $a\omega$, der andere eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Es sei P ein beliebiger Punkt des Kreisschnittes durch C, $OP = r$,

$\vartheta =$ der Neigung von OP zu CO, φ dessen Neigung zu der horizontalen Linie AB, dann ist das Moment der Bewegungsgrösse des Kreisschnittes um C, hervorgehend aus der Rotation, gleich

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \varrho\, r\, d\vartheta\, dr \,.\, r\,\omega\,(r + a\cos\vartheta) = \varrho\,\omega \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2\, d\vartheta\, dr\,(r + a\cos\vartheta)$$

$$= \varrho\,\omega\, a^4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cos\vartheta\right) d\vartheta = \frac{1}{2}\pi\,\varrho\,\omega\, a^4.$$

Das der Translation zu verdankende Moment der Bewegungsgrösse ist gleich

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} a\,\omega\,\varrho\, r\, d\varphi\, dr\,(r\sin\varphi + a - c) = a^3\omega\varrho \int_0^{2\pi} \left\{\frac{1}{3}a\sin\varphi + \frac{1}{2}(a-c)\right\} d\varphi$$

$$= \pi\,\varrho\,\omega\, a^3\,(a - c).$$

Folglich ist das ganze Moment gleich

$$\frac{1}{2}\pi\,\varrho\,\omega\, a^3\,(3\,a - 2\,c).$$

Dieses Moment wird nur dann positiv, wenn $\frac{3}{2}a > c$ ist, daher kann der Cylinder nur dann durch das Hindernis in den Ruhezustand übergeführt werden, wenn c nicht kleiner als $\frac{3}{2}a$ ist.

2 u. 3. Walton, p. 616—619.

4. Ein Cricketball ist in Rotation um eine horizontale Axe in der vertikalen Bewegungsebene mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_1 versetzt. Wenn derselbe auf den Grund stösst, so bewegt sich sein Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit V in einer den Winkel α mit dem Horizonte einschliessenden Richtung. Welches ist die daraus hervorgehende Bewegung?

Wir nehmen die Normale zu dem Grunde in dem Berührungspunkte von Ball und Boden zur Zeit des Aufschlages als Axe der z, die Axe der x in der Ebene der Bewegung vor dem Stosse. Lasse sein ω_1', ω_2', ω_3' die Winkelgeschwindigkeiten des Balles um die zu den Axen parallelen Durchmesser augenblicklich nach dem Stosse, u', v', w' die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes, Z die Normalreaktion des Bodens, X, Y die friktionalen Impulsivwirkungen, positiv in der positiven Richtung der Axen, m die Masse des Balles.

Die Bewegungsgleichungen sind

$$\omega_1' - \omega_1 = \frac{Ya}{mk^2}, \qquad \omega_2' = \frac{Xa}{mk^2}, \qquad \omega_3' = 0. \tag{1}$$

$$u' - V\cos\alpha = \frac{X}{m}, \qquad v' = \frac{Y}{m}, \qquad w' + V\sin\alpha = \frac{Z}{m}. \tag{2}$$

$$u' - a\,\omega_2' = 0, \qquad v' + a\,\omega' = 0, \qquad w' = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichungen genügen in dem Augenblicke grösster Compression, aus ihnen ergiebt sich

$$X = -\frac{k^2}{a^2+k^2} m V \cos\alpha, \quad Y = -\frac{k^2}{a^2+k^2} m a \omega_1, \quad Z = m V \sin\alpha.$$

Ist ε' die friktionale, ε die normale Elastizität, dann sind diese Werte von X, Y, Z zu multiplizieren mit $(1+\varepsilon')$, $(1+\varepsilon')$, $(1+\varepsilon)$ resp., um die Kräfte X, Y, Z für einen elastischen Ball zu erhalten. Dadurch bekommen wir, indem wir diese letzteren Werte in die (1) und (2) einführen,

$$\omega_1' = \omega_1 . \frac{k^2 - a^2\varepsilon'}{a^2+k^2}, \quad \omega_2' = \frac{V a \cos\alpha}{a^2+k^2}(1+\varepsilon'), \quad \omega_3' = 0.$$

$$u' = V\cos\alpha . \frac{a^2 - k^2\varepsilon'}{a^2+k^2}, \quad v' = -\frac{a\omega_1 k^2}{a^2+k^2}, \quad w' = \varepsilon V \sin\alpha.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass der Ball nach dem Stosse sich nicht in derselben vertikalen Ebene wie vorher bewegen wird, es sei denn $\omega_1 = 0$. Ist ϑ der Winkel, welchen die zwei vertikalen Bewegungsebenen vor und nach dem Stosse einschliessen, dann haben wir $tg\,\vartheta = \frac{v'}{u'}$, durch Substitution der Werte von v', u' und mit Rücksicht auf $k^2 = \frac{2}{5}a^2$ wird

$$tg\,\vartheta = -\frac{2a\omega_1}{V\cos\alpha} . \frac{1+\varepsilon'}{5-2\varepsilon'}.$$

5. Eine vollkommen rauhe, horizontale Platte dreht sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine vertikale Axe, plötzlich wird ein Cylinder mit seiner ebenen Basis sanft auf die Platte gestellt. Welches ist die anfängliche Bewegung des Cylinders?

Hier wird offenbar eine impulsive Reibung zwischen der Cylinderbasis und der Platte stattfinden, und weil jeder Punkt der Basis die vollkommen rauhe Ebene berührt, so kann hier anfangs keine Rotation um eine vertikale Axe eintreten. Der Cylinder wird beginnen, sich um die Tangente in irgend einem unbekannten Punkte P des Umfanges der Basis zu drehen. Offenbar müssen der resultierende impulsive Druck auf die Ebene und die resultierende impulsive Reibung in durch den Punkt P gehenden Richtungen wirken. Weil der Cylinder anfangs keine Winkelgeschwindigkeit um seine Axe besitzt, so muss die Richtung der resultierenden Reibung durch den Mittelpunkt C der Basis gehen. Es sei R die Normalreaktion in P und F die resultierende entlang den Radius CP wirkende Reibung, ω die anfängliche Winkelgeschwindigkeit um die Tangente in P; u, v seien die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes S des Cylinders parallel und senkrecht zu CP. Die vertikale Axe, um welche die Platte rotiert, schneide die letztere in O, OC

sei $= c$, und der noch unbekannte Radius CP schliesse mit CO einen Winkel ϑ ein, so dass $\sphericalangle OCP = \vartheta$. Ferner sei $CS = h$, $CP = a$, Mk^2 das Trägheitsmoment des Cylinders um irgend eine horizontale Axe durch S. Damit sind die dynamischen Gleichungen

$$Mu = F, \quad Mv = R, \quad Mk^2\omega = -Fh - Ra.$$

Die Anfangsbewegung des Punktes P des Cylinders ist dieselbe wie die des Punktes P der Platte. Die Geschwindigkeit des Punktes P des Cylinders ist gleich $u - h\omega$ in der Richtung des Halbmessers CP. Die Geschwindigkeit des Punktes P der Platte ist gleich $\Omega . OP$, ihre Richtung ist senkrecht zu OP. Folglich ist der Halbmesser CP senkrecht zu OP, daher ist die Axe, um welche der Cylinder sich zu drehen beginnt, die von O an den Umfang der Basis gezogene Tangente. Weil nun $OP = c \sin\vartheta$, so haben wir die Relation

$$u - h\omega = -c \sin\vartheta\, \Omega.$$

Ferner ist, da der Punkt P keine vertikale Geschwindigkeit besitzt,

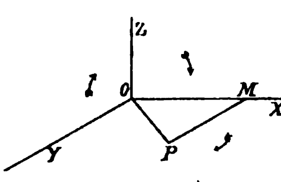
$$v - a\omega = 0.$$

Diese fünf Gleichungen genügen zur Bestimmung der Grössen u, v, ω, F und R. Durch Elimination erhalten wir

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{ch \sin\vartheta}{k^2 + h^2 + a^2},$$

womit die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Cylinders gegeben ist. Die Ermittelung der übrigen Grössen überlassen wir dem Leser.

6. Eine vollkommen rauhe Kugel befindet sich auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene. Dieser Ebene wird um eine vertikale Axe eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit erteilt. Welches ist die von der Kugel im Raume beschriebene Bahn?



Figur 166.

Lasse sein (Fig. 166) OZ die vertikale Drehhaxe der Ebene, O den Schnittpunkt von Axe und Ebene, OX, OY irgend zwei im Raume feste, horizontale, zu einander rechtwinkelige Linien, P den Berührungspunkt von Kugel und Ebene zu einer beliebigen Zeit t. Ziehe PM parallel zu YO. Ferner sei $OM = x$, $PM = y$, $a =$ dem Halbmesser der Kugel, $m =$ ihrer Masse, $mk^2 =$ ihrem Trägheitsmomente um einen Durchmesser, $\omega =$ der Winkelgeschwindigkeit der um OZ rotierenden Ebene; die Bewegung derselben erfolge in der Richtung des Pfeiles. Lasse bezeichnen X, Y die Componenten des von der Ebene auf die Kugel ausgeübten Reibungswiderstandes parallel zu den Axen OX, OY, ω_x, ω_y die Winkelgeschwindigkeiten der Kugel um zu OX, OY parallele Durchmesser in den durch die Pfeile in den Ebenen YOZ, ZOX angegebenen Richtungen.

Für die Bewegung des Schwerpunktes der Kugel haben wir die Gleichungen

$$m\frac{d^2 x}{d t^2} = X, \quad (1) \qquad m\frac{d^2 y}{d t^2} = Y, \qquad (2)$$

und für die Rotation der Kugel

$$m k^2 \frac{d \omega_x}{d t} = Y a, \quad (3) \qquad m k^2 \frac{d \omega_y}{d t} = -X a. \qquad (4)$$

Eliminieren wir aus (1) und (4) X, aus (2) und (3) Y, so kommt

$$a\frac{d^2 x}{d t^2} = -k^2 \frac{d \omega_y}{d t}, \quad (5) \qquad a\frac{d^2 y}{d t^2} = k^2 \frac{d \omega_x}{d t}. \qquad (6)$$

Durch die Integration der Gleichungen (5), (6) und Addition willkürlicher Konstanten erhalten wir

$$a\frac{d x}{d t} = C - k^2 \omega_y, \quad (7) \qquad a\frac{d y}{d t} = C' + k^2 \omega_x. \qquad (8)$$

Nun ist die lineare Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Kugel relativ zu der rauhen Ebene infolge des Rollens der Kugel parallel zu OX gleich $a\omega_y$, parallel zu OY gleich $-a\omega_x$; die der Rotation der rauhen Ebene zu verdankende Lineargeschwindigkeit ist parallel zu OX gleich $-\omega . y$, parallel zu OY gleich $\omega . x$. Dadurch ergiebt sich, weil $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ die Lineargeschwindigkeiten des Mittelpunktes der Kugel parallel zu OX, OY sind,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y + a\omega_y, \qquad \frac{dy}{dt} = \omega . x - a\omega_x.$$

Bestimmen wir jetzt aus (7), (8) die Werte von ω_y, ω_x und führen sie in diese Gleichungen ein, so kommt

$$a\frac{dx}{dt} = C - \frac{k^2}{a}\left(\omega y + \frac{dx}{dt}\right), \qquad \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{a}{k^2} C - \omega y.$$

$$a\frac{dy}{dt} = C' + \frac{k^2}{a}\left(\omega x - \frac{dy}{dt}\right), \qquad \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\frac{dy}{dt} = \frac{a}{k^2} C' + \omega x.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt, wenn wir die Zeit eliminieren,

$$(a C - k^2 \omega y)\, d y = (a C' + k^2 \omega x)\, d x.$$

Die Integration dieser Gleichung und die Addition einer willkürlichen Konstanten giebt

$$2 a C y - k^2 \omega y^2 = 2 a C' x + k^2 \omega x^2 + C''.$$

oder

$$x^2 + y^2 + \frac{2 a C'}{k^2 \omega} x - \frac{2 a C}{k^2 \omega} y + \frac{C''}{k^2 \omega} = 0. \qquad (9)$$

Wir gehen nun zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten vor. Es sei der Anfangsabstand des Mittelpunktes der Kugel von der Axe der z gleich b. Die Axe der x wählen wir so, dass sie durch die Anfangslage des Be-

rührungspunktes der Kugel mit der rauhen Ebene läuft. Dadurch haben wir, weil die anfängliche impulsive Reibung der rotierenden Ebene und der Kugel rechtwinkelig zu der Axe der x in diesem Falle ist, anfangs $\frac{dx}{dt} = 0$, $\omega_y = 0$, folglich sehen wir mit (7), dass $C = 0$ ist. Bezeichnet ferner F die impulsive Reibung in dem Augenblicke, wo die Rotation der Ebene beginnt, oder in dem Augenblicke, wo die Kugel auf die rotierende Ebene gelegt wird, sind $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, (ω_x) die Werte von $\frac{dy}{dt}$, ω_x momentan nach dem Impulse, so haben wir die Beziehungen

$$m\left(\frac{dy}{dt}\right) = F, \quad (10) \qquad m k^2 (\omega_x) = F \, . \, a. \quad (11)$$

Weil aber hier die Kugel auf der Ebene nicht gleitet, so muss offenbar sein

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = b\,\omega - a\,(\omega_x), \quad (12)$$

wo $b\,\omega$ die der Rotation der Ebene zu verdankende Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel parallel zu OX, $-a\,(\omega_x)$ die dem Rollen der Kugel entlang der Ebene zu verdankende, in der nämlichen Richtung genommene Geschwindigkeit ist. Dadurch ergiebt sich mit (10) und (12)

$$m\{b\,\omega - a\,(\omega_x)\} = F,$$

so dass mit (11)

$$a\{b\,\omega - a\,(\omega_x)\} = k^2 (\omega_x), \qquad (\omega_x) = \frac{a\,b\,\omega}{a^2 + k^2},$$

und daher, durch (12),

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = b\,\omega - \frac{a^2\,b\,\omega}{a^2 + k^2} = \frac{k^2 \, . \, b\,\omega}{a^2 + k^2}.$$

Aber die (8) sagt, dass

$$a\left(\frac{dy}{dt}\right) = C' + k^2 (\omega_x),$$

folglich wird, für $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ und (ω_x) ihre Werte setzend,

$$\frac{a\,b\,k^2\,\omega}{a^2 + k^2} = C' + \frac{a\,b\,k^2\,\omega}{a^2 + k^2}, \qquad C' = 0.$$

Weil $C = 0$ und $C' = 0$ ist, so erhalten wir durch (7)

$$x^2 + y^2 + \frac{C''}{k^2\,\omega} = 0,$$

es ist aber $x = b$, wenn $y = 0$, daher

$$C'' = -b^2 k^2 \omega.$$

Mithin ergiebt sich als Gleichung der Bahn des Punktes P

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Dieses ist aber die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser b mit dem Mittelpunkte in O.

Die folgende elegante Lösung dieses Problemes wurde Walton durch den verstorbenen Robert Leslie Ellis mitgeteilt.

„Eine auf einer vollkommen rauhen, horizontalen Ebene ruhende Kugel erhält einen tangentialen Impuls, wenn diese Ebene so beschaffen ist, dass sie sich um eine vertikale Axe zu drehen beginnt. Dieser Impuls erteilt dem Mittelpunkte der Kugel eine Geschwindigkeit und bringt eine Winkelgeschwindigkeit um eine horizontale Axe hervor. Der Mittelpunkt der Kugel bewegt sich parallel zu dem Antriebe, die Rotationsaxe ist senkrecht zu ihm; daher bewegt sich der Berührungspunkt parallel zu dem Stosse, mithin parallel zu der Bewegungsrichtung des Centrums. Da hier kein Gleiten stattfindet, so bewegt sich folglich der Kugelmittelpunkt in derselben Richtung wie die Ebene. Überdies ist es leicht zu sehen, dass die Geschwindigkeit des Mittelpunktes zu derjenigen des Berührungspunktes, oder — was dasselbe ist — zu derjenigen der Ebene sich wie $1:1+\frac{a^2}{k^2}$ verhält, wenn a den Halbmesser der Kugel und k ihren kleinsten Trägheitsradius bezeichnet. Während die Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung der Ebene unverändert bleibt, ereignet sich keine andere Thätigkeit; wenn ein Wechsel stattfindet, so wird der Kugel ein neuer Tangentialimpuls erteilt, welcher eine neue Geschwindigkeit des Mittelpunktes parallel zu seiner eigenen Richtung und eine neue Rotationsgeschwindigkeit um eine zu dieser Richtung senkrechte Axe hervorbringt. Die neue Rotationsgeschwindigkeit steht zu der alten in demselben Verhältnisse wie die neue Geschwindigkeit des Mittelpunktes zu der alten, das Resultat ist eine zusammengesetzte Geschwindigkeit des Mittelpunktes, welche in demselben Verhältnisse wie vorher zu der Geschwindigkeit des Berührungspunktes steht, wie vorher parallel zu ihr und daher noch parallel zu der Bewegungsrichtung der Ebene ist, u. s. f., gleichviel ob die Bewegung der Ebene sich kontinuierlich oder diskontinuierlich in der Richtung, der Geschwindigkeit, oder in beiden zugleich ändert. In dem angenommenen Bewegungsfalle der Ebene (wobei vorausgesetzt ist, dass stets ein Element der Ebene mit der Kugel in Berührung ist) ist die Bewegung der Ebene immer normal zu einer durch einen festen Punkt gezogenen geraden Linie. Daher ist die Bewegung des Mittelpunktes auch so, mithin beschreibt das Centrum der Kugel einen Kreis, dessen Mittelpunkt senkrecht über dem genannten festen Punkte liegt."

Walton, p. 621—625.

7. In einer kubischen Masse befindet sich eine cylindrische Höhlung, der Querschnitt dieses Hohlraumes ist eine beliebige ovale Curve, seine Erzeugende eine horizontale gerade Linie. Der Kubus kann frei auf einer glatten, horizontalen Ebene gleiten. Die Fläche der Höhlung ist vollkommen rauh, in ihr liegt eine Kugel so, dass die vertikale Ebene durch die Schwerpunkte der Masse und der Kugel senkreckt zu der Generatrix des Cylinders ist. Dem Würfel wird durch einen Stoss in dieser Ebene die bewegende Kraft P mitgeteilt. Welches ist die Bewegung der Kugel relativ zu dem Würfel und der kleinste Wert der Stosskraft, bei welchem die Kugel die Fläche der Höhlung nicht verlassen kann?

Gleichzeitig mit dem Stosse P entsteht hier eine impulsive Reibung zwischen dem Würfel und der Kugel. Es sei M die Masse des Würfels, m diejenige der Kugel, k ihr Trägheitshalbmesser für einen Diameter, V_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Würfels, v_0 diejenige des Schwerpunktes der Kugel relativ zu dem Würfel, ω_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Kugel.

Für die horizontale Bewegung des Systemes und für die Rotationsbewegung der Kugel um ihren Berührungspunkt erhalten wir damit die Gleichungen

$$m(v_0 + V_0) + M V_0 = P, \qquad a(v_0 + V_0) + k^2 \omega_0 = 0, \tag{1}$$

und weil hier kein Gleiten stattfindet, so kommt dazu die Relation

$$v_0 - a\,\omega_0 = 0. \tag{2}$$

Um die daraus hervorgehende Bewegung zu finden, seien (x, y) die auf rechtwinkelige, mit der kubischen Masse fest verbundene Axen bezogene Coordinaten des Kugelmittelpunktes, x horizontal, y vertikal; damit ist y eine bekannte Funktion von x, wenn die Gestalt der cylindrischen Höhlung gegeben ist. Ferner sei ψ die Horizontalneigung der Tangente an die Höhlung im Berührungspunkte von Kugel und Hohlraum, so ist $tg\,\psi = \frac{dy}{dx}$, V die Geschwindigkeit der kubischen Masse, alsdann muss die Gleichung bestehen

$$m\left(\frac{dx}{dt} + V\right) + M V = P. \tag{3}$$

Weiter haben wir, wenn L_0 die anfängliche lebendige Kraft, y_0 den Anfangswert von y bezeichnet, durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$m\left\{\left(\frac{dx}{dt} + V\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k^2\omega^2\right\} + M V^2 = L_0 - 2mg(y - y_0), \tag{4}$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Kugel zur Zeit t ist. Wenn v die

Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes relativ zu dem Würfel ist, so muss sein, weil hier kein Gleiten stattfindet, $v = a\omega$. Durch die Entfernung von V und ω aus diesen Gleichungen gelangen wir zu

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \left\{(1 + tg\,\psi)\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right) - \frac{m}{M+m}\right\} = Cg - 2gy, \qquad (5)$$

wobei $Cg = \dfrac{P^2}{(M+m)\left\{M + (M+m)\dfrac{k^2}{a^2}\right\}} + 2gy_0$ ist.

Diese Gleichung giebt die Bewegung der Kugel relativ zu dem Würfel.

Um den Druck auf den Würfel zu finden, versetzen wir den Würfel in den Zustand der Ruhe. Es sei R der Druck der Kugel auf den Würfel, dann ist die ganze Effektivkraft an dem Würfel parallel zu der Axe der x gleich $R \sin\psi$. Daher müssen wir an jedem Punkte des Würfels eine Beschleunigung $\dfrac{R\sin\psi}{M}$ von entgegengesetzter Richtung dieser Effektivkraft angebracht denken, um den Ruhezustand zu erzielen. An der Kugel wirkt dann die Kraft $\dfrac{m}{M} R \sin\psi$ in horizontaler Richtung in Addition zu der Reaktion R, die Reibung und ihr eigenes Gewicht. Indem wir die Angriffspunkte aller Kräfte nach dem Mittelpunkte transmittieren, sowie die Kräfte parallel und senkrecht zu der Normalen der Bahn zerlegen, erhalten wir

$$\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}\frac{m}{\varrho} = R + \frac{m}{M} R \sin^2\psi - mg\cos\psi, \qquad (6)$$

wo ϱ der Krümmungsradius der Bahn des Kugelmittelpunktes ist. Eliminieren wir hier $\dfrac{dx}{dt}$ mit Hilfe der Gleichung der lebendigen Kraft, so ergiebt sich

$$C - 2y + \varrho\cos\psi\left(1 + \frac{k^2}{a^2} - \frac{m\cos^2\psi}{M+m}\right) = RF, \qquad (7)$$

wo $mgF = \varrho\left(1 + \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{m\cos^2\psi}{M+m}\right)\left(1 + \dfrac{m}{M}\sin^2\psi\right)$, und wenn ϱ sein Zeichen nicht ändert, so ist diese Grösse positiv.

In dem Punkte, in welchem die Kugel die Fläche der Höhlung verlässt, ist $R = 0$. Geben wir R diesen Wert, so erhalten wir eine Gleichung zur Bestimmung von ψ für diesen Punkt, da C eine bekannte Funktion der Anfangsbedingungen ist. Also haben wir für diesen Fall

$$C - 2y + \varrho\cos\psi\left(1 + \frac{k^2}{a^2} - \frac{m\cos^2\psi}{M+m}\right) = 0,$$

welche Gleichung dritten Grades für $\cos\psi$ aufzulösen ist. Wenn sich

die Kugel gerade rund um in der Höhlung bewegt, dann muss der durch diese Gleichung für $\cos\psi$ gegebene Wert gänzlich imaginär oder numerisch grösser als die Einheit sein. Läuft die Kugel gerade rund um, dann muss R durchweg positiv sein und in dem Punkte, für welchen es am kleinsten ist, verschwinden. In diesem Falle haben wir R und $\frac{dR}{d\psi}$ gleichzeitig gleich Null. Die Differentiation giebt

$$\frac{dl(\varrho)}{d\psi}\cos\psi\left(1+\frac{k^2}{a^2}-\frac{m}{M+m}\cos^2\psi\right)$$
$$=\left(\frac{k^2}{a^2}+3-\frac{m}{M+m}\cos^2\psi\right)\sin\psi\ldots \tag{8}$$

Diese Gleichung bestimmt ψ, weil ϱ als eine Funktion von ψ durch die Gleichung des Cylinders gegeben ist, C ist dann durch (7) bekannt, wenn daselbst $R=0$ gesetzt wird, und sodann auch der verlangte Wert von P.

Wir bemerken, dass die Lage des Punktes, für welchen $R=0$ zu setzen ist, unabhängig von den Anfangsbedingungen, aber abhängig von der Gestalt der Höhlung und dem Verhältnisse der Massen des Würfels und der Kugel ist. Dieser Punkt kann nicht der höchste Punkt der Höhlung sein, es sei denn, dass der Krümmungsradius der Höhlung daselbst ein Maximum oder ein Minimum ist. Wenn der Normalschnitt der Höhlung ein Kreis oder eine Ellipse mit horizontaler grosser Axe ist, dann wird der Gleichung, durch welche ψ zu finden ist, nur mit $\psi=\pi$ genügt. In diesem Falle finden wir für den kleinsten Wert des Stosses P, welcher dem Würfel zu erteilen ist. damit die Kugel ganz rund geht, die Gleichung

$$P^2=g\cdot\left\{M+(M+m)\frac{k^2}{a^2}\right\}\cdot\left\{4(M+m)\beta+\left[M+(M+m)\frac{k^2}{a^2}\right]\frac{\alpha^2}{\beta}\right\},$$

wo α und β die Halbaxen der Ellipse sind.

Routh, Dynamics, p. 153.

8. Ein unelastischer, homogener Kreiscylinder rollt bei horizontaler Axe auf einer vollkommen rauhen, geneigten Ebene, welche mit einer vollkommen rauhen, horizontalen Ebene an ihrem Fusse verbunden ist, herab. Welches ist die Geschwindigkeit des Cylinders entlang der horizontalen Ebene und der Stoss, den sie erhält, wenn er zuerst auf sie trifft?

Es sei $\alpha=$ der Horizontalneigung der schiefen Ebene, $m=$ der Masse des Cylinders, $u=$ der Geschwindigkeit seiner Axe in dem Augenblicke vor, $u'=$ derjenigen unmittelbar nach dem Zusammentreffen mit der horizontalen Ebene, $F=$ dem anfänglichen Impuls der Reibung der horizontalen Ebene, genommen in der Richtung der Bewegung der Kugel entlang derselben, $P=$ dem normalen Impuls der horizontalen Ebene, dann ist

$$u'=\frac{1}{3}(1+2\cos\alpha)u,\qquad F=\frac{1}{3}mu(1-\cos\alpha),\qquad P=mu\sin\alpha.$$

9. Ein homogener Cylinder gleitet bei horizontaler Axe ohne zu rollen eine geneigte Ebene herunter. Diese Ebene ist auf einer gewissen Strecke ganz glatt. Nachdem der Cylinder eine gewisse Geschwindigkeit erlangt hat, beginnt der Cylinder infolge der Rauheit der Fläche plötzlich zu rollen ohne zu gleiten. Wie gross ist die Geschwindigkeit der Axe des Cylinders in dem Augenblicke, in welchem er zu rollen beginnt? Welches ist der Anfangsimpuls der Reibung?

Wenn u die Geschwindigkeit des Cylinders in dem Augenblicke vor, u' diejenige unmittelbar nach dem Anfange des vollständigen Rollens ist, m die Masse des Cylinders, F den anfänglichen Impuls der Reibung bezeichnet, dann wird sein

$$u' = \frac{2}{3} u, \qquad F = \frac{1}{3} m u.$$

10. Zwei sich gleichförmig in derselben Ebene um zu dieser Ebene senkrechte, durch ihre Mittelpunkte gehende Axen drehende Räder werden plötzlich in Berührung gebracht und ihre Axen festgehalten. Welche Änderung wird dadurch in ihren Winkelgeschwindigkeiten stattfinden, wenn die Reibung genügt, um alles Gleiten zu verhindern?

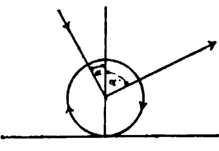
Lasse sein $m =$ der Masse eines Rades, $k =$ seinem Trägheitsradius für seine Rotationsaxe, $a =$ seinem Halbmesser, $\alpha =$ seiner Winkelgeschwindigkeit vor, $\alpha' =$ derjenigen unmittelbar nach der Collision. Ferner sollen bezeichnen n, l, b, β, β' die entsprechenden Grössen für das andere Rad. Damit ist, wenn die Rotation der Räder vor dem Zusammentreffen in entgegengesetzter Richtung stattfindet,

$$\alpha' - \alpha = n a l^2 \cdot \frac{b\beta - a\alpha}{m b^2 k^2 + n a^2 l^2}, \qquad \beta' - \beta = m b k^2 \frac{a\alpha - b\beta}{n a^2 l^2 + m b^2 k^2}.$$

11. Ein Buch $ABCD$ befindet sich in einer vertikalen Ebene mit dem Winkel A auf einem Tische. Welches Maximalverhältnis kann zwischen den Seiten BC und AB stattfinden, damit das Buch nicht über den Winkel B kippt, wenn der Tisch vollkommen rauh und das Buch unelastisch ist?

Das Verhältnis $BC:AB$ kann unmöglich grösser als $1:\sqrt{2}$ sein. Um wie viel kleiner dieses Verhältnis sein kann, ist unbestimmt, denn dieses hängt ab von der physikalischen Beschaffenheit der Berührung zwischen der Seite AB des Buches und des Tisches.

12. Ein sphärischer Ball von gegebener Elastizität bewegt sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit, dreht sich gleichförmig um eine horizontale Axe durch seinen Mittelpunkt, welche senkrecht zu der Bewegungsebene seines Centrums ist, und stösst auf eine horizontale Ebene von solcher Beschaffenheit, die alles Gleiten verhindert. Bestimme, ob der Reflexionswinkel durch Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit vor dem Stosse wächst oder abnimmt. Wie viele Umdrehungen wird der Ball nach dem Stosse machen, bevor er die Ebene wieder trifft?


Figur 167.

Es sei α der Incidenzwinkel, α' der Reflexionswinkel. Die Richtung der Rotation werde im Sinne der Pfeile (Fig. 167) genommen. Ferner lasse sein $r =$ dem Halbmesser des Balles, u, v die Componenten der Einfallsgeschwindigkeit parallel und senkrecht zu der Ebene, ω die Winkelgeschwindigkeit in dem Augenblicke vor dem Stosse.

Mit wachsendem, positivem ω wächst α'. Wenn ω negativ ist, oder die Rotation in entgegengesetzter Richtung der Pfeile erfolgt, so wird α' mit wachsendem ω abnehmen. Wenn

$$\omega = -\frac{5v}{2r} \text{ ist, so wird } \alpha' = 0,$$

oder der Ball in der Normalen zurückspringen. Wenn ω einen grösseren negativen Wert als $-\frac{5v}{2r}$ besitzt, so wird α' negativ sein, d. h. der Reflexionswinkel wird auf derselben Seite der Normalen wie der Einfallswinkel liegen.

Die verlangte Anzahl von Umdrehungen wird gleich sein

$$\frac{4\pi s u}{g} \cdot \frac{7r}{2\omega r + 5v}.$$

13. Ein unelastischer Stab ruht in einer horizontalen Lage auf zwei gleichweit von seinem Schwerpunkte entfernten Pfosten. Der Stab wird um einen der Pfosten in der vertikalen Ebene durch dieselben gedreht und sodann fallen gelassen. Hört seine Bewegung nach dem Stosse auf oder nicht?

Die Bewegung des Stabes wird aufhören oder nicht, je nachdem der Abstand der Pfosten von einander grösser oder kleiner als $a : \sqrt{3}$ ist, wobei a die Länge des Stabes bedeutet.

Griffin, Solutions of the Examples on the Motion of a Rigid Body, p. 102.

14. Eine vollkommen rauhe Ebene bewegt sich mit einer gewissen Geschwindigkeit parallel zu vier der Kanten eines starren, unelastischen Würfels, welcher auf ihr placiert ist, und wird plötzlich in den Ruhezustand versetzt. Die Geschwindigkeit soll so bestimmt werden, dass der Würfel gerade über seine Kante stürzen kann.

Wenn $c =$ der Länge einer Würfelkante und $v =$ der verlangten Winkelgeschwindigkeit ist, so muss sein

$$v^2 = \frac{8}{3}(\sqrt{2} - 1)\, c g.$$

15. Ein vollkommen rauher Würfel ruht mit der einen seiner Flächen auf einem vollkommen rauhen, rectangulären Brette, welches sich auf eine glatte, horizontale Ebene stützt. Der Mittelpunkt der Basis des Würfels fällt mit demjenigen der oberen Fläche des Brettes zusammen und seine Kanten sind parallel zu den Kanten des Brettes. Das Brett empfängt in dem Mittelpunkte einer seiner Kanten in einer zu der nächsten vertikalen Fläche des Würfels senkrechten Richtung einen Stoss. Welches ist die Impulsivkraft zwischen dem Brette und dem Würfel, sowie die Bewegung beider nach der Applikation des Stosses.

Es sei m die Masse des Würfels, m' diejenige des Brettes, P die Stosskraft, a die Länge einer Kante des Würfels. Die horizontale und die vertikale Componente der Impulsivkraft zwischen Brett und Würfel sind resp.

$$\frac{5mP}{5m + 8m'}, \quad \frac{3mP}{5m + 8m'}.$$

Des Brettes augenblickliche Geschwindigkeit ist gleich

$$\frac{8P}{5m + 8m'}$$

und der Würfel dreht sich während eines Augenblickes relativ zu dem Brette um die tiefere, dem Stosspunkte zunächst gelegene Kante mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{6P}{a(5m + 8m')}.$$

16. Eine homogene, um einen horizontalen Diameter rotierende Kugel fällt auf eine vollkommen rauhe, geneigte Ebene aus einer solchen Höhe, dass ihre Winkelgeschwindigkeit durch den ersten Stoss nicht beeinflusst wird, sodann schreitet sie fort, die Ebene durch Sprünge direkt herabzusteigen. Wie gross ist die Geschwindigkeit der Kugel entlang der Ebene gerade nach dem n^{ten} Stosse? Welche Strecke legt die Kugel auf der Ebene zurück bis zu dem Augenblicke der Beendigung des Hüpfens?

Es sei α die Horizontalneigung der Ebene, h die von der Kugel durchfallene Höhe, ε ihre Elastizität, dann sind die verlangte Geschwindigkeit und der verlangte Weg resp. gleich

$$\sqrt{2gh}\,.\,\sin\alpha\,.\left(1+\frac{10}{7}\,\frac{\varepsilon-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\right),\quad \frac{4\varepsilon h\sin\alpha}{(1-\varepsilon)^2}\left(1-\frac{4}{7}\,\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}\right).$$

17. Eine unvollkommen elastische, homogene, rauhe Kugel wird ohne Rotation schief gegen eine feste Ebene geworfen. Wie gross ist das Verhältnis ϱ der tangentialen Restitutionskraft und der tangentialen Compressionskraft, durch α, α', den Einfallswinkel und Reflexionswinkel und den Elastizitätscoëfficienten ε ausgedrückt, für direkten Stoss?

Der Wert von ϱ ist durch die Gleichung gegeben:

$$2\varrho = 5 - 7\,\varepsilon\, tg\,\alpha'\,.\,cotg\,\alpha.$$

Ferrers and Jackson, Solutions of the Cambridge Problems, 1848 to 1851.

18. Eine Serie von vollkommen rauhen Halbcylindern ist Seite an Seite fest, sie liegen mit ihren flachen Flächen quer über einem geraden Weg von konstanter Neigung. Wie gross muss die Neigung des Weges sein, damit ein rauher, kreisförmiger, unelastischer Reif, welcher eben von dem Gipfel eines der cylindrischen Rücken herunterspringt, direkt entlang den Weg mit einer kleinen gleichförmigen Geschwindigkeit sich bewegen kann?

Es sei a = dem Halbmesser des Reifes, a_1 = demjeniger eines der Cylinder, β = der Neigung des Weges, dann ist α durch die Formel gegeben

$$\sin\alpha = \frac{a_1}{a+a_1},$$

und β ist durch die Gleichung bestimmt

$$\cos^2\alpha = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Mackenzie and Walton, Solutions of the Cambridge Problems for 1854.
8—18. Walton, p. 625—629.

Neuntes Kapitel.

Kleine Schwingungen.

Die Schwingungen eines Körpers können entweder daraus hervorgehen, dass derselbe in irgend einer Weise etwas aus seiner Gleichgewichtslage, die eine statische oder dynamische sein kann, ohne Änderung seiner Form verschoben wird, oder daraus, dass

die inneren Kräfte des Körpers infolge einer Formveränderung desselben zur Wirkung kommen, in welchem Falle die dem Körper innewohnende elastische Kraft ins Spiel tritt. Es handelt sich hier vorzugsweise um den ersten Fall und dabei nicht nur um einen einzelnen Körper, sondern auch um Systeme von Körpern, jedoch ist es hier nicht möglich, alle Untersuchungsmethoden zu geben, da es sich dann nötig machte, eine vollständige Theorie der Schwingungen zu entwickeln, was nicht der Zweck dieser Arbeit ist

Erste Abteilung.

Kleine Schwingungen parallel einer Ebene.

Nimmt die die Gleichgewichtslage des Körpers störende Kraft unbegrenzt ab, so nimmt auch die Bewegung mehr und mehr ab, es wird dabei aber gefunden, dass die Schwingungszeit im allgemeinen eine endliche Grenze hat. Die endliche Grenze wird, wenn eine solche besteht, die Zeit einer kleinen Schwingung genannt. Je kleiner die Bewegung, um so mehr nähert sich die Schwingungszeit dieser Grenze und können wir, wenn die Bewegung genügend klein ist, dieselbe als den wahren Wert der Schwingungszeit ansehen. Unter der Annahme, dass die Bewegung schliesslich verschwindet, dürfen wir offenbar alle Quadrate und Produkte kleiner Grössen vernachlässigen, wodurch die Gleichungen sehr vereinfacht werden. Wenn das System nur eine unabhängige Bewegung zulässt, so haben wir im allgemeinen die Gleichungen auf die Form

$$\frac{d^2 s}{d t^2} + n^2 s = a$$

zurückzuführen. Dieses wird durch Vernachlässigung der Quadrate der kleinen Grösse s bewirkt. Das Integral der vorstehenden Gleichung ist bekanntlich

$$s = \frac{a}{n^2} + A \sin (n t + B),$$

wo A und B willkürliche Konstante bedeuten. Bezieht sich diese Gleichung auf die Bewegung eines materiellen Punktes, dann ist, wie wir wissen, die Periode seiner Schwingung $\frac{2\pi}{n^2}$ und der Centralpunkt befindet sich in einem Abstande $\frac{a}{n^2}$ von dem Ursprunge. Der Umfang der Schwingung ist gleich A und hängt ab von den Anfangsbedingungen der Bewegung. In diesem Falle wird angenommen, dass die Bewegung schliesslich verschwindet. Also ergiebt sich, dass wir alles, was wir verlangen, direkt aus der Differentialgleichung und ohne Betrachtung des Anfangszustandes der Bewegung bestimmen können.

Wenn n^2 negativ ist, also die Gleichung besteht

$$\frac{d^2 s}{d t^2} - n^2 s = a,$$

so ist

$$s = -\frac{a}{n^2} + A e^{nt} + B e^{-nt}.$$

In diesem Falle ist die Bewegung nicht oscillatorisch, denn s wächst oder nimmt ab kontinuierlich mit t. Ist $n^2 = 0$, dann haben wir die Glieder der zweiten Ordnung in der Differentialgleichung zu betrachten.

Erster Abschnitt.

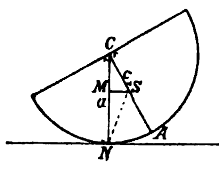
Kleine Schwingungen unveränderlicher Systeme.

Erste Methode.

Besteht das System aus einem einzelnen Körper, so kann die Bewegung auf sehr einfache Weise gefunden werden. Vernachlässigen wir nämlich die Quadrate kleiner Grössen, so können wir Momente um die Momentanaxe nehmen, wie wenn dieselbe eine feste Axe wäre. Die unbekannten Reaktionen werden gewöhnlich in dieser Axe, die oft auch in einen Punkt übergeht, wirken, so dass dadurch ihre Momente verschwinden und im allgemeinen eine Gleichung erscheint, welche nur bekannte Grössen enthält.

1. Eine homogene Halbkugel macht kleine Schwingungen auf einer vollkommen rauhen Ebene. Welches ist die Bewegung?

Es sei C der Mittelpunkt der ebenen Begrenzungsfläche, S der Schwerpunkt der Halbkugel, N ihr Berührungspunkt mit der rauhen horizontalen Ebene (Fig. 168), $a =$ dem Radius der Halbkugel, $CS = c$, $\measuredangle NCS = \vartheta$, $k =$ dem Trägheitshalbmesser für die durch S gehende, auf der Bewegungsebene des Schwerpunktes senkrecht stehende Axe.



Figur 168.

Hier ist der Berührungspunkt N das Momentancentrum, weil die Ebene vollkommen rauh ist, so wird der Reibungswiderstand genügen, den Punkt N in Ruhe zu erhalten. Dadurch, dass wir Momente um N nehmen, ergiebt sich die Bewegungsgleichung

$$(k^2 + \overline{SN}^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g\,c \sin\vartheta.$$

Nun können wir setzen $SN = a - c$, $\sin\vartheta = \vartheta$, folglich wird

$$\{k^2 + (a-c)^2\}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g\,c\,\vartheta.$$

Mithin ist die Zeit einer kleinen Schwingung, welche wir in der Folge mit T bezeichnen wollen,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + (a-c)^2}{cg}}.$$

Im vorliegenden Falle ist $\sqrt{k^2 + c^2} =$ dem Trägheitsradius der Halbkugel um C, $k^2 + c^2 = \frac{2}{5}a^2$, $c = \frac{3}{8}a$, folglich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}a^2 + a^2 - \frac{3}{4}a^2}{\frac{3}{8}a\,g}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{26\,a}{15\,g}} = 2{\cdot}6332\,\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Hätten wir die Ebene als vollkommen glatt vorausgesetzt, dann wäre nicht

N, sondern der Fusspunkt M des von S auf CN gefällten Perpendikels Momentancentrum. In diesem Falle dürfen wir näherungsweise setzen $CM = CS$, so dass die Bewegungsgleichung

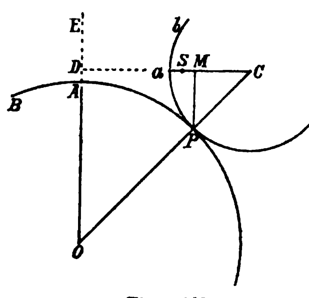
$$k^2 \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = - c g \vartheta,$$

woraus für die Zeit einer vollen Schwingung folgt

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{k^2}{cg}} = 1 \cdot 663 \frac{\pi}{\sqrt{g}}.$$

2. Eine Cylinderfläche von beliebiger Gestalt stützt sich in stabilem Gleichgewichte auf eine andere, vollkommen rauhe, cylindrische Fläche so, dass die Axen der Cylinder parallel sind. Der obere Cylinder wird etwas aus seiner Gleichgewichtslage verschoben. Wie gross ist die Zeit einer kleinen Schwingung?

Es seien BAP und baP die in einer Ebene gelegenen Normalschnitte der Cylinderflächen (Fig. 169), OA, Ca jene Normalen zu den zwei Flächen, welche vor der Verschiebung in einer vertikalen Geraden liegen; OPC sei die gemeinschaftliche Normale am Ende der Zeit t. Durch P werde PM vertikal gezogen, Ca in M schneidend, und S sei der Schwerpunkt des oberen Cylinders. Dabei ist unerlässlich, dass der Schwerpunk S links von M liegt, denn sonst würde der Körper offenbar keine Schwingungen machen können.



Figur 169.

Wir haben hier bei abnehmender Bewegung die Schwingungszeit zu bestimmen, der Bogen aP wird dabei schliesslich gleich Null, so dass C und O als Krümmungsmittelpunkte der Bogen aP und AP angesehen werden können. Es sei $\varrho = OA$, $\varrho' = Ca$, $c = aM$, $\vartheta =$ dem von Ca mit der Vertikalen eingeschlossenen Winkel. Dann ist $\vartheta = \sphericalangle CDE = \sphericalangle OPA + \sphericalangle PCa$,

$$\vartheta = \frac{\text{Bogen } PA}{\varrho} + \frac{\text{Bogen } Pa}{\varrho'} \quad \text{und} \quad \vartheta = \sphericalangle aMP = \frac{\text{Bogen } Pa}{c}.$$

Weil aber der eine Körper auf dem andern rollt, ist auch Bogen $Pa =$ Bogen PA, daher, indem wir die Werte von ϑ gleichen,

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}.$$

Diese Gleichung bestimmt c. Bezeichnen wir ferner aS mit c', $SM = c - c'$ mit c'', so erhalten wir, Momente um P nehmend,

$$\{k^2 + \overline{PS}^2\}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -c''g\,\vartheta.$$

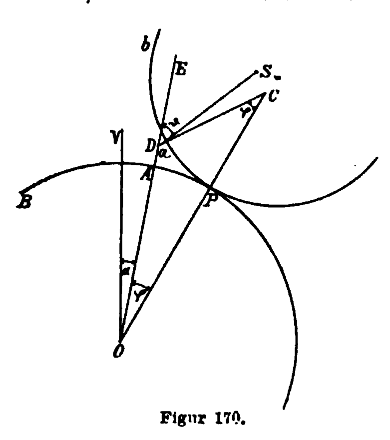
Nun ist annähernd $PS = PM - SM = aM - SM = c - c + c' = c'$, folglich

$$\{k^2 + c'^2\}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -c''g\,\vartheta.$$

Mithin erhalten wir als Schwingungszeit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + c'^2}{g\,c''}}.$$

Eine andere Lösung dieser Aufgabe ist die folgende. Es seien wieder BAP, baP die in einer Ebene gelegenen Normalschnitte der Cylinderflächen (Fig. 170), OA, Ca die Normalen der Flächen für die Punkte A, a, in welchen sich die Flächenquerschnitte zur Zeit $t = 0$ berühren. OA mache mit der Vertikalen den Winkel α; OPC sei die gemeinschaftliche Normale zur Zeit t, S der Schwerpunkt des sich bewegenden Körpers, so dass aS vor der kleinen Verschiebung vertikal ist, $aS = r$. Aus demselben Grunde wie vorhin können C und O als Krümmungsmittelpunkte der Bogen Pa, PA angesehen werden, und es sei wieder $\varrho = OA$, $\varrho' = Ca$.



Figur 170.

Ferner sei $\sphericalangle AOP = \varphi$, $\sphericalangle aCP = \varphi'$, $\vartheta =$ dem Winkel, durch welchen sich der Körper aus der Gleichgewichtslage in die Lage baP während der Zeit t gedreht hat. Weil vor der kleinen Verschiebung aC und AO in derselben geraden Linie liegen, so haben wir $\vartheta = \sphericalangle CDE = \varphi + \varphi'$, wobei Ca die OAE in D schneidet, auch ist wieder Bogen $AP =$ Bogen aP. Nun ist $\varrho\varphi = \varrho'\varphi'$, also $\varphi = \frac{\varrho'}{\varrho + \varrho'}\vartheta$. Der horizontale Abstand des Schwerpunktes S von dem Momentancentrum P ist gleich der Projektion des Linienzuges PaS auf eine Horizontale, $= \overline{Pa}\cos(\alpha + \vartheta) - \overline{aS}\,.\,\vartheta$ $= \varrho\varphi\cos\alpha - r\vartheta = \left(\frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'}\cos\alpha - r\right)\vartheta$, und es wurden beim ersten Gliede dieses Ausdruckes die Quadrate kleiner Grössen vernachlässigt. Bezeichnet nun noch k^2 den Trägheitsradius für den Schwerpunkt S, so ist mit P als Momentenpunkt

$$(k^2 + \overline{SP}^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = (k^2 + \overline{Sa}^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g\left(\frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'}\cos\alpha - r\right)\vartheta,$$

$$(k^2 + r^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g\left(\frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'}\cos\alpha - r\right)\vartheta,$$

woraus folgt:

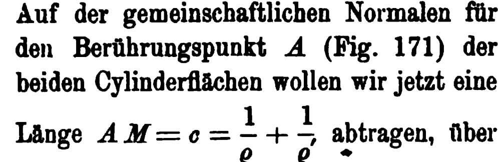
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + r^2}{\left(\frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'} \cos\alpha - r\right) g}}.$$

Nennen wir l die Länge des einfachen, äquivalenten Pendels, dann ist offenbar

$$l = \frac{k^2 + r^2}{\left(\frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'} \cos\alpha - r\right)}.$$

Sind die Krümmungshalbmesser ϱ, ϱ' einander gleich, dann wird mit $\varrho = \varrho' = a$,

$$T = 2\sqrt{2}\,.\,\pi \sqrt{\frac{k^2 + r^2}{(a\cos\alpha - 2r) g}}, \quad l = \frac{2(k^2 + r^2)}{a\cos\alpha - 2r}.$$



Figur 171.

Auf der gemeinschaftlichen Normalen für den Berührungspunkt A (Fig. 171) der beiden Cylinderflächen wollen wir jetzt eine Länge $AM = c = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$ abtragen, über AM als Durchmesser einen Kreis beschreiben, und es möge die Schwerlinie AS diesen Kreis in N schneiden. Dann ist $SN = a\cos\alpha - r$, wobei SN in der Richtung von N nach A positiv gedacht ist. Die Länge l des einfachen, äquivalenten Pendels bestimmt sich durch die Gleichung

$$l = \frac{k^2 + \overline{AS}^2}{SN}.$$

Bezeichnet R den Krümmungshalbmesser der Bahn des Schwerpunktes S, wenn der obere Cylinder auf dem unteren rollt, dann ist $R = -\frac{\overline{AS}^2}{NS}$, so dass alle Punkte ausserhalb des um AM gezeichneten Kreises Curven beschreiben, welche nach A hin konkav sind, während jene innerhalb des Kreises Curven erzeugen, deren konvexe Seite sich nach A hin kehrt. Daraus geht hervor, dass das Gleichgewicht stabil, unstabil oder neutral ist, je nachdem der Schwerpunkt innerhalb, ausserhalb oder auf dem Umfange des Kreises liegt. Durch die Formel für l erkennen wir daher folgendes. Liegt S ausserhalb des Kreises und über der Tangente in A, so ist l negativ und das Gleichgewicht unstabil; befindet sich S innerhalb des Kreises, so ist l positiv und das Gleichgewicht stabil. Dieser Kreis wird deshalb der Stabilitätskreis genannt.

Das vorstehende Problem ist vollkommen allgemein und kann diese Lösung in allen Fällen, für welche der Ort der Momentanaxe bekannt ist,

angewendet werden. Also ist ϱ' der Krümmungsradius des Ortes im Körper, ϱ derjenige des Ortes im Raume und α die Neigung seiner Bahn zum Horizont. Bezeichnet dx die horizontale Verschiebung des Momentancentrums, welche durch eine Drehung $d\vartheta$ des Körpers hervorgerufen wird, so kann die Gleichung für die Länge des einfachen, äquivalenten Pendels eines unter der Wirkung der Schwerkraft schwingenden Körpers geschrieben werden

$$\frac{k^2 + r^2}{l} = \frac{dx}{d\vartheta} - r,$$

denn es ist dann $\frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'} \cos\alpha\, d\vartheta = dx$, $\frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'} \cos\alpha = \frac{dx}{d\vartheta}$.

Daraus lässt sich leicht erkennen, dass der Stabilitätskreis einen Durchmesser von einer Länge gleich dem Verhältnisse der Geschwindigkeit der Momentanaxe im Raume zu der Winkelgeschwindigkeit des Körpers besitzt.

Wenn auf den Körper eine beliebige, durch seinen Schwerpunkt gehende Kraft wirkt, so müssen die erhaltenen Resultate etwas modifiziert werden. Gerade wie vorher muss im Gleichgewichtszustande die Kraft in der Linie wirken, welche den Schwerpunkt S und das Momentancentrum A verbindet. Wenn der Körper eine kleine Verschiebung erfahren hat, so wird die Richtung der Kraft ihre frühere Aktionslinie in einem gewissen Punkte F schneiden, welchen wir als bekannt annehmen. Ist $AF = f$, wählen wir f positiv, wenn S und F auf entgegengesetzten Seiten des Ortes des Momentancentrums liegen, so finden wir durch ein ähnliches Verfahren, dass die Länge l des einfachen, äquivalenten Pendels unter dieser Kraft, dieselbe konstant und gleich der Schwerkraft gedacht, gegeben ist durch

$$\frac{k^2 + r^2}{l} = \frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'} \cos\alpha - \frac{fr}{f + r},$$

wo α der Winkel ist, welchen die Richtung der Kraft mit der Normalen der Bahn des Momentancentrums einschliesst. Messen wir auf AS eine Länge AS' ab, so dass $\frac{1}{AS'} = \frac{1}{AS} + \frac{1}{AF}$, dann nimmt die Gleichung für l die Form an:

$$\frac{k^2 + r^2}{l} = S'N.$$

Das Gleichgewicht ist daher stabil oder unstabil, je nachdem S' innerhalb oder ausserhalb des Stabilitätskreises liegt.

3. Zwei Punkte A, B (Fig. 172) eines Körpers sind gezwungen gegebene Curven zu beschreiben, und ist der Körper unter der Wirkung der Schwerkraft im Gleichgewichte. Dem Körper wird eine kleine Ver-

schiebung erteilt. Wie gross ist die Länge des einfachen, äquivalenten Pendels?

Es seien C, D die Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curven für ihre Punkte A, B und mögen sich die Geraden AC, BD in O schneiden. S sei der Schwerpunkt des Körpers, ES eine Senkrechte auf die Gerade AB. In der Gleichgewichtslage ist die Gerade SO vertikal. γ, δ seien die von AC, BD mit der Vertikalen eingeschlossenen Winkel, und α bezeichne den Winkel AOB. Ferner seien A', B',... die Lagen von $A, B, \ldots$, wenn der Körper durch einen Winkel ϑ gedreht worden ist, endlich sei noch $\sphericalangle ACA' = \varphi$, $\sphericalangle BDB' = \varphi'$.

Figur 172.

Weil der Körper aus der Lage AB in diejenige $A'B'$ gebracht worden ist durch Drehung um O durch den Winkel ϑ, so haben wir $\frac{CA.\varphi}{OA} = \frac{BD.\varphi'}{OB} = \vartheta$. Auch ist schliesslich SS' senkrecht zu OS, so dass $SS' = OS.\vartheta$. Sind nun x, y die Projektionen von OO' auf die horizontale und vertikale Gerade durch O, dann bekommen wir durch Projizieren

$x \cos\delta + y \sin\delta =$ Abstand des Punktes O' von $OD = OD.\varphi'$,

$x \cos\gamma + y \sin\gamma =$ „ „ „ „ „ $OC = OC.\varphi$.

Aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$x = \frac{OD.\sin\gamma.\varphi' + OC.\sin\delta.\varphi}{\sin\alpha}.$$

Nehmen wir nun Momente um das Momentancentrum O', so erhalten wir mit k als Trägheitshalbmesser für den Schwerpunkt S die Bewegungsgleichung

$$(k^2 + \overline{OS}^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g(SS' + x)$$

$$= -g\left(OS + \frac{OD.OB}{BD}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{OC.OA}{CA}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\alpha}\right)\vartheta.$$

Damit ergiebt sich für die Länge l des einfachen, äquivalenten Pendels die Relation

$$\frac{k^2 + \overline{OS}^2}{l} = OS + \frac{OD.OB}{BD}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{OC.OA}{CA}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\alpha}.$$

In dem besonderen Falle, in welchem die Punkte A und B gezwungen sind, sich auf geraden Linien zu bewegen, liegen die Krümmungsmittelpunkte C und D im Unendlichen. Dann ist $\frac{OD}{BD} = -1$, $\frac{OC}{AC} = -1$, und die allgemeine Gleichung geht über in

$$\frac{k^2 + \overline{OS}^2}{l} = OS - OB \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} - OA \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}.$$

Schneiden sich die Geraden OA und OB rechtwinkelig, so erhalten wir die einfache Formel

$$\frac{k^2 + \overline{OS}^2}{l} = OS - 2 . OF,$$

wo F die Projektion des Mittelpunktes von AB auf OS bezeichnet.

4. Ein Körper schwingt um eine Gleichgewichtslage unter der Wirkung der Schwerkraft und es ist der Krümmungsradius der Bahn seines Schwerpunktes bekannt. Wie gross ist die Länge des einfachen, äquivalenten Pendels?

Es sei S (Fig. 173) die Lage des Schwerpunktes des Körpers, wenn er sich in seiner Gleichgewichtslage befindet, S_1 die Lage dieses Punktes am Ende einer Zeit t.

Figur 173.

Weil im Gleichgewichtszustande die Höhenlage des Schwerpunktes ein Maximum oder ein Minimum ist, so ist die Tangente im Punkte S an die vom Schwerpunkte beschriebene Curve SS_1 horizontal. Die Normalen dieser Curve für die Punkte S, S_1 mögen sich in dem Punkte C schneiden, dann kann, weil der Curvenbogen SS_1 sehr klein ist, C als Krümmungsmittelpunkt der Curve für den Punkt S angesehen werden. Es sei $SS_1 = s$, $\sphericalangle SCS_1 = \psi$, $R =$ dem Krümmungshalbmesser für den Punkt S, $\vartheta =$ dem Winkel, durch welchen sich der Körper bei der Bewegung von S nach S_1 gedreht hat, so dass $\frac{d\vartheta}{dt}$ seine Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Weil S sich entlang der Tangente in S bewegt, so liegt das Momentancentrum auf der Normalen S_1C in einem solchen Punkte O, dass $OS_1\frac{d\vartheta}{dt} =$ der Geschwindigkeit von $S_1 = \frac{ds}{dt}$, also $S_1O = \frac{ds}{d\vartheta}$ ist. Bezeichnet nun Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers um seinen Schwerpunkt und nehmen wir Momente um O, dann erhalten wir

$$(k^2 + \overline{OS_1}^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g . OS_1 . \sin\psi.$$

Es ist aber, wenn schliesslich der Winkel ϑ unendlich klein wird, $\frac{\psi}{\vartheta} = \frac{OS_1}{R}$, und die Bewegungsgleichung geht damit über in

$$(k^2 + \overline{OS_1}^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g \cdot \frac{\overline{OS_1}^2}{R} \cdot \vartheta.$$

Mithin ist die Länge des einfachen, äquivalenten Pendels und die Zeit einer vollen Schwingung

$$l = \left(1 + \frac{k^2}{\overline{O S_1}^2}\right) \cdot R, \qquad T = \frac{2\pi}{O S_1} \sqrt{\frac{k^2 + \overline{O S_1}^2}{g}}.$$

5. Wenn das sich bewegende System nur eine unabhängige Bewegung zulässt, so kann die Zeit einer kleinen Schwingung häufig mit Hilfe des Prinzipes der lebendigen Kraft abgeleitet werden. Diese Gleichung wird eine solche der zweiten Ordnung kleiner Grössen sein und es ist bei der Bildung derselben nötig, kleine Grössen dieser Ordnung mit in Rechnung zu ziehen, was manchmal komplizierte Betrachtungen verursachen wird. Auf der anderen Seite wird jedoch die Gleichung von allen unbekannten Reaktionen frei sein, so dass wir uns häufig viele Eliminationen ersparen können.

Die Bewegung eines Körpers im Raume nach zwei Richtungen ist durch die Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ seines Schwerpunktes und den Winkel ϑ, welchen irgend eine feste Linie in dem Körper mit einer festen Geraden im Raume einschliesst, gegeben. Der Körper sei unter der Wirkung der Schwerkraft im Gleichgewichte, und wir verlangen die Zeit einer kleinen Schwingung zu finden.

Weil der Körper nur einer unabhängigen Bewegung fähig ist, so können wir x, y als Funktionen von ϑ darstellen, wodurch

$$x = F(\vartheta), \qquad y = f(\vartheta).$$

Bezeichnet Mk^2 das Moment zweiten Grades des Körpers um seinen Schwerpunkt, dann ist nach dem Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C - 2gy,$$

wo C eine willkürliche Konstante bezeichnet.

Ist α der Wert von ϑ, wenn sich der Körper in der Gleichgewichtslage befindet, und nehmen wir an, dass zur Zeit t $\vartheta = (\alpha + \varphi)$ ist, dann ist durch Maclaurin's Theorem

$$y = y_0' + y_0' \varphi + y_0'' \frac{\varphi^2}{2} + \ldots\ldots,$$

wo y_0', y_0'', ... die Werte von $\frac{dy}{d\vartheta}$, $\frac{d^2 y}{d\vartheta^2}$, ... sind, wenn $\vartheta = \alpha$ ist. Aber für die Gleichgewichtslage ist y entweder ein Maximum oder ein Minimum, also $y_0' = 0$. Folglich wird die Gleichung der lebendigen Kraft

$$(x_0'^2 + k^2) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C - g y_0'' . \varphi^2,$$

wo x_0' den Wert von $\frac{dx}{d\vartheta}$ bedeutet, wenn $\vartheta = \alpha$ ist. Die Differentiation dieser Gleichung giebt

$$(x_0'^2 + k^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g y_0''\varphi,$$

so dass, wenn l die Länge des einfachen, äquivalenten Pendels bezeichnet,

$$l = \frac{k^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\frac{d^2y}{d\vartheta^2}},$$

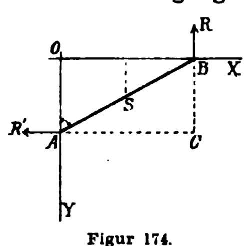
und haben für ϑ seinen Wert α nach Ausführung der Differentiation zu schreiben. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die geometrische Bedeutung dieses Resultates dieselbe wie die in dem vorhergehenden Falle ist.

Dieses analytische Resultat wurde durch Mr. Holditch in dem achten Bande der Cambridge Transactions gegeben. Diese bequeme Formel ist dann zu gebrauchen, wenn die Bewegung des Schwerpunktes des schwingenden Körpers bekannt ist.

Zweite Methode.

Besteht das System aus mehreren Körpern, so bilden wir die allgemeinen Bewegungsgleichungen aller Körper. Sind sodann die Lagen, um welche die Schwingungen stattfinden, bekannt, so werden einige der darinnen enthaltenen Grössen klein sein. Die Quadrate und höheren Potenzen dieser kleinen Grössen können vernachlässigt werden, wodurch alle Gleichungen eine lineare Form annehmen werden. Sind hierauf die unbekannten Reaktionen alle eliminiert, so können die resultierenden Gleichungen leicht gelöst werden. Sind die Lagen, um welche die Schwingungen stattfinden, nicht bekannt, dann ist es nicht nötig, zuerst das statische Problem zu lösen. Wir können durch einen Prozess die Ruhelagen bestimmen, ermitteln, ob sie stabil oder es nicht sind, und die Schwingungszeit finden.

1. Die Enden eines gleichförmigen schweren Stabes AB (Fig. 174) von der Länge $2l$ sind genötigt, sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels, von welchen der Schenkel OX horizontal ist, zu bewegen. Das ganze System dreht sich mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe OY. Welches ist die Gleichgewichtslage und die Zeit einer kleinen Schwingung?



Figur 174.

Es seien x, y die Coordinaten des Mittelpunktes S des Stabes AB, ϑ bezeichne den Winkel OBA, eingeschlossen von dem Stabe und der Abscissenaxe. R', R seien die Reaktionen in A, B, in der Ebene XOY; die Masse der Längeneinheit des Stabes sei die Masseneinheit.

Die Accelerationen eines beliebigen Stabelementes

mit den Coordinaten (ξ, η) sind $\frac{d^2\xi}{dt^2} - \omega^2\xi$, parallel zu OX, $\frac{1}{\xi}\frac{d}{dt}(\xi^2\omega)$, senkrecht zu der Ebene XOY, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ parallel zu OY. Da es nicht nötig sein wird, Momente um OX, OY zu nehmen, oder senkrecht zu der Ebene XOY zu zerlegen, so wird die zweite Acceleration nicht gebraucht werden. Die Resultanten der Effektivkräfte $\frac{d^2\xi}{dt^2}dr$ und $\frac{d^2\eta}{dt^2}dr$ sind für den ganzen Stab $2l\frac{d^2x}{dt^2}$ und $2l\frac{d^2y}{dt^2}$, angreifend in dem Schwerpunkte S, und ein Paar $2lk^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$, welches bestrebt ist, den Körper um S zu drehen. Die Resultanten der Effektivkräfte $\omega^2\xi\,dr$, genommen über den ganzen Körper, sind eine einzelne in S wirkende Kraft $=\int_{-l}^{+l}\omega^2(x + r\cos\vartheta)\,dr$ $= \omega^2 x \,.\, 2l$ und ein Paar um $S = \int_{-l}^{+l}\omega^2(x + r\cos\vartheta)\,r\sin\vartheta\,dr$ $= \omega^2 \,.\, 2l\cdot\frac{l^2}{3}\sin\vartheta\cos\vartheta$, wobei der Abstand r von S nach B gemessen ist.

Anmerkung. Wenn ein Körper sich in einer Ebene um eine in seiner eigenen Ebene gelegenen Axe mit einer Winkelgeschwindigkeit ω dreht, so kann ein einzelner Ausdruck für die Resultanten der Centrifugalkräfte an allen Elementen des Körpers gefunden werden. Wir nehmen den Schwerpunkt als Ursprung und die Axe der y parallel zu der festen Axe; c sei der Abstand des Schwerpunktes von der Rotationsaxe, dann sind alle Centrifugalkräfte äquivalent einer einzelnen resultierenden Kraft in $S = \int\omega^2(c - x)\,dm = \omega^2 Mc$, weil $\bar{x} = 0$, und einem einzigen resultierenden Paare $= \int\omega^2(c + x)\,y\,dm = \omega^2\int xy\,dm$, weil $\bar{y} = 0$.

Damit bekommen wir die dynamischen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2l\cdot\frac{d^2x}{dt^2} &= -R' + \omega^2 x \,.\, 2l, \\ 2l\cdot\frac{d^2y}{dt^2} &= -R + g \,.\, 2l, \\ 2l\,.\,k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= Rx - R'y = \omega^2 \,.\, 2l\cdot\frac{l^2}{3}\sin\vartheta\cos\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und die geometrischen Bedingungen sind

$$x = l\cos\vartheta, \qquad y = l\sin\vartheta. \quad (2)$$

Die Elimination der Reaktionen R, R' aus den Gleichungen (1) giebt

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = gx - \omega^2 xy - \omega^2\frac{l^2}{3}\sin\vartheta\cos\vartheta. \quad (3)$$

Zuerst haben wir nun die Ruhelage zu bestimmen. Beachten wir, dass der Stab stets in seiner Ruhelage verbleibt, wenn er in dieselbe gebracht worden ist, falls keine weiteren Kräfte wirken, so muss die Bedingung erfüllt werden

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Dieses giebt

$$g x - \omega^2 x y - \omega^2 \frac{l^2}{3} \sin \vartheta \cos \vartheta = 0. \tag{4}$$

Verbinden wir diese Gleichung mit der Gleichung (2), dann kommt

$$g l \cos \vartheta - \omega^2 l^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \omega^2 \frac{l^2}{3} \sin \vartheta \cos \vartheta = 0,$$

$$g - \omega^2 l \sin \vartheta \left(1 + \frac{1}{3}\right) = g - \frac{4}{3} \omega^2 l \sin \vartheta = 0,$$

d. h. $\qquad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \qquad$ oder $\qquad \sin \vartheta = \frac{3}{4} \frac{g}{\omega^2 l},$

mithin sind die Gleichgewichtslagen gefunden und es werde irgend eine derselben repräsentiert durch $\vartheta = \alpha$, $x = a$, $y = b$.

Nun können wir zu der Ermittelung der Zeit einer kleinen Schwingung übergehen.

Es sei $x = a + x'$, $y = b + y'$, $\vartheta = \alpha + \vartheta'$, wo x', y', ϑ' alle kleine Grössen bedeuten. Diese Ausdrücke haben wir in die Gleichung (3) zu substituieren. Weil die Grössen $\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d \vartheta^2}{dt^2}$ auf der linken Seite der Gleichung alle klein sind, so können wir daselbst einfach für $x, y, \vartheta, a, b, \alpha$ setzen. Auf der rechten Seite der Gleichung nehmen wir die Substitution mit Hilfe des Satzes von Taylor vor, also nach

$$f(a + x', b + y', \alpha + \vartheta') = \frac{df}{da} x' + \frac{df}{da} y' + \frac{df}{d\alpha} \vartheta'.$$

Wir wissen, dass das erste Glied $f(a, b, \alpha)$ gleich Null ist, weil dieses die nämliche Gleichung (4) ist, aus welcher a, b, α gefunden wurden. Daher erhalten wir

$$a \frac{d^2 y'}{dt^2} - b \frac{d^2 x'}{dt^2} + k^2 \frac{d^2 \vartheta'}{dt^2} = (g - \omega^2 b) x' - \omega^2 a y' - \omega^2 \frac{l}{3} \cos 2\alpha \,.\, \vartheta'.$$

Setzen wir noch in den Gleichungen (2) $\vartheta = \alpha + \vartheta'$, und wenden den Satz von Taylor an, so kommt

$$x' = - l \sin \alpha \,.\, \vartheta', \qquad y' = l \cos \alpha \,.\, \vartheta'.$$

Mithin ist die die Bewegung bestimmende Gleichung

$$(l^2 + k^2) \frac{d^2 \vartheta'}{dt^2} + \left(g l \sin \alpha + \frac{4}{3} \omega^2 l^2 \cos 2\alpha\right) \vartheta' = 0.$$

Nun ist, wenn $g\,l\,sin\,\alpha + \frac{4}{3}\omega^2 l^2 cos\,2\,\alpha = n$ gesetzt wird, weil n stets positiv ist, sobald jeder der zwei Werte von α substituiert wird, die Zeit einer kleinen Schwingung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2+k^2}{n}}.$$

Wenn n negativ ist, dann ist das Gleichgewicht unstabil und es können somit in diesem Falle keine Schwingungen stattfinden.

Ist $\omega^2 > \frac{3g}{4l}$, so besitzt der Stab zwei Gleichgewichtslagen. Durch Substitution ergiebt sich, dass die eine Lage, in welcher der Stab zu der Vertikalen geneigt ist, stabil und die andere Lage labil ist. Wenn $\omega^2 < \frac{3g}{4l}$, dann ist die einzige Lage, in welcher der Stab ruhen kann, die vertikale und diese Gleichgewichtslage ist stabil.

Mit $n = 0$ befindet sich der Stab in einer neutralen Gleichgewichtslage. Um die kleinen Schwingungen zu bestimmen, haben wir in diesem Falle auch die kleinen Glieder höherer Ordnung als der ersten in Rechnung zu ziehen. Durch eine wohlbekannte Transformation erhalten wir

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

Folglich wird die linke Seite der Gleichung (3) $= (l^2+k^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$, die rechte Seite derselben geht mit Hilfe von Taylors Theorem über in

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(g\,l\,cos\,\alpha - \frac{2}{3}\omega^2 l^2 sin\,2\,\alpha\right)\frac{\vartheta'^2}{1.2} + \cdots$$

Wenn $n = 0$ ist, so haben wir $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\omega^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{g}{l}$. Nehmen wir die nötigen Substitutionen vor, dann geht die Bewegungsgleichung über in

$$(l^2+k^2)\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} = -\frac{1}{2}g\,l\,\vartheta'^3.$$

Weil die niedrigste Potenz von ϑ' auf der rechten Seite dieser Gleichung ungerade und ihr Coëfficient negativ ist, so ist das Gleichgewicht für eine Verschiebung nach rechts oder links von der Gleichgewichtslage stabil. Bezeichnet α den Anfangswert von ϑ', dann ist die Zeit T zur Erreichung der Gleichgewichtslage

$$T = 2\sqrt{\frac{l^2+k^2}{g\,l}}\int_0^\alpha \frac{d\vartheta'}{\sqrt{\alpha^4 - \vartheta'^4}},$$

oder, wenn wir $\vartheta' = \alpha\varphi$ setzen,

$$T = 2\sqrt{\frac{l^2+k^2}{g\,l}}\int_0^1 \frac{1}{\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^4}} = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{l^2+k^2}{g\,l}}\int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^4}}.$$

Das hier vorkommende Integral kann in Gliedern der Gammafunktion ausgedrückt werden. Es lässt sich leicht zeigen, dass $\int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^4}} = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2}{4\sqrt{2\pi}}$, daher können wir auch schreiben

$$T = \frac{1}{2\alpha} \cdot \sqrt{\frac{l^2+k^2}{g\,l}} \cdot \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2}{\sqrt{2\pi}}.$$

daher ist die zur Erreichung der Gleichgewichtslage erforderliche Zeit dem Bogen umgekehrt proportional. Wenn die anfängliche Verschiebung unendlich klein ist, dann wird die Zeit unendlich gross.

Diese Aufgabe hätte auch leicht mit Hilfe der ersten Methode gelöst werden können. Fällen wir von A und B senkrechte Gerade auf OY und OX, so schneiden sich diese in dem Momentancentrum C. Nehmen wir Momente um die Axe durch diesen Punkt, so gelangen wir zu der Gleichung

$$(l^2+k^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = g\,l\cos\vartheta - \int_{-l}^{+l} \omega^2 (l+r)^2 \sin\vartheta\cos\vartheta \frac{dr}{2l},$$
$$= g\,l\cos\vartheta \frac{4}{3} l^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = f(\vartheta).$$

Sodann kann die Gleichgewichtslage gefunden werden mittelst der Gleichung

$$f(\alpha) = 0,$$

und die Zeit einer kleinen Schwingung ergiebt sich aus der Relation

$$(l^2+k^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \cdot \vartheta'.$$

Dritte Methode.

Sind mehrere Körper vorhanden, die sich unabhängig von einander bewegen können, dann kann die Zahl der Gleichungen und unbekannten Reaktionen sehr gross werden. Bei der zweiten Methode beginnen wir unseren Prozess mit der Elimination aller unbekannten Reaktionen aus den Gleichungen und machen von den dynamischen Gleichungen keinen weiteren Gebrauch. Es lässt sich aber eine Methode entwickeln, welche sofort das Resultat dieser Eliminationen giebt und das Anschreiben der primitiven dynamischen Gleichungen nicht verlangt.

Bezeichnen x, y die Coordinaten eines beliebigen materiellen Punktes des Systemes, bezogen auf rechtwinkelige Coordinatenaxen, δx, δy irgend welche kleine Verschiebungen dieses Punktes parallel zu den Axen, X, Y die Componentensummen der beschleunigenden Kräfte parallel zu diesen festen Linien, dann ist nach dem Prinzipe von D'Alembert, verbunden mit dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right) = \Sigma m(X\delta x + Y\delta y).$$

Diese Gleichung kann in so viele Gleichungen zerlegt werden, als unabhängige Bewegungen des Systemes vorhanden sind. Die partiellen Gleichungen genügen in Verbin-

dung mit den geometrischen Nebenbedingungen zur Bestimmung der Bewegung. Nehmen wir beispielsweise an, dass das System eine einzige unabhängige Bewegung zulässt, dann können x, y etc. als Funktionen einer einzigen unabhängigen Variablen dargestellt werden, diese sei ϑ, so dass

$$x = f(\vartheta), \quad y = \psi(\vartheta), \quad \delta x = f'(\vartheta)\,\delta\vartheta, \quad \delta y = \psi'(\vartheta)\,\delta\vartheta.$$

Nach der Substitution wird $\delta\vartheta$ aus der Gleichung verschwinden und wir werden eine dynamische Gleichung erhalten, welche von allen unbekannten Reaktionen frei ist.

Wenn irgend einer der Körper ein starrer Körper ist, dann wird die Summe auf der linken Seite der Gleichung ein Integral und es macht sich der folgende Satz nötig

$$\int dm \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y\right) = M\left(\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2}\delta y\right) + Mk^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}\delta\varphi,$$

d. h. das virtuelle Moment aller Effektivkräfte ist gleich dem virtuellen Momente der ganzen in dem Schwerpunkte des Körpers vereinigten Masse, plus dem virtuellen Momente, welches der Rotation um den Schwerpunkt zu verdanken ist.

Dieses kann folgendermassen bewiesen werden. Setzen wir $x = \bar{x} + x'$, $y = \bar{y} + y'$, dann wird der Ausdruck auf der linken Seite zu

$$M\left(\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\delta x + \frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\delta y\right) + \int dm\left(\frac{d^2 x'}{dt^2}\delta x' + \frac{d^2 y'}{dt^2}\delta y'\right).$$

Schreiben wir ferner $x' = r\cos\varphi$, $y' = r\sin\varphi$, wo r unabhängig von t ist, so bekommen wir

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = -r\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} - r\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = +r\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} - r\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Indem wir nun diese Gleichungen multiplizieren mit $\delta x' = -r\sin\varphi\, d\varphi\,\delta\varphi$, $\delta y' = + r\cos\varphi\,\delta\varphi$, so geht das letzte Glied des obigen Ausdruckes über in

$$\int dm \,.\, r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}\delta\varphi = Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\delta\varphi,$$

womit der Satz bewiesen ist.

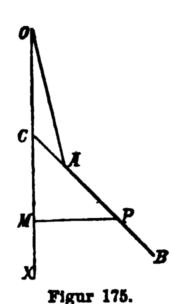
Dieses Prinzip lässt sich auch auf Bewegungen übertragen, die nicht parallel einer Ebene sind, wie wir später zeigen werden, und fügen wir deshalb die dahin gehenden allgemeinen Bemerkungen gleich hier an.

Ein materieller Punkt oder ein System materieller Punkte sei bestimmten, festen, geometrischen Gesetzen bezüglich seiner Lage oder bezüglich der gegenseitigen Lage der einzelnen Systempunkte unterworfen, resp. gezwungen, sich auf vorgeschriebener Bahn zu bewegen, wobei die unveränderlichen geometrischen Elemente von besonderen Relationen frei sein sollen, und es erleide das System eine kleine allgemeine Verschiebung aus seiner stabilen Gleichgewichtslage. In diesem Falle kann, wenn in den geometrischen Gleichungen n unabhängige Variable vorhanden sind, die Bewegung eines jeden Gliedes des Systemes dargestellt werden durch die Zusammensetzung von n primären Schwingungen verschiedener Perioden, wobei die Perioden der n Oscillationen irgend zweier Glieder des Systemes coëxistent sind, während ihre Amplituden im allgemeinen verschieden sein werden. Wenn die Perioden der n elementaren Schwingungen kommensurabel sind, so kehrt das ganze System nach einem Zeitabschnitte, welcher dem gemeinsamen Vielfachen dieser Perioden gleich ist, in seinen Anfangszustand zurück, wie in dem Falle schwingender Linien und schwingender Flächen. Diese allgemeine Eigenschaft sympathetischer Vibrationen ist genannt worden das Prinzip der Coëxistenz kleiner Schwingungen oder Vibrationen. Sollte die ursprüngliche Verschiebung des Systemes aus seiner Gleichgewichtslage, anstatt vollkommen allgemein zu sein, durch besondere Adaption bewirkt werden, so können wir die n elementaren Schwingungen nach Belieben auf irgend eine kleinere Anzahl zurückführen.

Wenn die festen geometrischen Elemente des Systemes von besonderen Relationen nicht frei sind, was wir angenommen haben, wenn ferner dem Systeme eine vollkommen allgemeine Verschiebung erteilt wird, dann werden, wie vorher, n Klassen von Oscillationen zum Vorschein kommen. Unter diesen Umständen stellt sich indessen von selbst eine zufällige Eigentümlichkeit heraus, welche darin besteht, dass — obgleich wir vorausgesetzt haben, dass die ursprüngliche Störung des Gleichgewichtes eine ganz allgemeine sei — dennoch bei der Bewegung keines einzelnen Gliedes des Systemes sämtliche elementaren Schwingungen eintreten werden. Dieser Fall macht einen Misserfolg des Prinzipes der Coëxistenz kleiner Schwingungen aus.

Das Prinzip von Coëxistenzschwingungen wurde zuerst von Daniel Bernoulli aufgestellt; derselbe hat mehrere Aufsätze über diesen Gegenstand in den St. Petersburger Abhandlungen geschrieben. Siehe besonders: Nova Comment. Petrop. Vol. XIX, p. 281. Der Studierende wird auch verwiesen auf Lagrange, Mécanique Analytique, Tom. I, p. 347, und auf Poisson, Traîté de Mécanique, Tom. II, p. 426, woselbst er Untersuchungen dieses Prinzipes finden wird, die sich auf die ersten Fundamentalsätze der Mechanik gründen.

1. Ein gleichförmiger Stab AB, welcher mittelst eines unelastischen Fadens OA an einen festen Punkt O gefesselt ist, (Fig. 175) wird etwas aus seiner Gleichgewichtslage in der vertikalen Ebene durch O verschoben. Welches ist die Beschaffenheit seiner kleinen Schwingungen?



Figur 175.

Ziehe OX vertikal, nehme einen beliebigen Punkt P in AB an und mache PM rechtwinkelig zu OX, verlängere BA bis zum Schnitte C mit OX und setze $AB = 2a$, $OM = x$, $MP = y$, $AP = s$, $OA = l$, $\measuredangle AOX = \vartheta$, $\measuredangle BCX = \varphi$. Damit erhalten wir für die Bewegung des Stabes AB durch das Prinzip von D'Alembert in Verbindung mit dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\int_0^{2a}\left\{ds\left(\frac{d^2x}{dt^2}-g\right)\delta x\right\}+\int_0^{2a}\left\{ds\left(\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right)\right\}=0, \tag{1}$$

wo dx, dy die unendlich kleinen, von einem Elemente ds des Stabes in der Zeit dt parallel zu den Coordinatenaxen beschriebenen Bahnen, δx, δy die Componenten seiner virtuellen Geschwindigkeit bezeichnen. Die geometrischen Nebenbedingungen sind

$$x = l\cos\vartheta + s\cos\varphi, \qquad y = l\sin\vartheta + s\sin\varphi.$$

Bei der Überführung der Gleichung (1) in eine solche, welche nur ϑ und φ anstatt x und y enthält, berücksichtigen wir nur unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung in den Coëfficienten von $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$. Dadurch erhalten wir zunächst die Näherungswerte

$$x = l(1-\frac{1}{2}\vartheta^2) + s(1-\frac{1}{2}\varphi^2), \quad y = l\vartheta + s\varphi,$$

$$\delta x = -l\vartheta\delta\vartheta - s\varphi\delta\varphi, \qquad \delta y = l\delta\vartheta + s\delta\varphi,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = l\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + s\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Durch Substitution dieser Werte von $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, δx, δy in die Gleichung (1) ergiebt sich

$$\int_0^{2a} \{g\,ds\,(l\vartheta\delta\vartheta + s\varphi\delta\varphi)\} + \int_0^{2a}\left\{ds\left(l\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + s\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)(l\delta\vartheta + s\delta\varphi)\right\} = 0.$$

Setzen wir nun das Einemal den Coëfficienten von $\delta\vartheta$, das Anderemal den Coëfficienten von $\delta\varphi$ gleich Null, so zerfällt diese Gleichung in die zwei Relationen

$$\left(g\vartheta + l\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right)\int_0^{2a} ds + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\int_0^{2a} s\,ds = 0,$$

$$\left(g\varphi + l\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right)\int_0^{2a} s\,ds + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\int_0^{2a} s^2\,ds = 0,$$

oder in

$$l\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + a\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\vartheta = 0, \quad (2) \qquad l\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{4}{3}a\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0. \quad (3)$$

Zum Zwecke der Integration der Gleichungen (2) und (3) setzen wir

$$\vartheta = \alpha \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{\varrho}}\,t + \varepsilon\right\}, \qquad \varphi = \beta \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{\varrho}}\,t + \varepsilon\right\}.$$

Diese Werte von ϑ und φ in die (2) eingeführt und das Resultat mit $\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{\varrho}}\,t + \varepsilon\right\}$ dividiert, giebt

$$-\frac{l}{\varrho}\alpha - \frac{a}{\varrho}\beta + \alpha = 0, \qquad \text{oder} \qquad a\beta = \alpha(\varrho - l). \quad (4)$$

In gleicher Weise bekommen wir mit (3)

$$-\frac{l}{\varrho}\alpha - \frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\varrho}\beta + \beta = 0, \qquad \text{oder} \qquad \beta(3\varrho - 4a) = 3l\alpha. \quad (5)$$

Jetzt eliminieren wir α und β zwischen den Gleichungen (4) und (5), dadurch gelangen wir zu der neuen Gleichung

$$\frac{3\varrho - 4a}{a} = \frac{3l}{\varrho - l}, \qquad \text{oder} \qquad 3\varrho^2 - (4a + 3l)\varrho + al = 0.$$

Sind nun m und m' die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, dann ist die Bewegung vollständig bestimmt durch

$$\vartheta = \alpha \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m}}\cdot t + \varepsilon\right\} + \alpha' \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m'}}\,t + \varepsilon'\right\}, \quad (6)$$

$$\varphi = \beta \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m}}\cdot t + \varepsilon\right\} + \beta' \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m'}}\,t + \varepsilon'\right\}. \quad (7)$$

In diesen zwei Gleichungen treten sechs willkürliche Konstanten auf, dieselben sind indessen nicht alle von einander unabhängig. In der That

haben wir durch (4), weil α und α' resp. den Werten von m und m' der Grösse ϱ entsprechen,

$$\beta = \frac{\alpha}{a}(m - l), \qquad \beta' = \frac{\alpha'}{a}(m' - l),$$

folglich sehen wir mit (7), dass

$$\varphi = \frac{\alpha}{a}(m - l)\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m}}\cdot t + \varepsilon\right\} + \frac{\alpha'}{a}(m' - l)\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m'}}t + \varepsilon'\right\}. \quad (8)$$

Die vier Konstanten α, α', ε, ε', welche in den zwei Gleichungen (7) und (8) enthalten sind, können bestimmt werden, wenn die anfänglichen Bewegungsverhältnisse des Stabes, oder die Anfangswerte von ϑ, $\frac{d\vartheta}{dt}$, φ, $\frac{d\varphi}{dt}$ gegeben sind.

In dem besonderen Falle, wo $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$ ist, haben wir

$$\vartheta = \alpha \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m}}\,t + \varepsilon\right\}, \qquad \varphi = \beta \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m}}\,t + \varepsilon\right\};$$

die Schwingungen durch die Winkel ϑ und φ sind offenbar dann regelmässig und isochron, die Zeit einer Schwingung ist gleich $\pi\sqrt{\frac{m}{g}}$.

Wenn α', β' nicht gleich Null sind, dann werden die Schwingungen durch ϑ und φ aus zwei einfachen, isochronen Vibrationen zusammengesetzt sein.

Wir wollen weiter annehmen, dass zu zwei verschiedenen Zeiten t', t'' die Werte von ϑ und $\frac{d\vartheta}{dt}$ dieselben sind. Dieses wird augenscheinlich der Fall sein, wenn

$$\sqrt{\frac{g}{m}}\,t'' + \varepsilon = \sqrt{\frac{g}{m}}\,t' + \varepsilon + 2\lambda\pi \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{g}{m'}}\,t'' + \varepsilon' = \sqrt{\frac{g}{m'}}\,t' + \varepsilon' + 2\lambda'\pi,$$

wobei λ, λ' irgend welche ganze Zahlen bedeuten, folglich wenn

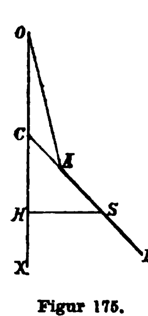
$$2\lambda\pi\sqrt{\frac{m}{g}} = t'' - t' = 2\lambda'\pi\sqrt{\frac{m'}{g}},$$

und daher $$\lambda\sqrt{m} = \lambda'\sqrt{m'},$$

demnach müssen sich die Grössen m und m' wie zwei Quadratzahlen verhalten.

Es wird bereits bemerkt worden sein, dass in Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie der Coëxistenz kleiner Schwingungen die Anzahl der unabhängigen Schwingungen von ϑ und φ zwei ist, welches dieselbe wie die Anzahl der unabhängigen geometrischen Variablen ist.

Wir geben noch eine zweite Lösung dieses Problemes.



Figur 175.

Es sei S die Lage des Schwerpunktes des Stabes AB (Fig. 175) zu einer beliebigen Zeit t. Ziehe SH rechtwinkelig zu der Vertikalen OX durch O, verlängere AB bis C in OX. Lasse sein $M =$ der Masse des Stabes, $Mk^2 =$ seinem Trägheitsmomente um S, $T =$ der Spannung des Fadens OA, $OH = x$, $SH = y$, die übrigen Bezeichnungen wie vorhin.

Damit sind die dynamischen Gleichungen für den Stab

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - T\cos\vartheta, \quad (1) \qquad M\frac{d^2y}{dt^2} = -T\sin\vartheta, \quad (2)$$

$$Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -aT\sin(\varphi - \vartheta). \quad (3)$$

T zwischen (1) und (2) eliminierend und kleine Grössen höherer Ordnung als der ersten übergehend, erhalten wir

$$\frac{d^2y}{dt^2} + g\vartheta = 0, \quad (4)$$

und wenn wir mit (1) und (3) in derselben Weise verfahren

$$k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + ag(\varphi - \vartheta) = 0. \quad (5)$$

Aber es ist $y = a\sin\varphi + l\sin\vartheta = a\varphi + l\vartheta$ nahezu, folglich geht dadurch die (4) über in

$$l\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + a\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\vartheta = 0,$$

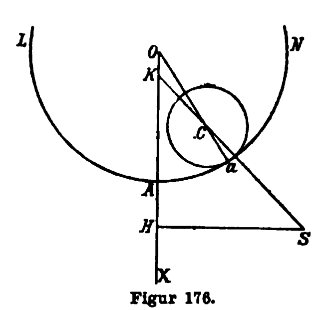
und indem wir für k^2 seinen Wert $\frac{1}{3}a^2$ in (5) setzen, finden wir

$$\frac{1}{3}a\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g(\varphi - \vartheta) = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind äquivalent den Gleichungen (2) und (3) in der vorhergehenden Untersuchung, und ist nun der weitere Verlauf der Rechnung derselbe wie dort.

Daniel Bernoulli, Novi Comment. Petrop. 1773, Tom. XVIII, p. 247. Euler, Ibid. p. 268. Walton, p. 562.

2. Ein Pendel von beliebiger Gestalt ist fest mit einem soliden Kreiscylinder verbunden, welcher die Axe bildet. Diese Axe wird in einer horizontalen Lage in ihren zwei Enden so unterstützt, dass sie innerhalb zweier horizontaler, hohler Kreiscylinder gleicher Abmessung ruht. Untersuche die kleinen Schwingungen des Pendels, welche einem beliebigen Anfangszustande von Verschiebung und Bewegung entsprechen, unter der Annahme vollkommen glatter Berührungsflächen.



Figur 176.

Es sei S (Fig. 176) der Schwerpunkt des Pendels und seiner Axe, beide zusammen als eine Masse betrachtet, zu einer beliebigen Zeit t der Bewegung. Die Ebene des Papieres stelle die vertikale Ebene durch S dar, welche die Axe des soliden Cylinders rechtwinkelig in dem Punkte C schneidet. LAN sei die Projektion der zu dieser Ebene parallelen Kreisschnitte der zwei hohlen Cylinder, O der Mittelpunkt des Kreisbogens LAN. Ziehe OAX vertikal, SH senkrecht zu OX. Die Gerade CS schneide die OX in K. Ziehe den Strahl OCa, so dass a der Berührungspunkt zwischen LAN und dem Kreisschnitte des soliden Cylinders ist. Lasse sein $OH=x$, $SH=y$, $AO=a$, $Ca=b$, $\sphericalangle AKC=\varphi$, $\sphericalangle COX=\vartheta$, $CS=c$, $M=$ der Masse des Pendels und seiner Axe zusammen, $k=$ ihrem Trägheitsradius um S, $R=$ der Reaktion des hohlen Cylinders auf die Axe.

Im vorliegenden Falle sind mit diesen Notationen die Bewegungsgleichungen

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=Mg-R\cos\vartheta, \quad (1) \qquad M\frac{d^2y}{dt^2}=-R\sin\vartheta, \quad (2)$$

$$Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-Rc\sin(\varphi-\vartheta). \quad (3)$$

Mit (1) und (2) erhalten wir, insofern nur kleine Grössen erster Ordnung berücksichtigt werden,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+g\vartheta=0, \quad (4)$$

und mit (1) und (3), in demselben Grade der Annäherung,

$$k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}+cg(\varphi-\vartheta)=0. \quad (5)$$

Nun giebt uns noch die Geometrie die Relation an die Hand

$$y=(a-b)\sin\vartheta+c\sin\varphi=(a-b)\vartheta+c\varphi, \text{ nahezu.}$$

Damit geht die (4) über in

$$(a-b)\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+c\frac{d^2\varphi}{dt^2}+g\vartheta=0. \quad (6)$$

Nehmen wir jetzt an, dass

$$\vartheta=\alpha\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{r}}\,t+\varepsilon\right\}, \qquad \varphi=\beta\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{r}}\,t+\varepsilon\right\},$$

so bekommen wir mit (5)

$$\beta(cr-k^2)=\alpha cr, \quad (7)$$

und durch (6)

$$c\beta = \alpha . \{r - (a - b)\}.$$

Mithin ist, wenn α und β eliminiert werden,

$$(c r - k^2)(r - a + b) = c^2 r.$$

Bezeichnen wir die zwei Wurzeln dieser quadratischen Gleichung in r durch m und m', so ergiebt sich für die allgemeinen Werte von ϑ und φ

$$\vartheta = \alpha \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m}}\, t + \varepsilon\right\} + \alpha' \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m'}}\, t + \varepsilon'\right\}, \tag{8}$$

$$\varphi = \beta \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m}}\, t + \varepsilon\right\} + \beta' \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m'}}\, t + \varepsilon'\right\}. \tag{9}$$

Die Relation (7) giebt, da β, β' die Werte von β, α, α' jene von α sind, welche den Werten m, m' von r entsprechen,

$$\beta = \frac{\alpha c m}{c m - k^2}, \qquad \beta' = \frac{\alpha' c m'}{c m' - k^2},$$

so dass damit die Gleichung (9) übergeht in

$$\varphi = \frac{\alpha c m}{c m - k^2} \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m}}\, t + \varepsilon\right\} + \frac{\alpha' c m'}{c m' - k^2} \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m'}}\, t + \varepsilon'\right\}. \tag{10}$$

In den Gleichungen (8) und (10) sind vier willkürliche Konstanten α, α', ε, ε' enthalten, welche bestimmt werden können, wenn die Anfangswerte von ϑ, φ, $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ gegeben sind.

Ist insbesondere $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, dann haben wir

$$\vartheta = \alpha \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m}}\, t + \varepsilon\right\}, \qquad \varphi = \beta \sin\left\{\sqrt{\frac{g}{m}}\, t + \varepsilon\right\}.$$

Es werden also in diesem Falle die Schwingungen durch ϑ und φ regelmässig und isochron sein, wobei die Zeit einer Vibration gleich $\pi\sqrt{\frac{m}{g}}$ ist.

Besitzen α' und β' endliche Werte, so sind die Schwingungen durch ϑ und φ aus zwei einfachen isochronen Schwingungen zusammengesetzt.

Euler, Acta Acad. Petrop. 1780, P. II, p. 133.
Walton, p. 566.

3. Das zur Erläuterung der zweiten Methode gegebene Problem können wir jetzt wie folgt behandeln.

Die einzigen bewegenden Kräfte sind hier die in dem Massenmittelpunkte S des Systemes angreifende Schwerkraft $= 2\, l g$ und die Centrifugalkraft $= \omega^2 (x + r \cos\vartheta) dr$, welche an jedem Elemente dr des Stabes parallel zu der Abscissenaxe $O X$ thätig ist. Das virtuelle Moment der ersteren

ist $=2lg\delta y$, dasjenige der letzteren $=\omega^2\int_{-l}^{+l}(l+r)\cos\vartheta . dr . \delta(l+r)\cos\vartheta$ $=-2l\frac{4}{3}l^2\omega^2\sin\vartheta . \cos\vartheta . \delta\vartheta$. Mithin ist die dynamische Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+k^2 . \frac{d^2\vartheta}{dt^2}=g\delta y-\frac{4}{3}l^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta . \delta\vartheta.$$

Die geometrischen Nebenbedingungen sind

$$x=l\cos\vartheta,\quad y=l\sin\vartheta,\quad \delta x=-l\sin\vartheta . \delta\vartheta,\quad \delta y=l\cos\vartheta . \delta\vartheta,$$

und giebt die Substitution

$$-\frac{d^2x}{dt^2}l\sin\vartheta+\frac{d^2y}{dt^2}l\cos\vartheta+k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=gl\cos\vartheta-\frac{4}{3}l^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Dieses ist dieselbe Gleichung, welche wir oben erhalten haben, der übrige Teil der Lösung ist derselbe wie dort.

4. Zwei Stäbe AB, BC sind durch ein glattes Charnier mit ihren Enden B verbunden und an einem festen Punkte mit dem Ende A des Stabes AB aufgehangen. Wie sind die kleinen Schwingungen des Systemes beschaffen?

Die Stäbe AB, BC mögen die kleinen Winkel ϑ, ϑ' mit der Vertikalen einschliessen. (x, y), (x', y') seien die Coordinaten ihrer Schwerpunkte, wobei x vom Aufhängepunkte vertikal abwärts gemessen werden soll. Lasse sein $2l$, $2l'$ die Längen der Stäbe AB, BC, $2lm$, $2l'm$ ihre Massen, k, k' ihre Trägheitsradien um ihre Schwerpunkte resp.

Damit ist die Bewegungsgleichung

$$l\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\delta\vartheta\right)$$
$$+l'\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x'+\frac{d^2y'}{dt^2}\delta y'+k'^2\frac{d^2\vartheta'}{dt^2}\delta\vartheta'\right)=gl\delta x+gl'\delta x',$$

und die geometrischen Nebenbedingungen sind

$$x=l\cos\vartheta,\quad y=l\sin\vartheta,\quad x'=2l\cos\vartheta+l'\cos\vartheta',\quad y'=2l\sin\vartheta+l'\sin\vartheta'.$$

Zunächst haben wir nun für δx, $\delta y, \ldots$ ihre Werte in die Bewegungsgleichung einzuführen. Da diese Gleichung nachträglich durch $\delta\vartheta$ oder $\delta\vartheta'$ geteilt werden muss, so muss sie in erster Linie korrekt für die Grössen zweiter Ordnung sein. Die Glieder auf der linken Seite enthalten $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ und können wir deshalb ihre Näherungswerte substituieren, indem wir nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigen; aber auf der rechten Seite müssen wir für die Werte von δx, δy auch die kleinen Grössen zweiter Ordnung in Rechnung ziehen. Die geometrischen Bedingungen geben

$$\delta x = -l\vartheta\delta\vartheta, \qquad \delta y = l\delta\vartheta, \qquad \delta x' = -2l\vartheta.\delta\vartheta - l'\vartheta'.\delta\vartheta',$$
$$\delta y' = 2l.\delta\vartheta + l'.\delta\vartheta',$$

und können wir also auf der linken Seite $\delta x = 0$, $\delta x' = 0$ nehmen. Folglich giebt die Substitution

$$\left(l\frac{d^2y}{dt^2} + 2l'\frac{d^2y'}{dt^2} + k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right)l\delta\vartheta$$
$$+\left(l'\frac{d^2y'}{dt^2} + k^2\frac{d^2\vartheta'}{dt^2}\right)l'\delta\vartheta' = -gl\vartheta(l+2l')\delta\vartheta - gl'^2\vartheta'\delta\vartheta'.$$

Weil aber $\delta\vartheta$ und $\delta\vartheta'$ von einander unabhängig sind, so zerfällt diese Gleichung in die zwei Relationen

$$l\frac{d^2y}{dt^2} + 2l'\frac{d^2y'}{dt^2} + k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g(l+2l')\vartheta,$$
$$l'\frac{d^2y'}{dt^2} + k'^2\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} = -gl'\vartheta'.$$

Indem wir in diese Gleichungen für y und y' ihre Näherungswerte einführen, welche sind $y = l\vartheta$, $y' = 2l\vartheta + l'\vartheta'$, gelangen wir zu

$$(4ll' + l^2 + k^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2l'^2\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} = -g(l+2l')\vartheta,$$
$$2ll'\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (l'^2 + k'^2)\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} = -gl'\vartheta'.$$

Um diese Gleichungen zu lösen, setzen wir

$$\vartheta = A\sin(nt+\alpha), \qquad \vartheta' = A'\sin(nt+\alpha),$$

womit wir erhalten

$$\{(4ll' + l^2 + k^2)A + 2l'^2A'\}n^2 = g(l+2l')A,$$
$$\{2ll'A + (l'^2 + k'^2)A'\}n^2 = gl'A'.$$

Die Elimination der Coëfficienten A und A' giebt

$$\{(4ll' + l^2 + k^2)n^2 - g(l+2l')\}\{(l'^2 + k^2)n^2 - gl'\} = 4ll'^3n^4,$$
$$\frac{A'}{A} = \frac{-2ll'n^2}{(l^2+k^2)n^2 - gl'}.$$

Die erste dieser Gleichungen ist eine in Beziehung auf n^2 quadratische Gleichung mit positiven Wurzeln; es seien die Wurzeln der Gleichung vierten Grades $\pm n_1$, $\pm n_2$, damit wird die Oscillation durch die zwei Gleichungen dargestellt

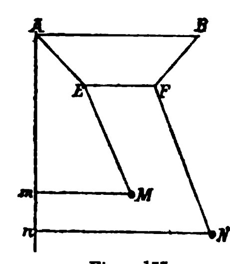
$$\vartheta = A_1\sin(n_1t+\alpha_1) + A_2\sin(n_2t+\alpha_2),$$
$$\vartheta' = A_1'\sin(n_1t+\alpha_1) + A_2'\sin(n_2t+\alpha_2).$$

Die vier willkürlichen Konstanten A_1, A_1', α_1, α_2 sind mit Hilfe der Anfangswerte von ϑ, ϑ', $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d\vartheta'}{dt}$ zu bestimmen. Die negativen Werte

von n geben nur dieselben Ausdrücke nochmals wieder. Mithin besteht die Bewegung aus zwei Oscillationen mit den Perioden $2\frac{\pi}{\sqrt{n_1}}$, $2\frac{\pi}{\sqrt{n_2}}$. Diese gehen zusammen weiter und stören sich einander in keiner Weise.

Würden wir drei in solcher Weise miteinander verbundene Stäbe betrachtet haben, so würden wir drei Schwingungen erhalten haben, u. s. f.

5. Ein unelastischer Faden $AEFB$ ist an zwei feste Punkte A, B (Fig. 177) in derselben horizontalen Linie gefesselt. Von E und F, welche Punkte so gewählt sind, dass $AE = EF = FB$ ist, hängen mittelst zweier Fäden EM, FN verschiedener Länge zwei gleiche Massen herab. Das System wird in seiner Ebene etwas aus seiner Gleichgewichtslage verschoben. Welches ist die Beschaffenheit seiner kleinen Schwingungen?



Figur 177.

Zu einer beliebigen Zeit t lasse EM, FN Winkel φ, φ' mit der Vertikalen machen. Zu derselben Zeit mögen AE, EF, BF Winkel $\alpha + \omega$, ω', $\alpha - \omega''$ mit der Horizontalen einschliessen, wobei α, 0, α die Werte dieser Winkel sind, wenn sich das System im Gleichgewichtszustande befindet. Ziehe Mm, Nn horizontal, die vertikale Linie Amn in den Punkten m, n treffend. Es sei $AE = EF = BF = a$, $EM = k$, $FN = k'$, $Am = x$, $Mm = y$, $AN = x'$, $Nn = y'$.

Damit giebt uns das Prinzip von D'Alembert in Verbindung mit dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten für die Bewegung des Systemes die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - g\right)\delta x + \left(\frac{d^2 x'}{dt^2} - g\right)\delta x' + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2 y'}{dt^2}\delta y' = 0. \qquad (1)$$

Unsere Aufgabe ist es nun x, y, x', y' durch ω, φ, φ' auszudrücken und ihre Werte in diese Gleichung einzuführen. Diese Berechnung muss bis auf die kleinen Grössen zweiter Ordnung bewirkt werden. Die aus der Figur sich ergebenden, hierzu zu verwendenden geometrischen Gleichungen sind

$$a \cos(\alpha + \omega) + a \cos \omega' + a \cos(\alpha - \omega'') = 2a \cos\alpha + a,$$

also

$$\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2\right) - \sin\alpha . \omega + 1 - \frac{1}{2}\omega'^2 + \cos\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\omega''^2\right) + \sin\alpha . \omega'' = 2\cos\alpha + 1,$$

womit $$\cos\alpha . \omega^2 + 2\sin\alpha . \omega + \omega'^2 + \cos\alpha . \omega''^2 - 2\sin\alpha . \omega'' = 0, \qquad (2)$$

und $$a \sin(\alpha + \omega) = a \sin\omega' + a \sin(\alpha - \omega'').$$

also $$\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2\right) + \cos\alpha . \omega = \omega' + \sin\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\omega''^2\right) - \cos\alpha . \omega'',$$

womit $$2\cos\alpha . \omega - \sin\alpha . \omega^2 = 2\omega' - \sin\alpha . \omega''^2 - 2\cos\alpha . \omega''. \qquad (3)$$

Nun bekommen wir mit (2), nur kleine Grössen erster Ordnung berücksichtigend,

$$2\sin\alpha\,.\,\omega = 2\sin\alpha\,.\,\omega'', \quad \text{d. i.} \quad \omega'' = \omega$$

und mittelst (3)

$$2\cos\alpha\,.\,\omega = 2\omega' - 2\cos\alpha\,.\,\omega'' = 2\omega' - 2\cos\alpha\,.\,\omega, \quad \text{d. i.} \quad \omega' = 2\cos\alpha\,.\,\omega.$$

Durch Substitution dieser Werte von ω', ω'' in die Glieder der zweiten Ordnung der Gleichungen (2) und (3) erhalten wir

$$(2\cos\alpha + 4\cos^2\alpha)\,\omega^2 + 2\sin\alpha\,.\,\omega - 2\sin\alpha\,\omega'' = 0$$

und

$$\cos\alpha\,.\,\omega = \omega' - \cos\alpha\,.\,\omega''.$$

Die zwei letzten Gleichungen zeigen uns, dass

$$(2\cos^2\alpha + 4\cos^3\alpha)\,\omega^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha\,.\,\omega - 2\sin\alpha\,.\,\omega' + 2\sin\alpha\cos\alpha\,.\,\omega = 0$$

und daher

$$\omega' = 2\cos\alpha\,.\,\omega + \frac{\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}{\sin\alpha}\,\omega^2. \tag{4}$$

Ferner bestehen, insoweit es unsere Annäherung verlangt, die Beziehungen

$$x = a\sin(\alpha+\omega) + k\cos\varphi = a\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2\right) + a\cos\alpha\,.\,\omega + k\left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2\right),$$

$$y = a\cos(\alpha+\omega) + k\sin\varphi = a\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2\right) - a\sin\alpha\,.\,\omega + k\,\varphi,$$

$$x' = a\sin(\alpha+\omega) - a\sin\omega' - k'\cos\varphi' = a\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2\right)$$

$$+ a\cos\alpha\,.\,\omega - a\,\omega' + k'\left(1 - \frac{1}{2}\varphi'^2\right)$$

$$= a\sin\alpha - a\cos\alpha\,.\,\omega - a\,.\,\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha + 4\cos^3\alpha}{\sin\alpha}\,\omega^2 + k'\left(1 - \frac{1}{2}\varphi'^2\right),$$

durch (4),

$$y' = a\cos(\alpha+\omega) + a\cos\omega' + k'\sin\varphi' = a\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2\right)$$

$$- a\sin\alpha\,.\,\omega + a\left(1 - \frac{1}{2}\omega'^2\right) + k'\varphi'.$$

Aus diesen Relationen folgt:

$$\delta x = -a\sin\alpha\,.\,\omega\,.\,\delta\omega + a\cos\alpha\,.\,\delta\omega - k\varphi\,.\,\delta\varphi, \quad \delta y = -a\sin\alpha\,.\,\delta\omega + k\,\delta\varphi,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\cos\alpha\,\frac{d^2\omega}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -a\sin\alpha\,\frac{d^2\omega}{dt^2} + k\,\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$\delta x' = -a\cos\alpha\,.\,\delta\omega - a\,.\,\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha + 4\cos^3\alpha}{\sin\alpha}\,.\,\omega\,.\,\delta\omega - k'\,.\,\varphi'\,.\,\delta\varphi'.$$

$$\delta y' = k'\delta\varphi' - a\sin\alpha\,.\,\delta\omega.$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -a\cos\alpha\,\frac{d^2\omega}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = k'\,\frac{d^2\varphi'}{dt^2} - a\sin\alpha\,\frac{d^2\omega}{dt^2}.$$

Mit diesen Werten von $\delta x, \delta y, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots,$ geht die Gleichung (1) über in

$$2a^2\cos^2\alpha\,.\,\frac{d^2\omega}{dt^2}\,\delta\omega + kg\varphi\,\delta\varphi + ga\,\frac{2 + 4\cos^3\alpha}{\sin\alpha}\,\omega\,\delta\omega + gk'\varphi'\delta\varphi' +$$

$$+\left(a\sin\alpha\frac{d^2\omega}{dt^2}-k\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)(a\sin\alpha\,\delta\omega-k\,\delta\varphi)$$
$$+\left(k'\frac{d^2\varphi'}{dt^2}-a\sin\alpha\frac{d^2\omega}{dt^2}\right)(k'\delta\varphi'-a\sin\alpha\,\delta\omega)=0.$$

Gleichen wir nun zu Null die Coëfficienten der von einander unabhängigen Grössen $\delta\varphi, \delta\varphi', \delta\omega$, so gelangen wir zu den Relationen:

$$k\frac{d^2\varphi}{dt^2}-a\sin\alpha\frac{d^2\omega}{dt^2}+g\varphi=0, \tag{5}$$

$$k'\frac{d^2\varphi'}{dt^2}-a\sin\alpha\frac{d^2\omega}{dt^2}+g\varphi'=0, \tag{6}$$

$$2a\frac{d^2\omega}{dt^2}-k\sin\alpha\frac{d^2\varphi}{dt^2}-k'\sin\alpha\frac{d^2\varphi'}{dt^2}+g\frac{2+4\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\omega=0. \tag{7}$$

Nun giebt die Elimination von $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ und $\frac{d^2\varphi'}{dt^2}$ zwischen (5), (6), (7)

$$2a\sin\alpha\cos^2\alpha\frac{d^2\omega}{dt^2}+g\{(2+4\cos^2\alpha)\omega+\sin^2\alpha.\varphi+\sin^2\alpha.\varphi'\}=0. \tag{8}$$

Bezeichnet jetzt r die Länge des mit einer der elementaren Schwingungen isochronen, einfachen Pendels und nehmen wir demgemäss

$$\omega=\Omega\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{r}}t+\varepsilon\right\},\quad \varphi=F\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{r}}t+\varepsilon\right\},\quad \varphi'=F'\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{r}}t+\varepsilon\right\},$$

dann erhalten wir durch (5), (6), (8)

$$(k-r)F=a\sin\alpha.\Omega,\qquad (k'-r)F'=a\sin\alpha.\Omega,$$

$$-2a\sin\alpha\cos^2\alpha\frac{1}{r}\Omega+(2+4\cos^2\alpha)\Omega+\sin^2\alpha.F+\sin^2\alpha.F'=0,$$

und gelangen wir durch Elimination der Konstanten F, F', Ω zu der cubischen Gleichung in r:

$$\frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha}{r}+\frac{\sin^3\alpha}{r-k}+\frac{\sin^3\alpha}{r-k'}-\frac{2+4\cos^2\alpha}{a}=0. \tag{9}$$

Bedeuten l, l', l'' die drei Wurzeln dieser Gleichung, so bekommen wir für die vollständige Lösung des Problemes

$$\omega''=\omega=\Omega\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}t+\varepsilon\right\}+\Omega'\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l'}}t+\varepsilon'\right\}+\Omega''\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l''}}t+\varepsilon''\right\}.$$

$$\omega'=2\cos\alpha.\omega.$$

$$\varphi=F_1\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}t+\varepsilon\right\}+F_2\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l'}}t+\varepsilon'\right\}+F_3\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l''}}t+\varepsilon''\right\},$$

$$\varphi'=F_1'\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}t+\varepsilon\right\}+F_2'\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l'}}t+\varepsilon'\right\}+F_3'\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l''}}t+\varepsilon''\right\}.$$

Diese Aufgabe kann auch in der folgenden Weise gelöst werden, wenn wir uns der Betrachtungsmethode von Euler anschliessen.

Es seien P, Q die Spannungen der Fadenstücke EM, FN, und m

bezeichne die Masse eines jeden der materiellen Punkte. Damit erhalten wir annähernd für die Bewegung der materiellen Punkte

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - P\cos\varphi = mg - P, \tag{1}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -P\sin\varphi = -mg\varphi, \tag{2}$$

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = mg - Q\cos\varphi' = mg - Q, \tag{3}$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = -Q\sin\varphi' = -mg\varphi'. \tag{4}$$

Diese vier Gleichungen sind insoweit richtig, als nur die kleinen Grössen erster Ordnung berücksichtigt werden.

Bezeichnet noch T die Spannung des Fadenstückes EF, dann ist hier, weil die drei auf den Punkt E wirkenden Spannungen im Gleichgewichte sein müssen,

$$\frac{T}{P} = \frac{\sin\left\{\varphi + \frac{\pi}{2} + \alpha + \omega\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \omega) + \frac{\pi}{2} - \omega'\right\}} = \frac{\cos(\alpha + \omega + \varphi)}{\sin(\alpha + \omega + \omega')}.$$

Gleicherweise ist für die Spannungen bei F

$$\frac{Q}{T} = \frac{\sin(\alpha - \omega'' - \omega')}{\cos(\alpha - \omega'' - \varphi')}.$$

Folglich ist
$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin(\alpha - \omega'' - \omega')\cos(\alpha + \omega + \varphi)}{\cos(\alpha - \omega'' - \varphi')\sin(\alpha + \omega + \omega')},$$

mithin, wenn nur die kleinen Grössen der ersten Ordnung berücksichtigt werden,

$$Q\{\sin\alpha + \cos\alpha(\omega + \omega')\}.\{\cos\alpha + \sin\alpha(\omega'' + \varphi')\}$$
$$= P\{\sin\alpha - \cos\alpha(\omega' + \omega''\}.\{\cos\alpha - \sin\alpha(\omega + \varphi)\}$$

und daher

$$Q\{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha(\omega'' + \varphi') + \cos^2\alpha(\omega + \omega')\}$$
$$= P\{\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha(\omega + \varphi) - \cos^2\alpha(\omega' + \omega'')\}. \tag{5}$$

Die Geometrie giebt uns die Gleichung

$$\cos(\alpha + \omega) + \cos\omega' + \cos(\alpha - \omega'') = 2\cos\alpha + 1,$$

demnach ist wenn nur die kleinen Grössen erster Ordnung beachtet werden,

$$-\sin\alpha\,.\,\omega + \sin\alpha\,.\,\omega'' = 0, \qquad \omega'' = \omega, \tag{6}$$

ferner
$$\sin(\alpha + \omega) = \sin\omega' + \sin(\alpha - \omega''),$$

so dass, wie vorhin,

$$\cos\alpha\,.\,\omega = \omega' - \omega''\cos\alpha = \omega' - \omega\cos\alpha, \qquad \omega' = 2\omega\cos\alpha. \tag{7}$$

Aus den Gleichungen (5), (6), (7) ergiebt sich

$$Q\{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha(\omega + \varphi') + \cos^2\alpha(1 + 2\cos\alpha)\omega\}$$
$$= P\{\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha(\omega + \varphi) - \cos^2\alpha(1 + 2\cos\alpha)\omega\}. \tag{8}$$

Jetzt eliminieren wir P und Q zwischen (1), (3) und (8), dadurch erhalten wir, wenn wir nur die kleinen Grössen erster Ordnung berücksichtigen,

$$\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - \frac{d^2 x'}{d t^2}\right) \sin\alpha \cos\alpha = -g\{(2 + 4\cos^2\alpha)\omega + \sin^2\alpha . \varphi + \sin^2\alpha . \varphi'\}. \quad (9)$$

Aber es ist

$$x = a \sin(\alpha + \omega) + k \cos\varphi = a \cos\alpha . \omega + \cdots$$
$$y = a \cos(\alpha + \omega) + k \sin\varphi = -a \sin\alpha . \omega + k\varphi + \cdots$$
$$x' = a \sin(\alpha + \omega) - a \sin\omega' + k' \cos\varphi' = a \cos\alpha . \omega - a\omega' + \ldots = -a \cos\alpha . \omega + \ldots$$
$$y' = a \cos(\alpha + \omega) + a \cos\omega' + k' \sin\varphi' = -a \sin\alpha . \omega + k'\varphi' + \cdots$$

Mit diesen Werten von x, y, x', y' gehen die Gleichungen (9), (2) und (4) über in

$$2 a \sin\alpha \cos^2\alpha \frac{d^2\omega}{dt^2} + g\{(2 + 4\cos^2\alpha)\omega + \varphi \sin^2\alpha + \varphi' \sin^2\alpha\} = 0,$$
$$k \frac{d^2\varphi}{dt^2} - a \sin\alpha \frac{d^2\omega}{dt^2} + g\varphi = 0,$$
$$k' \frac{d^2\varphi'}{dt^2} - a \sin\alpha \frac{d^2\omega}{dt^2} + g\varphi' = 0,$$

welches dieselben drei linearen Gleichungen wie die (5), (6), (7) in der ersten Lösung sind.

Wenn $k = k'$ ist, dann geht die kubische Gleichung (9) der ersten Lösung in eine quadratische über und die Variationen von $\omega, \varphi, \varphi'$ sind nicht mehr ausdrückbar durch die Zusammensetzung derselben elementaren Vibrationen. Dieses ist ein Beispiel des Misserfolges des Prinzipes der Coëxistenz kleiner Schwingungen.

Euler, Act. Acad. Petrop, 1779, P. II, p. 95. Walton, p. 569.

6. Ein hohler, kreisförmiger Ring ist mit einem Punkte seines Umfanges aufgehangen und ein materieller Punkt befindet sich auf seiner inneren Fläche. Beide machen kleine Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage in der Ebene des Ringes. Welches sind die Anzahl und die Perioden der coëxistenten Schwingungen des Systemes?

Bezeichnet a den Halbmesser des Ringes, M seine Masse. m diejenige des materiellen Punktes, dann sind die Perioden der zwei coëxistenten Schwingungen $\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$ und $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\sqrt{\frac{M}{M+m}}$.

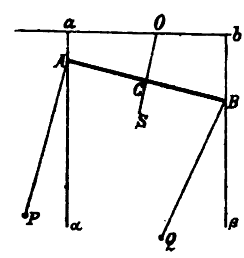
7. Eine dünne, halbkugelförmige Schale schwankt hin und her auf einer horizontalen Ebene, welche genügend rauh ist, um jedes Gleiten zu verhindern. Ein materieller Punkt, dessen Masse gleich derjenigen der Schale ist, ist an dem einen Ende eines feinen Fadens befestigt, während das andere Ende des Fadens an den Mittelpunkt der Schale gefesselt ist, der in fester Verbindung mit der Schale durch den Schalenrand steht; die Länge des Fadens ist gleich der halben Länge des Halbmessers der Schale. Bestimme die Anzahl und die Perioden der kleinen Schwingungen des Systemes unter der Voraussetzung, dass alle Moleküle des Systemes sich parallel zu einer vertikalen Ebene bewegen.

Hier haben wir zwei coëxistente Schwingungen, ihre Perioden sind gleich den zwei Werten von $\frac{\pi}{\sqrt{\varrho}}$, wobei ϱ durch die Gleichung gegeben ist

$$\varrho^2 - \frac{23}{4} \cdot \frac{g}{r} \varrho + \frac{3}{2} \cdot \frac{g^2}{r^2} = 0,$$

wenn r den Halbmesser der Schale bezeichnet.

8. Eine der Schalen einer gemeinen Wage ist eine kleine Verschiebung aus ihrer Ruhelage in einer durch den Wagebalken gehenden vertikalen Ebene erteilt worden. Wie ist die Beschaffenheit der schwingenden Bewegungen der zwei Schalen und des Balkens, zu welchen diese Verschiebung Veranlassung geben wird?



Figur 178.

Es sei O (Fig. 178) der Aufhängepunkt der ganzen Wage, S ihr Schwerpunkt, AB der Balken, P die eine, Q die andere der Schalen, welche als materielle Punkte gedacht sind. Ziehe die Horizontale aOb, die Vertikalen $aA\alpha$, $bB\beta$, setze $AC = a = BC$, $OC = b$, $OS = c$, $AP = l = BQ$, $Mk^2 =$ dem Trägheitsmomente des Balkens um O, $m =$ der Masse von P, resp. Q. Zu einer beliebigen Zeit t sei φ der Winkel, welchen der Balken mit dem Horizonte macht, $\measuredangle PA\alpha = \eta$, $\measuredangle QB\beta = \vartheta$. Auch setze

$$\frac{g}{l} = n^2, \quad \frac{b}{l} = h, \quad \frac{Mc + 2mb}{Mk^2} g = p^2, \quad -\frac{mb}{Mk^2} g = q,$$

und lasse $-\mu_1^2$, $-\mu_2^2$ die zwei Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 + (n^2 + p^2 - 2hq) z + n^2 p^2 = 0$$

sein. Dann erhalten wir unter Beachtung, dass anfangs

$$\varphi = 0, \quad \eta = \varepsilon, \quad \vartheta = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

wo ε eine bekannte Konstante ist, für die Bewegungen die Gleichungen

$$\varphi = \frac{2\varepsilon h p^2 q^2}{\mu_2^2 - \mu_1^2} (\cos \mu_1 t - \cos \mu_2 t),$$

$$2\eta = \frac{2\varepsilon h p^2 q}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \left(\frac{\cos \mu_1 t}{\mu_1^2 - p^2} - \frac{\cos \mu_2 t}{\mu_2^2 - p^2} \right) + \varepsilon \cos n t,$$

$$2\vartheta = \frac{2\varepsilon h p^2 q}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \left(\frac{\cos \mu_1 t}{\mu_1^2 - p^2} - \frac{\cos \mu_2 t}{\mu_2^2 - p^2} \right) - \varepsilon \cos n t.$$

Cambridge Mathematical Journal, Vol. II, p. 120.
5—7. Walton, p. 574—576.

Zweiter Abschnitt.

Kleine Schwingungen elastischer Systeme.

1. Längenschwingungen eines elastischen Stabes. Ein prismatischer Stab AB (Fig. 179) sei in einer vertikalen Lage an dem oberen Ende A befestigt. An seinem unteren Ende B werde ein Gewicht P angebracht, wodurch der Stab eine kleine Ausdehnung BC annimmt und

der Widerstand des Stabes mit dem Gewichte im Gleichgewichte ist. Nun werde das Gewicht gewaltsam in die Lage E gebracht und der um die Strecke CE weiter ausgedehnte Stab sich selbst überlassen, dann zieht sich der Stab infolge seiner Elastizität wieder zusammen. Diese Elastizitätskraft wirkt beschleunigend auf das untere Stabende, bis dasselbe in die Lage C zurückgekehrt ist, woselbst es die grösste Geschwindigkeit besitzt, so dass es nach aufwärts die Bewegung noch um eine gewisse Strecke CE' fortsetzt. Ist der Modulus der Elastizität für Expansion und Compression gleich gross und die Elastizität für eintretende Längenänderungen eine vollkommene, dann wird die Verkürzung EE' der Ausdehnung CE. Auf die Verkürzung folgt wieder eine Ausdehnung u. s. f., so dass das Stabende B auf- und abgehende Schwingungen macht, die in gleichen Zeiten vollendet werden.

Figur 179.

Es sei l die primitive Länge, k der konstante Querschnitt des Stabes, $a = BC$ die durch das Gewicht P bewirkte Ausdehnung, $b = CE$ die weitere gewaltsame Streckung, $x = CB'$ die variable Ausdehnung, welche in der Zeit t von der Gleichgewichtslage C aus erreicht wird, E der Elastizitätsmodulus des Stabes, g die Fallbeschleunigung.

Da die Kraft P, welche die erste Ausdehnung hervorbringt, proportional der Längenänderung, proportional dem Querschnitte und umgekehrt proportional der ursprünglichen Länge des Stabes ist, so besteht die Gleichung

$$P = E \, . \, k \frac{a}{l}. \tag{1}$$

Folglich ist die Kraft P', welche dem Stabe die Längenänderung $a + x$ beibringt,

$$P' = E \, . \, k \, . \frac{a + x}{l}.$$

Diese Kraft kann auch als der Widerstand angesehen werden, welcher sich der Ausdehnung des Stabes entgegensetzt, so dass die Differenz

$$E \, . \, k \, . \frac{a + x}{l} - E \, . \, k \, . \frac{a}{l} = E k \, . \frac{x}{l} \tag{3}$$

der Kräfte P' und P den Widerstand darstellt, welchen der Stab der Bewegung des Gewichtes P abwärts entgegensetzt. Bezeichnet g' die Beschleunigung, mit der die abwärtsgehende Bewegung in B' erfolgt, da das Gewicht P nicht mit der Beschleunigung g frei herabfällt, so haben wir, weil die Beschleunigungen proportional den sie erzeugenden Kräften sind,

$$g' : g = E k \, . \frac{x}{l} : E k \frac{a}{l} = x : a, \quad \text{d. i.} \quad g' = g \, . \frac{x}{a},$$

mithin erhalten wir für das untere Stabende die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{g}{a} x = -\alpha^2 . x. \tag{4}$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$x = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t,$$

so dass die Geschwindigkeit des Punktes E

$$\frac{dx}{dt} = A \alpha \cos \alpha t - B \alpha \sin \alpha t.$$

Bezeichnet $b = CE$ die grösste gewaltsame Dehnung, so ist, da dann zur Zeit $t = 0$, $x = b$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $A = 0$, $B = b$, mithin

$$x = b \cos \alpha t = b \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t, \quad \frac{dx}{dt} = -b \alpha \sin \alpha t = -b \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t,$$

wodurch die Bewegung des Stabendes B vollständig bestimmt ist.

Weil der Wert von $\cos \sqrt{\frac{g}{a}} t$ zwischen $+1$ und -1 liegt, so ergiebt sich daraus, dass die Strecke x nie grösser als b werden kann, d. h. der Körper geht nie weiter als nach E, wobei $CE = b$ ist, er kommt daselbst an zu den Zeiten $t = 0,\ 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}},\ 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}},\ 6\pi \sqrt{\frac{a}{g}}, \ldots$, wenn also $\cos \sqrt{\frac{g}{a}} t = +1$ ist. Ferner erhebt sich das Stabende nicht über einen gewissen Punkt E', es kommt daselbst an zu den Zeiten $t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}},\ 3\pi \sqrt{\frac{a}{g}},\ 5\pi \sqrt{\frac{a}{g}}, \ldots$, d. h. wenn $\cos \sqrt{\frac{g}{a}} t = -1$ ist, und wird x nie kleiner als $-b$. Die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ ist ein Maximum mit $\sin \sqrt{\frac{g}{a}} t = 1$, oder $\cos \sqrt{\frac{g}{a}} t = 0$, d. h. wenn $x = 0$, oder wenn der Körper mit seinem unteren Ende durch C geht; sie ist ein Minimum mit $\sin \sqrt{\frac{g}{a}} t = 0$, d. h. mit $x = \pm b$, wenn also der Stab in den Punkten E und E' mit seinem unteren Ende anlangt. Daraus folgt, dass die Bewegung eine regelmässig oscillierende ist und dass die Zeit einer vollen Schwingung die Gleichung giebt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{Pl}{gkE}}, \quad \text{mit} \quad a = \frac{Pl}{Ek}.$$

Diese Zeit stimmt überein mit der Schwingungszeit eines mathematischen Pendels von der Länge a.

Nehmen wir an, dass jedesmal, wenn das Stabende wieder in E' ankommt, dieses Ende eine Geschwindigkeit c in der Richtung EB durch

einen kleinen Stoss empfängt, und es befinde sich zu einem bestimmten Zeitmomente das Stabende eben in E, von wo ab die Zeit t gerechnet werden möge, alsdann ist wie vorhin

$$x = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t.$$

Zur Zeit $t = 0$ ist aber jetzt $x = b$, $\frac{dx}{dt} = -c$, so dass $A = -\frac{c}{\alpha}$, $B = b$, mithin

$$x = -\frac{c}{\alpha} \sin \alpha t + b \cos \alpha t.$$

Nach der Zeit $2\frac{\pi}{\alpha}$ erlangt x wieder denselben Wert, wodurch die Schwingungsdauer dieselbe bleibt. $\frac{dx}{dt}$ wird jetzt gleich Null sein, wenn

$$-c \cos \alpha t - \alpha b \sin \alpha t = 0, \quad \text{d. i. wenn} \quad tg\, \alpha t = -\frac{c}{\alpha b}.$$

Zunächst ergiebt sich für αt ein Wert zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, etwa γ, ebenso auch $\gamma + \pi$, $\gamma + 2\pi, \ldots$, so dass also die Werte der Zeit t, für welche x ein Maximum oder ein Minimum ist, sind

$$\frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{(\gamma + \pi)}{\alpha}, \quad \frac{(\gamma + 2\pi)}{\alpha}, \ldots,$$

die erste, dritte, ..., geben Minima, die anderen Maxima. Für die ersten wird

$$x = -\frac{\frac{c}{\alpha} \cdot \frac{c}{\alpha . b} + b}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{\alpha^2 b^2}}} = -\sqrt{b^2 + \frac{c^2}{\alpha^2}},$$

für die letzteren

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{\alpha^2}}.$$

Da dieser Ausdruck grösser als b wird, so wird auch die Ausdehnung der Schwingung grösser als früher sein. Wenn mithin der Körper jedes mal bei seiner Ankunft in dem tiefsten Punkte einen kleinen Stoss erhält, so werden seine Schwingungen immer grösser und grösser werden und schliesslich wird der Stab, wenn seine Elastizität dieser Ausdehnung nicht mehr Widerstand leisten kann, zerreissen. Daraus erklärt sich die Beobachtung Savart's, dass, wenn man den benetzten Finger in regelmässigen Zwischenzeiten an einem elastischen Stabe hin- und herführt, derselbe in Schwingungen von messbarer Weite versetzt werden kann. Hieraus erklärt sich auch das Zerreissen von Kettenbrücken unter dem regelmässigen Tritt von Soldaten.

Die Gleichung für die Schwingungszeit giebt für den Elastizitätsmodulus

$$E = 4\pi^2 \frac{Pl}{T^2 kg}.$$

Beobachten wir demnach die Schwingungszeit T, so können wir mit Hilfe dieser Formel den Elastizitätsmodulus E berechnen.

Die entwickelten Gleichungen gelten auch für den Fall, wenn der Stab nicht einer Ausdehnung, sondern einer Zusammenpressung unterworfen wird, die ganze Bewegung findet dann nur in umgekehrtem Sinne statt. Bezeichnet jetzt x den Abstand eines beliebigen Stabquerschnittes von dem Aufhängepunkte, dann ist die Amplitude desselben $y = \frac{x}{l} a$, aber seine Schwingungszeit dieselbe wie für den Punkt C, so dass alle Elemente des Stabes von C nach A isochron schwingen.

2. Querschwingungen eines elastischen Stabes. Ein prismatischer Stab AB (Fig. 180) sei in einer horizontalen Lage mit dem einen Ende A befestigt; an seinem anderen Ende B werde ein Gewicht P angehangen, wodurch der Punkt B eine kleine Senkung $BC = a$ annimmt, der Stab in die gekrümmte Lage AC gelangt, in dieser Lage sei zwischen den inneren und äusseren Kräften Gleichgewicht. Nun werde der Stab gewaltsam in die Lage AE gebracht, so dass die Senkung um die Strecke $CE = b$ zunimmt, hierauf sich selbst überlassen, dann wird der Stab in der Ebene $ABCE$ auf- und abgehende Schwingungen machen, wenn die Biegung desselben innerhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität geblieben ist. Die Bewegung rechnen wir vom Punkte C aus abwärts; es sei der von dem Aufhängepunkte des Gewichtes in der Zeit t zurückgelegte Weg $CD = x$. Bezeichnet l die Länge des Stabes, E seinen Elastizitätsmodulus, so lehrt die Untersuchung der Festigkeit der Körper, dass die Kraft P, welche die Senkung a bewirkt, durch die Gleichung gegeben ist



Figur 180.

$$P = 3\frac{E}{l^3} \cdot a, \tag{1}$$

folglich ist die eine Senkung $(a + x)$ hervorbringende Kraft

$$P' = 3\frac{E}{l^3}(a + x). \tag{2}$$

Mithin ist der Widerstand, welchen der Stab einer weiteren Bewegung abwärts entgegensetzt,

$$P' - P = 3\frac{E}{l^3} x.$$

Für die Beschleunigung g' des freien Stabendes haben wir die Proportion

$g' : g = 3\frac{E}{l^3}x : 3\frac{E}{l^3}a, = x : a,$ so dass $g' = \frac{g}{a}\cdot x$. Die Bewegung des freien Stabendes ist mithin durch die Gleichung gegeben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{a}x. \tag{3}$$

Das ist dieselbe Gleichung wie vorhin, mit ihr erhalten wir

$$x = b\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t, \quad \frac{dx}{dt} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{Pl^3}{3gE}}.$$

Das freie Stabende schwingt also ebenso vertikal auf und ab wie in dem vorhergehenden Falle, nur ist, unter sonst gleichen Umständen, die Grösse a hier eine andere.

Liegt der Stab AA_1 (Fig. 181) in beiden Enden frei auf, belasten wir denselben in seiner Mitte C mit einem Gewichte P, bezeichnet l seine natürliche Länge ABA_1, $a = BC$ die durch das Gewicht P hervorgerufene vertikale Senkung in der Mitte, $b = CE$ die weitere hervorgebrachte Senkung in der vertikalen Ebene durch ABA_1, so ist im vorliegenden Falle nach der Elastizitätslehre

Figur 181.

$$a = \frac{l^3}{384E}(8P + 5lp),$$

wenn p die über den Stab gleichförmig verteilte Last bezeichnet, oder mit $p = 0$, was wir hier voraussetzen wollen, $a = \frac{Pl^3}{48E}$, folglich die Zeit einer kompleten Oscillation

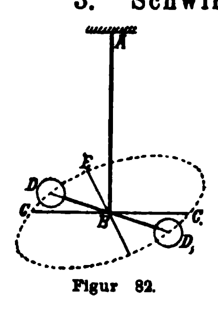
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{Pl^3}{48gE}}.$$

Die Auflösung der Gleichungen für die Schwingungszeit nach E giebt

$$E = \frac{Pl^3}{48a}, \quad \text{und} \quad E = \frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{Pl^3}{gT^2}.$$

Durch die Beobachtung der Schwingungszeiten können mithin mittelst dieser Formel die Coëfficienten E in diesen Fällen berechnet werden.

3. Schwingungen eines Torsionspendels. Ein elastischer Cylinder AB (Fig. 182) ist mit seinem oberen Ende A in einer vertikalen Lage befestigt. Das untere Ende desselben trägt eine horizontale Stange DD_1 mit gleichen Armen BD, BD_1, an deren Endpunkten gleiche Gewichte angebracht sind. In der Gleichgewichtslage, d. h. wenn der Cylinder nicht verdreht ist, ist CBC_1 die Lage der Stange. Wird der Stab BC in einer horizontalen Ebene um den Winkel $EBC = \alpha$ gedreht,



Figur 82.

so verdreht sich der Cylinder und entsteht ein statisches Moment einer sämtliche Cylinderfasern schraubenförmig verdrehenden Kraft. Bezeichnet e den Elastizitätsmodulus des Materiales des Cylinders für Torsionsfestigkeit, l die Länge AB des Cylinders, r seinen Radius, so zeigt die Festigkeitslehre, dass dieses verdrehende Moment gleich $\frac{\pi e r^4}{2l}\alpha = f.\alpha$ ist.

Überlassen wir nun das Pendel in der Lage BE sich selbst, dann nimmt der Drehwinkel während der Zeit t um $\alpha - \varphi$ ab, wenn $\measuredangle CBD = \varphi$ und DBD_1 die Lage der Stange zu der Zeit t ist, und es ist zu dieser Zeit das Torsionsmoment gleich $\frac{\pi e r^4}{2l}\varphi = f\varphi$.

Dieses statische Moment treibt die Gewichte D, D_1 gegen die Gleichgewichtslage und da die treibende Kraft erst mit $\varphi = 0$ zu Null wird, so ist die Bewegung bis dahin ein beschleunigte. Jetzt setzt die Stange DD_1 ihre Bewegung mit abnehmender Geschwindigkeit fort, wieder eine Verdrehung des Cylinders, aber in entgegengesetztem Sinne wie vorher, erzeugend. Dadurch entsteht eine schwingende Bewegung mit konstanter Schwingungsweite, wenn die Anstrengung des Cylinders innerhalb der Grenze vollkommener Elastizität bleibt. Wir nehmen an, dass sämtliche schwingende Massen in Trägheitsmittelpunkte vereinigt seien, dann haben sie für diesen Punkt denselben Einfluss auf die Drehung, wie in ihrer wirklichen Lage. Der Abstand dieses Mittelpunktes der Trägheit von der Drehaxe sei k, das Gewicht der in diesem Punkte vereinigten Massen P, dann besteht für das drehende Moment die Gleichung

$$Pk = \frac{\pi e r^4}{2l}\varphi = f\varphi,$$

so dass die drehende Kraft $P = \frac{\pi e r^4}{2kl}\varphi = \frac{f}{k}\varphi$ ist.

Bringen wir dabei nur das Gewicht der Kugeln in Rechnung, so ist einfach $k = BD = BD_1 = a =$ dem Abstande der Kugelmittelpunkte vom Aufhängepunkte der Stange.

Bezeichnet jetzt g' die Beschleunigung des Gewichtes P in D, dann muss offenbar die Relation bestehen: $g' : g = \frac{\pi e r^4}{2kl}\varphi : P = \frac{f}{a}\varphi : P$, d. h. $g' = \frac{g}{P}\cdot\frac{f}{a}\varphi$.

Ist ferner $x =$ dem Bogen $CD = a\varphi$, so ist $\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, und daher erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{P}\cdot\frac{f}{a}\varphi, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\mu^2\varphi.$$

Durch diese Gleichung ergiebt sich

$$\varphi = A \sin \mu t + B \cos \mu t, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu (A \cos \mu t - B \sin \mu t).$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $\varphi = \alpha$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, folglich $A = 0$, $B = \alpha$, daher

$$\varphi = \alpha \cos \mu t, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\mu \alpha \sin \mu t,$$

oder

$$\varphi = \alpha \cos \left\{ t \sqrt{\frac{g}{P} \cdot \frac{\pi e r^4}{2 a^2 l}} \right\}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\alpha \sqrt{\frac{g}{P} \cdot \frac{\pi e r^4}{2 a^2 l}} \sin \left\{ t \sqrt{\frac{g}{P} \cdot \frac{\pi e r^4}{2 a^2 l}} \right\}.$$

Für die Zeit einer vollen Schwingung erhalten wir

$$T = 2 \frac{\pi}{\mu} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g} \cdot \frac{a^2}{\frac{\pi e r^4}{2 l}}} = 2\pi \frac{a}{r^2} \sqrt{\frac{P}{g} \cdot \frac{2 l}{\pi e}}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für die drehende Kraft

$$P = \frac{g T^2 e r^4}{8 \pi a^2 l}.$$

Dritter Abschnitt.

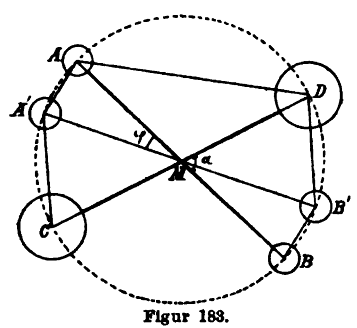
Das Experiment von Cavendish.

Um zu zeigen, dass die Theorie kleiner Schwingungen als Entdeckungsmittel angewendet werden kann, wählen wir das Experiment von Cavendish. Dieses Experiment hat den Zweck, die Masse der Erde mit derjenigen eines gegebenen Körpers zu vergleichen. Der Plan, um dieses mittelst eines Torsionsstabes zu bewirken, ging zuerst von dem Rev. John Michell aus. Als dieser vor der Zeit der Beendigung seiner Versuche starb, wurde sein Plan von Mr. Cavendish aufgenommen, welcher das Resultat seiner Arbeiten in „The Phil. Transactions for 1798" veröffentlichte. Seine Experimente waren nicht zahlreich, so dass es wichtig erschien, eine weitere Bestimmung zu erhalten. Demgemäss setzte die Behörde im Jahre 1837 einen Preis von 500 £ zur Bestreitung neuer Experimente aus. Die Theorie und die analytischen Formeln wurden durch Sir G. Airy ergänzt, die Anordnung des Operationsplanes und die Arbeiten zur Anstellung der Versuche unternahm Mr. Baily. Mr. Baily machte an 2000 Experimente mit Kugeln von verschiedenen Gewichten und Grössen, die in mannigfaltiger Weise aufgehangen wurden, eine vollständige Beschreibung davon ist gegeben in „The Memoires of the Astronomical Society, Vol. XIV". Die Experimente kamen im allgemeinen in folgender Weise zur Ausführung. Zwei gleiche, kleine Kugeln wurden an den Enden eines dünnen Stabes, des sogenannten Torsionsstabes, befestigt und der Stab selbst wurde in seinem Mittelpunkte C mittelst einer Schnur aufgehangen. Zwei grosse, sphärische Massen A und B wurden an den Enden einer Planke befestigt, welche sich frei um ihren Mittelpunkt O drehen konnte. Der Punkt O befand sich vertikal unter C und so placiert, dass die vier Schwerpunkte der vier Kugeln in einer horizontalen Ebene lagen. Die Massen A und B übten auf die kleinen Kugeln eine Attraktion aus und es entstanden infolge der Elastizität des Fadens, welcher bei der Bewegung dieser

Kugeln verdreht wurde, kleine Schwingungen, die zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde verwertet werden konnten.

Wir geben zwei Lösungen dieses Problemes.

1. Es sei AB (Fig. 183) der dünne, prismatische, hölzerne Torsionsstab, dessen Enden A, B zwei gleiche Bleikugeln tragen, M seine Mitte, in welcher er durch einen dünnen Draht aufgehangen ist, und AB seine Gleichgewichtslage. Drehen wir den Stab in die Lage $A'B'$, so wird er vermöge der Elastizität des Aufhängedrahtes um die Gleichgewichtslage AB Schwingungen machen, wenn er darauf sich selbst überlassen bleibt. Bringen wir nun in der Schwingungsebene in einer Geraden CMD in gleicher Entfernung von M zwei gleich grosse Massen, etwa grosse Bleikugeln in fester Lage an, dann werden die Kugeln A, B von den Massen C, D angezogen und schwingen infolge der Elastizität des Drahtes um den Aufhängepunkt M. Diese Attraktion findet nach dem Gravitationsgesetze statt.



Figur 183.

Nun sei $AM = BM = a$, $CM = DM = b$, $\measuredangle DMB = \alpha$, welchen die Anfangslage MB mit der Geraden MD einschliesst, $\varphi =$ dem variablen Winkel AMA' zwischen der Anfangslage und der Lage des Torsionsstabes zur Zeit t, e die Beschleunigung, welche die Anziehung der Kugel A auf eine Masseneinheit der Kugel C im Abstande Eins beider Kugeln von einander hervorbringt, m die Masse einer jeden der Kugeln C, D.

Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze sind die Beschleunigungen, welche die Kugeln C, D der Kugel A' beibringen, und zwar der Kugel C in der Richtung $CA' = e\dfrac{m}{\overline{CA'}^2}$, der Kugel D in der Richtung $DA' = e\dfrac{m}{\overline{DA'}^2}$. Diese Beschleunigungen lassen sich in Componenten parallel und senkrecht zum Torsionsstabe zerlegen, von welchen nur die letzteren für die Bewegung in Frage kommen, diese sind

$$em\frac{\sin \measuredangle MA'C}{\overline{A'C}^2}, \quad em\frac{\sin \measuredangle MA'D}{\overline{A'D}^2}.$$

Die erste dieser Seitenbeschleunigungen wächst mit φ, die zweite nimmt mit wachsendem φ ab und beide haben entgegengesetztes Drehungsbestreben, so dass die resultierende Beschleunigung, welche die Kugeln C, D der Kugel A' beibringen, gleich

$$em\left(\frac{\sin \measuredangle MA'C}{\overline{A'C}^2} - \frac{\sin \measuredangle MA'D}{\overline{A'D}^2}\right) \tag{1}$$

ist. Durch die Dreiecke CMA' und DMA' erhalten wir die Proportionen

$b : \overline{A'C} = \sin \measuredangle MA'C : \sin(\alpha - \varphi)$, $b : \overline{A'D} = \sin \measuredangle MA'D : \sin(\alpha - \varphi)$,
so dass

$$\sin \measuredangle MA'C = \frac{b}{\overline{A'C}} \cdot \sin(\alpha - \varphi), \quad \sin \measuredangle MA'D = \frac{b}{\overline{A'D}} \sin(\alpha - \varphi).$$

Mit diesen Werten geht der Ausdruck (1) über in

$$b\, e\, m \sin(\alpha - \varphi) \left\{ \frac{1}{\overline{A'C}^3} - \frac{1}{\overline{A'D}^3} \right\}. \tag{2}$$

Ferner ist durch die Geometrie

$\overline{A'C}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \varphi)$, $\overline{A'D}^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \varphi)$.
Weil aber der Schwingungswinkel φ sehr klein ausfällt, so können wir näherungsweise setzen $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$, $\cos(\alpha - \varphi) = \cos\alpha + \varphi \sin\alpha$, womit

$$\overline{A'C}^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos\alpha + \varphi\sin\alpha),$$
$$\overline{A'D}^2 = a^2 + b^2 + 2ab(\cos\alpha + \varphi\sin\alpha),$$

oder, wenn wir zur Abkürzung schreiben

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = p^2, \qquad a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = q^2,$$
$$\overline{A'C}^2 = p^2 - 2ab\varphi\sin\alpha, \qquad \overline{A'D}^2 = q^2 + 2ab\varphi\sin\alpha.$$

Die Erhebung dieser Grössen auf die Potenz $-\frac{3}{2}$ und ihre Entwickelung nach dem Taylor'schen Satze giebt

$$\frac{1}{\overline{A'C}^3} = \frac{1}{p^3} + \frac{3ab\sin\alpha}{p^5}\varphi + \cdots, \qquad \frac{1}{\overline{A'D}^3} = \frac{1}{q^3} - \frac{3ab\sin\alpha}{q^5}\varphi - \cdots$$

Die Glieder mit den höheren Potenzen von φ können vernachlässigt werden. Nun ist

$$\left(\frac{1}{\overline{A'C}^3} - \frac{1}{\overline{A'D}^3}\right) = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3} + 3ab\sin\alpha \,.\, \varphi\left(\frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5}\right).$$

$$\left(\frac{1}{\overline{A'C}^3} - \frac{1}{\overline{A'D}^3}\right)\sin(\alpha - \varphi) = \left\{\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3} + 3ab\sin\alpha.\varphi\left(\frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5}\right)\right\}(\sin\alpha - \varphi\cos\alpha)$$
$$= \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right)\sin\alpha - \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right)\varphi\cos\alpha + 3ab\sin^2\alpha\,\varphi\left(\frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5}\right) - \cdots,$$

wobei wir wieder die Glieder mit den höheren Potenzen von φ vernachlässigen können, oder, wenn wir schreiben

$$\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right)\sin\alpha = h, \quad 3ab\sin^2\alpha \,.\, \varphi\left(\frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5}\right) - \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right)\varphi\cos\alpha = k\varphi,$$

$$\left(\frac{1}{\overline{A'C}^3} - \frac{1}{\overline{A'D}^3}\right)\sin(\alpha - \varphi) = h + k\varphi.$$

Damit geht der Ausdruck (2) über in

$$e\, m\, b\,(h + k\varphi), \tag{3}$$

womit die Beschleunigung der Kugel A' durch die Attraktion bestimmt ist.

Die Elastizität des Aufhängedrahtes kann dem Torsionswinkel φ pro-

portional gesetzt werden, so dass auch die dieser Kraft entsprechende Beschleunigung proportional φ genommen und gleich $n\varphi$ gewählt werden kann. Diese Beschleunigung wirkt entgegen der durch die beiden Kugeln C, D auf die Kugeln A', B' ausgeübten Beschleunigung, welche offenbar das Doppelte der Beschleunigung (3) ist. Bezeichnet jetzt x den Bogen AA', so ist $x = a\varphi$, und wir gelangen zu der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2emb(h + k\varphi) - n\varphi,$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{a}\{(2embk - n)\varphi + 2embh\}. \tag{4}$$

Multiplizieren wir mit $2\,d\varphi$ und integrieren, so kommt, wenn wir dabei dt als konstant ansehen,

$$a\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 4embh\varphi + (2embk - n)\varphi^2, \tag{5}$$

eine Integrationskonstante ist nicht hinzuzufügen, weil mit $t = 0$, $\varphi = 0$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ist.

Bei einer bestimmten Lage des Torsionsstabes sind der Torsionswiderstand und die Attraktion der Kugeln im Gleichgewichte, es sei φ' der entsprechende Ausschlagwinkel des Stabes. Für diese Ruhelage ist die Beschleunigung gleich Null und giebt die (4) mit $\varphi = \varphi'$

$$2embk - n = -\frac{2embh}{\varphi'},$$

womit die (5) übergeht in

$$a\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2embh}{\varphi'}(2\varphi'\varphi - \varphi^2). \tag{6}$$

Weil nun $a\frac{d\varphi}{dt}$ die Geschwindigkeit der Bewegung ist, so muss diese Grösse zu beiden Seiten des Schwingungsbogens gleich Null sein, und liefert mit diesem Werte die (6)

$$2\varphi'\varphi - \varphi^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \varphi(2\varphi' - \varphi) = 0.$$

Die Wurzeln vorstehender Gleichung sind $\varphi = 0$, und $\varphi = 2\varphi'$, der erste Wert entspricht dem Anfange, der zweite dem Ende einer Schwingung, so dass der Schwingungsbogen gleich dem doppelten der Ablenkung φ' ist.

Um die Schwingungszeit zu bestimmen, haben wir die Veränderlichen zu trennen, dabei beachtend, dass φ mit t wächst, also für $d\varphi$ und dt gleiche Zeichen zu wählen, was giebt

$$dt\sqrt{\frac{2embh}{a\varphi'}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{2\varphi'\varphi - \varphi^2}}.$$

Durch die Integration dieser Gleichung bekommen wir

$$t\sqrt{\frac{2\,e\,m\,b\,h}{a\,\varphi'}} = arc\left(sin = \frac{\varphi - \varphi'}{\varphi'}\right) + C.$$

Aber für $t = 0$ ist $\varphi = 0$, folglich $C = arc\,(sin = 1) = \frac{\pi}{2}$, und mithin

$$t\sqrt{\frac{2\,e\,m\,b\,h}{a\,\varphi'}} = \frac{\pi}{2} + arc\left(sin = \frac{\varphi - \varphi'}{\varphi'}\right).$$

Mit $\varphi = 2\,\varphi'$ ergiebt sich hieraus die Zeit einer einfachen Schwingung, nämlich

$$T = \pi\sqrt{\frac{a\,\varphi'}{2\,e\,m\,b\,h}}. \tag{7}$$

Bezeichnet nun L die Länge eines Sekundenpendels, g die Fallbeschleunigung, M die Masse der Erde, ϱ das Gewicht der Kubikeinheit Erdmasse von mittlerer Dichtigkeit, R den Radius der kugelförmig gedachten Erde, G ihr Gewicht, m die Masse, G_1 das Gewicht einer jeden der Bleikugeln C, D, so lässt sich die Formel für die Schwingungszeit des Torsionsstabes wie folgt zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erdmasse brauchbar machen.

Die Länge des Sekundenpendels ist $L = \frac{g}{\pi^2}$, die Beschleunigung einer der Kugeln A, B, welche als schwerer Körper des Sekundenpendels angesehen werden kann, durch die Erdmasse $g = e\frac{M}{R^2}$, so dass

$$L\,\pi^2 = e\,.\,\frac{M}{R^2}. \tag{8}$$

Jetzt giebt die Elimination der Beschleunigung e zwischen den Gleichungen (7) und (8)

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a\,\varphi'}{2\,b\,h\,L}\cdot\frac{M}{m}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a\,\varphi'}{2\,b\,h\,L}\cdot\frac{G}{G_1}}. \tag{9}$$

Weil aber $G = \frac{4}{3}R^3\pi\varrho$ ist, so ergiebt sich aus (9) für die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse

$$\varrho = \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{b\,h}{a\,\varphi'}\cdot\frac{L}{R}\,T^2\,G_1, \tag{10}$$

mit welcher Formel dieselbe berechnet werden kann.

Nach Schmidt's mathematischer und physikalischer Geographie ergaben sich durch die Experimente von Cavendish (1797—1798), wobei der englische Zoll als Längeneinheit und das Gewicht eines Kubikzolles Wasser als Gewichtseinheit galt, im Mittel folgende Resultate:

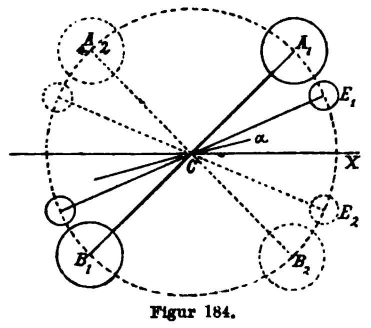
Gewicht einer der Bleikugeln $C, D = 9662{\cdot}3$; Armlänge $a = b = 36{\cdot}65$; Winkel $\alpha = 13^0\,58'26''$; Bogen (für den Halbmesser = 1) $\varphi' = 0{\cdot}0079373$; Schwingungszeit $T = 424{\cdot}5$ Sekunden.

Werden mit diesen Werten von a, b, α die Grössen p und q, sodann h berechnet, alsdann ergiebt sich $\log h = 6{\cdot}53156 - 10$. Für das Verhältnis $\frac{L}{R}$ ist $\log\left(\frac{L}{R}\right) = 3{\cdot}19329 - 10$. Mit diesen Daten erhalten wir durch (10)

$$\varrho = 5{\cdot}52.$$

Autenheimer, Elementarbuch der Differentialrechnung etc.

2. Die hier folgende Lösung des Problemes ist bei weitem eleganter. Zuerst wollen wir annehmen, dass die Planke, an welcher die beiden grossen sphärischen Massen A, B (Fig. 184) befestigt sind, rechtwinkelig zu dem Torsionsstabe gestellt sei, dann wird der Torsionsstab eine Gleichgewichtslage annehmen, in welcher der Faden keine Verdrehung besitzt. Diese Lage wird die neutrale Lage genannt und es sei dieselbe in der Figur durch den Strahl $C\alpha$ dargestellt. Nun drehen wir die Massen A, B rund um O in die Lage $B_1 A_1$, welche einen kleinen Winkel mit der neutralen Lage des Torsionsstabes einschliesst. Die Attraktionen der Massen A, B auf die Kugeln werden den Torsionsstab aus seiner neutralen Lage heraus in eine neue Gleichgewichtslage ziehen, in welcher die ganze Attraktion durch die Torsion des Fadens balanciert ist; diese Lage gebe die Linie CE_1. Der Deviationswinkel $E_1 C\alpha$ und die Schwingungszeit des Stabes um diese Gleichgewichtslage müssen beobachtet werden.



Figur 184.

Ferner werde die Planke AB unter rechtem Winkel zu der neutralen Lage des Stabes zurückversetzt und in entgegengesetzter Richtung so weit gedreht, bis die Massen A, B in eine Lage $A_2 B_2$ nahe dem Stab, aber auf entgegengesetzter Seite von $A_1 B_1$ kommen, dann wird der Torsionsstab um eine andere Gleichgewichtslage CE_2 unter dem Einflusse der Attraktion der Massen und der Verdrehung des Fadens Schwingungen ausführen. Wie vorher muss die Schwingungszeit und die Deviation $E_2 C\alpha$ beobachtet werden.

Um die Beobachtungsfehler zu eliminieren, wurde dieser Prozess sehr oft wiederholt und wurden schliesslich die Mittelwerte sämtlicher Beobachtungsresultate genommen. Die Lagen $B_1 A_1$ und $A_2 B_2$, in welche die Massen abwechselnd versetzt wurden, wurden so genau wie möglich während aller Experimente innegehalten. Die neutrale Lage $C\alpha$ des Stabes halbierte sehr nahe den Winkel zwischen $B_1 A_1$ und $A_2 B_2$; weil aber diese neutrale Lage kleinen Ortsveränderungen unterworfen war, wie sich herausstellte, was möglicherweise Änderungen in der Torsion des

Fadens zuzuschreiben ist, so wurde bei keinem Experimente beobachtet, dass sie mit der Halbierungslinie des Winkels $A_1 C B_2$ zusammenfiel.

Es sei CX eine beliebige feste horizontale Linie im Raume, von welcher aus die Winkel gemessen werden sollen, $b = \sphericalangle XC\alpha$, welchen die neutrale Lage des Stabes mit CX einschliesst. Die Winkel, welche die wechselnden Positionen $B_1 A_1$, $A_2 B_2$ der geraden, die Mittelpunkte der Massen A, B verbindenden Linie mit CX machen, seien A, B resp. und es sei $\frac{A+B}{2} = a$. Der Winkel, welchen der Torsionsstab am Ende der Zeit t mit der festen Geraden CX einschliesst, werde mit x bezeichnet.

Wir nehmen zunächst an, dass sich die Massen in der Position $A_1 B_1$ befinden. Das Moment ihrer Attraktionen um OC auf die zwei Kugeln und den Stab wird nur eine Funktion des Winkels zwischen dem Stabe und der Linie $A_1 B_1$ sein, so dass dasselbe durch $\varphi(A - x)$ dargestellt werden kann. Der ganze Apparat war in einem hölzernen Gehäuse eingeschlossen, um ihn vor jedem Luftzuge zu schützen. Die Attraktion dieses Gehäuses kann nicht vernachlässigt werden, weil sie für verschiedene Lagen des Stabes differieren kann, so nehmen wir ihr Moment um CO gleich $\psi(x)$. Die Torsion des Fadens wird nahezu proportional seinem Verdrehungswinkel sein, so dass wir dieses Moment um CO gleich $E(x-b)$ setzen können. Bezeichnet nun J das Trägheitsmoment der Kugeln und des Stabes um die Axe OC, dann ist die Bewegungsgleichung

$$J\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(A-x) + \psi(x) - E(x-b).$$

Setzen wir die kleine Grösse $a - x = \xi$, also $x = a - \xi$, substituieren diesen Wert von x und entwickeln nach Potenzen von ξ mittelst des Satzes von Taylor, so erhalten wir

$$-J\frac{d^2\xi}{dt^2} = \varphi(A-a) + \psi(a) - E(a-b) + \{\varphi'(A-a) - \psi'(a) + E\}\xi.$$

Mit $n^2 = \frac{\varphi'(A-a) + \psi'(a) + E}{J}$, $\quad e = a + \frac{\varphi(A-a) + \psi(a) - E(a-b)}{Jn^2}$,

wird $\frac{d^2\xi}{dt^2} = (a-e)n^2 - n^2\xi$, $\qquad \xi = a - e + L_1 \sin(nt + L')$,

folglich
$$x = e + L\sin(nt + L'),$$
wo L und L' zwei willkürliche Konstanten bedeuten.

Daraus geht hervor, dass der Winkel, welchen der Torsionsstab in der Gleichgewichtslage mit der Axe der x einschliesst, gleich e und die Zeit einer vollen Schwingung gleich $2\frac{\pi}{n}$ ist.

Nun nehmen wir an, dass die Massen A, B in ihre Wechsellage $A_2\,B_2$ bewegt worden sind. Das Moment ihrer Attraktion auf die Kugeln und den Stab wird nun gleich $-\varphi(x-B)$ sein, so dass die Bewegungsgleichung

$$J\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi(x-B)+\psi(x)-E(x-b).$$

Mit $a=x-\xi$ und durch Substitution des Wertes von B gleich $2a-A$ finden wir auf demselben Wege wie vorhin, wenn n dieselbe Grösse wie dort bedeutet und

$$e'=a+\frac{-\varphi(A-a)+\psi(a)-E(a-b)}{Jn^2}$$

gesetzt wird,

$$x=e'+N\sin(nt+N').$$

In diesen Ausdrücken sind die Attraktion $\psi(a)$ des Gehäuses, der Coëfficient E der Torsion und der Winkel b sämtlich unbekannt. Diese Grössen verschwinden jedoch alle zusammen, wenn wir die Differenz zwischen e und e' nehmen, wodurch wir erhalten

$$\frac{\varphi(A-a)}{J}=\frac{e-e'}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \tag{A}$$

es bedeutet hierbei T die Zeit einer vollen Schwingung des Torsionsstabes um eine der beiden gestörten Gleichgewichtslagen. Mithin kann die Attraktion $\varphi(A-a)$ gefunden werden, wenn der Winkel $e-e'$ zwischen den zwei Gleichgewichtslagen und auch die Schwingungszeit um eine der beiden beobachtet worden ist.

Die Funktion $\varphi(A-a)$ ist das Moment der Attraktion der Massen und der Planke auf die Kugeln und den Stab, wenn der Stab sich in einer Lage Cf befindet, welche den Winkel $A_1\,C\,B_2$ zwischen den wechselnden Positionen der Massen in zwei gleiche Teile zerlegt. Es sei M die Masse eines jeden der Körper A, B, m diejenige einer der kleinen Kugeln, m' diejenige des Torsionsstabes, $\mu\frac{Mm}{D^2}$ die gegenseitige Attraktion von M und m, wo D die Entfernung zwischen ihren Mittelpunkten bedeutet. Sind (p,q) die Coordinaten des Mittelpunktes von A_1, bezogen auf Cf als Axe der x, ist c der Abstand des Mittelpunktes einer jeden der kleinen Kugeln a, b von dem Mittelpunkte C der Bewegung, dann erhalten wir für die Attraktion der Massen und der Kugeln

$$2\mu Mm\left\{\frac{cq}{[(p-c)^2+q^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{cq}{[(p+c)^2+q^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}=\mu MmP.$$

Die Momente der Attraktionen der Massen und des Stabes können durch

Integration $= \mu M m' Q$ gefunden werden, wo Q eine bekannte Funktion der linearen Dimensionen des Apparates bezeichnet. Die Attraktion der Planke könnte auch in Betracht gezogen werden. Also finden wir

$$\varphi (A - a) = \mu M (m P + m' Q).$$

Ist r der Halbmesser einer jeden der Kugeln a, b, so haben wir

$$J = 2 m \left\{ c^2 + \frac{2}{5} r^2 \right\} + m' \frac{(c - r)^2}{3} = m P' + m' Q',$$

wo P' und Q' bekannte Funktionen der linearen Dimensionen des Stabes und der Kugeln bedeuten. Durch Substitution dieser Werte von $\varphi (A - a)$ und J in die Gleichung (A) ergiebt sich

$$\mu M \cdot \frac{m P + m' Q}{m P' + m' Q'} = \frac{e - e'}{2} \left(\frac{2 \pi}{T} \right)^2.$$

Nun bezeichne $\mathfrak{M}$ die Masse der Erde, R ihren Halbmesser, g die Schwerkraft pro Masseneinheit, dann ist $g = \mu \frac{\mathfrak{M}}{R^2}$, oder $\mu = g \frac{R^2}{\mathfrak{M}}$, und folgt durch Substitution dieses Wertes von μ

$$\frac{M}{\mathfrak{M}} = \frac{e - e'}{2} \left(\frac{2 \pi}{T} \right)^2 \cdot \frac{1}{g R^2} \cdot \frac{\frac{m}{m'} P' + Q'}{\frac{m}{m'} P + Q}.$$

Das Verhältnis $\frac{m}{m'}$ wurde gleich dem Verhältnisse der Gewichte einer der Kugeln und des Stabes, gewogen im Vacuum, genommen, es würde dasselbe aber offenbar genauer gewesen sein, wenn die Wägung in der Luft stattgefunden hätte. Weil die Massen sowohl die Luft als auch die Kugeln anziehen, so ist der Luftdruck auf der Seite einer Kugel nächst der anziehenden Masse grösser als jener auf der entgegengesetzten Seite. Der Unterschied dieser Pressungen ist gleich der Attraktion der Masse auf die durch die Kugel verdrängte Luftmenge.

In Baily's Experimenten wurde ein genauerer Wert von g gebraucht. Bezeichnet ε die Elliptizität der Erde, n das Verhältnis der Centrifugalbeschleunigung am Äquator zu der Äquatorialfallbeschleunigung, λ die Breite des Ortes, so ist

$$g = \mu \frac{\mathfrak{M}}{R^2} \left\{ 1 - 2 \varepsilon + \left(\frac{5}{2} n - \varepsilon \right) \cos^2 \lambda \right\}.$$

Durch diese Theorie ist die Bestimmung der Masse der Erde auf die Ermittelung zweier Elemente zurückgeführt worden 1) die Schwingungszeit des Torsionsstabes, 2) des Winkels $e - e'$ zwischen seinen zwei Gleichgewichtslagen, wenn er unter dem Einflusse der Massen in ihren wech-

selnden Positionen steht. Um diese zu beobachten, war ein kleiner Spiegel an dem Stabe bei C so befestigt, dass seine Ebene fast senkrecht auf dem Stabe stand. Auf einer vertikalen Platte, deren Entfernung von dem Spiegel 108 englische Zoll betrug, war eine Scala eingegraben, das von der Scala durch Reflexion auf den Spiegel erzeugte Bild wurde mit einem Telescope betrachtet, welches gerade über der Scala aufgestellt und mit drei Vertikalfäden in seinem Brennpunkte ausgerüstet war. Wenn der Torsionsstab sich um seine Axe drehte, so sah man in dem Telescope das Bild der Scala sich horizontal, quer zu den Fäden bewegen und in irgend einem Augenblicke fiel die Nummer der Scala mit dem Mittelfaden zusammen, wo dann abgelesen wurde. Die Scala war durch vertikale Linien geteilt, der dreizehnte Teil eines Zolles besonders, und von 20 bis 180 nummeriert, um negative Ablesungen zu vermeiden. Der von dem Stabe durchlaufene Winkel, wenn das Bild der Scala sich durch einen Raum bewegte, welcher dem Intervalle von zwei Teilungen entsprach, war gleich $\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{108} \cdot \frac{1}{2} = 73{\cdot}46''$. Aber die Teillinien wurden auch noch diagonal geschnitten und durch horizontale Linien dezimal untergeteilt, so dass nicht nur die Zehntel einer Teilung, sondern auch noch, nach einer kleinen Übung, Bruchteile dieser Zehntel abgelesen werden konnten. Der Schwingungsbogen war so klein, dass das Quadrat seines Kreismasses zu vernachlässigen war, aber weil er sich über sehr viele Teilungen erstreckte, so ist es klar, dass er mit Sorgfalt beobachtet werden konnte. Eine genaue Beschreibung der Art und Weise, in welcher die Beobachtungen ausgeführt wurden, kann hier keinen Platz finden, wir verweisen deshalb den Leser auf Baily, Experiments with the torsion rod for determining the mean denoity of the Earth, London 1843.

Bei dieser Untersuchung wurde keine Notiz von der Wirkung des Luftwiderstandes auf den Schwingungsbogen genommen. Dieser wurde zuletzt durch ein besonderes Verfahren beim Nehmen der Mittel der Beobachtungsresultate eliminiert.

Die Dichtigkeit des Wassers, von welchem das Gewicht eines Kubikzolles gleich 252·725 Grains ist (7000 Grains sind gleich einem Pfund Krämergewicht), würde als Einheit der Dichtigkeit genommen. Das schliessliche Resultat aller Experimente war, dass die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse sich gleich 5·6747 ergab, welches etwas grösser als das oben erhaltene ist.

Reich fand $\varrho = 5{\cdot}583$, so dass die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr gleich der Dichtigkeit des Eisenglanzes ist. Über die Ausführung der Versuche zur Ermittelung der Dichtigkeit der Erdmasse kann gelesen werden: Gehler's physikal. Wörterbuch, Band III, ebenso die Ab-

handlung von Reich „Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde", Freiberg 1838.

Zur Auffindung der mittleren Dichtigkeit der Erde wurden noch zwei andere Methoden angewendet. Im Jahre 1772 kam Dr. Maskelyne, sodann der Astronom Royal darauf, dass die mittlere Dichtigkeit der Erde mit derjenigen eines Berges verglichen werden könnte durch die Beobachtung der Abweichung der Lothlinie, welche durch die Attraktion des letzteren hervorgebracht wird. Der gewählte Berg war der Schehallien; es wurde gefunden, dass die Dichtigkeit der Erde etwas kleiner als die fünffache Dichtigkeit des Wassers sei. Siehe Phil. Trans. 1778 und 1811. Aus einigen Beobachtungen bei Arthur's Seat wurde die mittlere Dichtigkeit der Erde durch Lieut. Col. James of the Ordonance Survey gleich 5·316 abgeleitet, Phil. Trans. 1856. Die andere von Sir G. Airy gebrauchte Methode bestand darin, die Schwerkraft am Grunde der Mine eines Bergwerkes mit derjenigen an der Erdoberfläche durch Beobachtung der Schwingungszeiten eines Pendels zu vergleichen. Auf diesem Wege wurde die mittlere Dichtigkeit der Erde gleich 6·566 gefunden. Phil. Trans. 1856.

Zweite Abteilung.

Kleine Schwingungen unveränderlicher Systeme in drei Richtungen.

Erster Abschnitt.

Coëxistenzschwingungen.

1. Die eine Axe eines Ellipsoides ist vertikal, in der Nähe des tieferen Endpunktes dieser Axe befindet sich innerhalb der Fläche des Ellipsoides ein materieller Punkt. Wie sind die kleinen Schwingungen des materiellen Punktes beschaffen?

Wir wollen bezeichnen mit $2a$, $2b$ die Längen der zwei horizontalen Axen, mit $2c$ die Länge der vertikalen Axe des Ellipsoides, die Coordinatenaxen so wählen, dass der Ursprung mit dem tieferen Endpunkte der vertikalen Axe des Ellipsoides zusammenfällt, die Axen der x und der y parallel zu den horizontalen Axen des Ellipsoides sind und die Axe der z mit seiner vertikalen Axe zusammenfällt.

Kombinieren wir das Prinzip von D'Alembert mit demjenigen der virtuellen Geschwindigkeiten, so erhalten wir für die Bewegung des materiellen Punktes die Gleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + g\right)\delta z = 0, \tag{1}$$

wo x, y, z die Coordinaten des materiellen Punktes zu einer beliebigen Zeit t, δx, δy, δz die Zunahmen von x, y, z, wenn von der Lage des materiellen Punktes zu einem unendlich nahe gelegenen Punkte der Fläche übergegangen wird, sind.

Die Gleichung des Ellipsoides ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(c-z)^2}{c^2} = 1,$$

und daher, wenn wir die Potenzen kleiner Grössen über die zweite hinaus vernachlässigen,

$$c - z = c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = c\left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}\right),$$

$$z = \frac{1}{2}c\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right), \quad \delta z = c\left(\frac{x\,\delta x}{a^2} + \frac{y\,\delta y}{b^2}\right).$$

Führen wir diesen Wert von δz in die Gleichung (1) ein und vernachlässigen die Produkte und Potenzen der kleinen Grössen in den Coefficienten von δx, δy über die ersten hinaus, so kommt

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y + \frac{cg}{a^2}x\,\delta x + \frac{cg}{b^2}y\,\delta y = 0,$$

und mithin $\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{cg}{a^2}x\right)\delta x + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{cg}{b^2}y\right)\delta y = 0.$

Gleichen wir nun die Coëfficienten von δx, δy, welche von einander unabhängig sind, zu Null, dann ergiebt sich

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{cg}{a^2}x = 0, \quad (2) \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{cg}{b^2}y = 0. \tag{3}$$

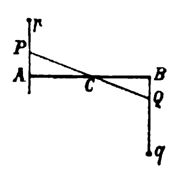
Die Integrale der Gleichungen (2) und (3) sind

$$x = \beta \sin\left\{\frac{\sqrt{cg}}{a}t + \varepsilon\right\}, \qquad y = \gamma \sin\left\{\frac{\sqrt{cg}}{b}t + \zeta\right\},$$

wobei $\beta, \gamma, \varepsilon, \zeta$ willkürlichen Konstanten bedeuten, welche mit Hilfe der Anfangswerte von x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ bestimmt werden können. Die Schwingung des materiellen Punktes hängt von zwei einfachen Oscillationen ab, ihre Perioden sind $\frac{\pi a}{\sqrt{cg}}$, $\frac{\pi b}{\sqrt{cg}}$; die Zahl der unabhängigen, einfachen Schwingungen ist dieselbe wie die Zahl der unabhängigen Variablen in der geometrischen Gleichung, welcher die Lage des materiellen Punktes unterworfen ist.

Poisson, Traité de Mécanique, Tom. II, p. 439. Walton, p. 561.

2. Eine der Schalen einer gemeinen Wage ist in einer vertikalen, zu dem Wagebalken rechtwinkeligen Ebene etwas aus ihrer Ruhelage verschoben worden. Untersuche die Beschaffenheit der schwingenden Bewegungen der zwei Schalen und des Balkens.



Figur 185.

Es sei AB (Fig. 185) die ursprüngliche Lage des Balkens, PQ seine Lage zu einer beliebigen Zeit t; p, q seien die Projektionen der Schalen auf die Richtungen AP, BQ, resp., die Schalen als materielle Punkte betrachtet, zu der Zeit t. Lasse sein $AC = a = BC$, $AP = z = BQ$, $Pp = x$, $Qq = y$, $Mk^2 =$ dem Trägheitsmomente des Balkens um C, $m =$ der Masse einer jeden der Schalen, $l =$ der Länge des Aufhängefadens einer jeden der Schalen.

Wenn wir der Einfachheit halber setzen

$$\frac{g}{l} = n^2, \quad \frac{g}{l}\left(1 + 2\frac{m a^2}{M k^2}\right) = n'^2,$$

so werden wir für die vollständige Darstellung der Bewegung mit c als Anfangswert von x, die Anfangswerte von y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sind sämtlich gleich Null, die Gleichungen erhalten

$$x = c\cos\left(\frac{n'-n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n'+n}{2}t\right),$$

$$y = -c\sin\left(\frac{n'-n}{2}t\right)\sin\left(\frac{n'+n}{2}t\right),$$

$$z = \frac{2g}{l}\frac{m a^2}{M k^2}\cdot\frac{c}{n'^2}\sin^2\frac{n't}{2}.$$

Dieses Problem ist untersucht worden durch D. F. Gregory und A. Smith. Siehe: The Cambridge Mathematical Journal, Vol. II, p. 120.

Walton, p. 576.

Zweiter Abschnitt.

Kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage.

Die Probleme kleiner Schwingungen sind gewöhnlich von zweierlei Art, die mittlere Lage, um welche die Oscillation stattfindet, ist entweder fest, oder sie besitzt eine Bewegung im Raume. Als ein Beispiel der ersten Art können wir einen Körper nehmen, welcher im Gleichgewichte um eine Axe durch seinen Schwerpunkt unter irgend welchen Zwangsbedingungen rotiert. Wird dem Körper eine kleine Verschiebung aus seiner Gleichgewichtslage erteilt, dann haben wir zuerst zu untersuchen, ob er nahe seiner Ruhelage bleiben wird oder nicht. Eine Bedingung wird gewöhnlich die sein, dass die Rotationsaxe sehr nahe einer Hauptaxe des Körpers sein muss, denn keine andere Axe kann eine solche permanenter Rotation sein. Wir haben auch die Bewegung des Körpers um seine Gleichgewichtslage zu ermitteln. Diese wird bestimmt sein, wenn wir für jeden Zeitmoment die Lage einer festen Linie in dem Körper und die Winkelgeschwindigkeit um dieselbe angeben können. Es sind hier zwei einfachere Fälle möglich, welche — wenn sie vorkommen — von der grössten Assistenz sein werden. Erstens kann die Winkelgeschwindigkeit um die Hauptaxe, welche der

momentanen Rotationsaxe beim Beginn der Bewegung sehr nahe war, konstant sein. Zweitens kann die Höhe des Schwerpunktes, wenn die Schwere die einzige Kraft ist, über einer gewissen festen, horizontalen Ebene konstant sein. Eine kleine Betrachtung zeigt, dass dieses in den meisten Fällen wahr sein wird.

I. Das allgemeine Problem, welches in diesem Abschnitte zu behandeln ist, mag wie folgt hingestellt werden.

Ein Körper besitzt einen festen Punkt im Raume und rotiert um eine Momentanaxe, welche einen kleinen Winkel mit einer der Hauptaxen durch den festen Punkt in dem Körper einschliesst. Der Körper macht kleine Schwingungen um seine Mittellage. Welches ist die Bewegung?

Figur 186.

Lasse sein O (Fig. 186) den festen Punkt, OA, OB, OC die Hauptaxen für diesen Punkt, OC diejenige Hauptaxe, welche niemals weit von der Momentanaxe entfernt ist. Die mittlere Lage von OC werde als Axe der z gewählt.

Infolge der Annahme sind die Momente L, M, N der Kräfte um die Axen alle kleine Grössen, auch sind die Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2, ω_3 um dieselben klein. Ist n der Mittelwert von ω_3, so können wir in den kleinen Gliedern $\omega_3 = n$ setzen, wodurch die Bewegungsgleichungen werden

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} - (B-C)\,n\,\omega_2 = L, \qquad B\frac{d\omega_2}{dt} - (C-A)\,n\,\omega_1 = M, \\ C\frac{d\omega_3}{dt} = N. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Lage der Axe OC im Raume werde durch die Winkel ϑ, φ, ψ festgelegt und es sei

$$p = \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad q = -\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad (2)$$

dann sind p und q kleine Grössen. Weil nun

$$\omega_3 = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}, \qquad \omega_1 = \frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi - \sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi,$$

so ist $\quad \omega_1\cos\vartheta = \cos\vartheta\dfrac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi - \sin\vartheta\cos\varphi\left(\omega_3 - \dfrac{d\varphi}{dt}\right),$

$$\omega_1\cos\vartheta = -\frac{dq}{dt} - \omega_3\,p,$$

und in ähnlicher Weise $\quad \omega_2\cos\vartheta = \dfrac{dp}{dt} - \omega_3\,q. \qquad (3)$

Auch sind $-p$ und $-q$ die Richtungscosinus von OZ bezüglich der Axen OA und OB, so dass

$$-p = -\sin\vartheta\cos\varphi = \cos ZE \,.\, \cos AE = \cos AZ,$$

gleicherweise $\qquad -q = \cos BZ.$

Weil aber OC sehr nahe OZ liegt, so ist ϑ sehr klein, wodurch die obigen Gleichungen werden zu

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = \omega_3, \qquad \omega_1 = -\frac{dq}{dt} - np, \qquad \omega_2 = \frac{dp}{dt} - nq. \qquad (4)$$

Die Axe OX wollen wir so wählen, dass der Mittelwert von $\varphi + \psi = nt$ ist. Zwei weitere Axen OX', OY' mögen sich mit der Winkelgeschwindigkeit n um OZ drehen, dann ist der Winkel $XOX' = nt$ und diese sich bewegenden Axen werden nie weiter von den Hauptaxen OA, OB abweichen; auch werden nun p und q die Richtungscosinus von OC sein, bezogen auf die sich bewegenden Axen OX', OY'. Die Punkte C und A liegen nämlich sehr nahe in dem ZX' verbindenden Bogen, folglich weil ZX' und CA beide rechtwinkelig sind, sind die Bogen ZA und CX' Supplemente und $p = -\cos ZA = \cos CX'$; ebenso ist $q = \cos CY'$.

Substituierend für ω_1 und ω_2 aus (4) in die Bewegungsgleichungen erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d^2q}{dt^2} + (A+B-C)n\frac{dp}{dt} - (B-C)n^2q &= -L \\ B\frac{d^2p}{dt^2} - (A+B-C)n\frac{dq}{dt} - (A-C)n^2p &= M \\ C\frac{d\omega_3}{dt} &= N. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Diese Gleichungen sind lineär und wenn sie gelöst, so werden sie die Bewegung von OC mit Bezug auf die beweglichen Axen OX', OY' bestimmen. Dann kann die auf irgend eine feste Axe im Raume bezogene Bewegung von OC leicht gefunden werden.

Die Grössen L und M sind die Momente um die Axen OA, OB, dieselben müssen als Funktionen von p und q dargestellt werden. Weil die Quadrate von p und q zu vernachlässigen sind, so werden diese Ausdrücke von der Form sein

$$L = ap + a'q, \qquad M = bp + b'q.$$

Wenn es schwierig ist, die Momente der Kräfte um OA und OB zu finden, dann können wir die Momente um die Axen OX', OY', OZ' nehmen, sind diese L', M', N', so ist

$$L = L'\cos AX' + M'\cos AY' + N'\cos AZ' = L',$$

weil M', N' kleine Grössen und die Winkel AY', AZ' beinahe rechte Winkel sind. In gleicher Weise bekommen wir $M = M'$, $N = N'$. Also sind die Momente dieselben, gleichviel, ob sie um die Prinzipalaxen OA, OB, OC, oder um die Coordinatenaxen OX', OY', OZ' genommen werden. Um diese Momente zu finden, wird folgende Bemerkung nützlich sein. Wenn $p', q', 1$ die Richtungscosinus irgend einer Linie OP nahe OC bedeuten, bezogen auf die Axen OA, OB, OC, dann werden ihre Richtungs-

cosinus, bezogen auf die Axen OX', OY', OZ' resp. sein $p+p'$, $q+q'$, 1. Verbinden wir CA durch einen Bogen eines grössten Kreises und fällen aus P und X' Perpendikel PN, $X'n$ auf ihn, dann differieren, weil $\measuredangle PN$ und $\measuredangle X'n$ sehr klein sind, $\cos \measuredangle PX'$ und $\cos \measuredangle Nn$ nur um Grössen zweiter Ordnung, folglich ist

$$\cos PX' = \cos Nn = \sin(Cn + NA) = \sin Cn . \cos NA + \cos Cn . \sin NA.$$

Nun sind Cn und AN beinahe rechte Winkel und wenn sie mit kleinen Gliedern multipliziert werden, so können ihre Sinus gleich der Einheit genommen werden. Auch ist $\cos NA = \cos PA = p'$ und $\cos Cn = \cos CX' = p$, wenn wir die Quadrate kleiner Grössen verwerfen. Folglich haben wir

$$\cos PX' = p + p' \quad \text{und} \quad \cos PY' = q + q'.$$

Die Gleichungen zur Bestimmung von p und q werden im allgemeinen von der Form sein

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + a\frac{dp}{dt} = bp + cq, \qquad \frac{d^2 p}{dt^2} - a'\frac{dq}{dt} = b'q + c'p. \tag{5}$$

Der Bequemlichkeit halber geben wir hier eine summarische Zusammenstellung der verschiedenen Schritte zur Lösung dieser Gleichungen:

Erster Fall. Es wird häufig vorkommen, dass die Grössen $bp, b'q$ abwesend sind. Unter diesen Verhältnissen nehmen wir an, dass:

$$p = F\cos(\lambda t + f), \qquad q = G\sin(\lambda t + f). \tag{6}$$

Die Substitution dieser Werte giebt

$$G(\lambda^2 + c) = -Fa\lambda, \qquad F(\lambda^2 + c') = -Ga'\lambda, \tag{7}$$

woraus die Biquadratrix folgt

$$(\lambda^2 + c)(\lambda^2 + c') = aa'\lambda^2, \tag{8}$$

für die Bestimmung von λ, während jede der Gleichungen (7) das Verhältnis $\frac{G}{F}$ geben wird. Nehmen wir an, dass die vier Werte von λ alle reell sind, wie es allgemein der Fall sein wird, und gleich $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, dann werden die vollständigen Integrale sein

$$p = F\cos(\lambda_1 t + f) + F'\cos(\lambda_2 t + f'),$$

$$q = F\frac{a\lambda_1}{\lambda_1{}^2 + c}\sin(\lambda_1 t + f) + F'\frac{a\lambda_2}{\lambda_2{}^2 + c}\sin(\lambda_2 t + f'),$$

wo F, F', f, f' vier willkürliche Konstanten bedeuten, welche durch die Anfangswerte von $p, q, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}$ zu bestimmen sind.

Wenn die vier Wurzeln der Gleichung (8) nicht alle reell sind, dann müssen die Ausdrücke für p und q dadurch rationalisiert werden, dass wir für Sinus und Cosinus die Exponentialwerte schreiben. Die Gleichung (8) kann auf die Form gebracht werden

$$\lambda^4 + (c + c' - aa')\lambda^2 + cc' = 0.$$

Damit die Werte von λ^2 reell sein können, müssen wir haben

$$(c + c' - a a')^2 - 4 c c' = \text{einer positiven Grösse.} \qquad (A')$$

Damit die zwei Werte von λ^2 dasselbe Zeichen haben können, muss das letzte Glied der Quadratrix positiv sein, d. h.

$$c c' = \text{einer positiven Grösse.} \qquad (B')$$

Damit beide Werte von λ^2 positiv sein können, muss der Coëfficient des zweiten Gliedes der Quadratrix negativ sein, d. h.

$$c + c' - a a' = \text{einer negativen Grösse.} \qquad (C')$$

Die Bedingung (A') ist genügend, wenn $c + c'$ und $a a'$ entgegengesetzte Zeichen besitzen. Sind c, c' beide negativ und ist $a a'$ positiv, dann wird allen drei Bedingungen genügt.

Zweiter Fall. Sind die Gleichungen vollständig, dann nehmen wir an

$$p = F e^{\lambda t}, \qquad q = G e^{\lambda t}. \qquad (6')$$

Die Substitution dieser Werte giebt

$$G(\lambda^2 - c) = F(b - a\lambda), \qquad F(\lambda^2 - c') = G(b' + a'\lambda). \qquad (7')$$

womit wir die biquadratische Gleichung

$$(\lambda^2 - c)(\lambda^2 - c') = (b - a\lambda)(b' + a'\lambda) \qquad (8')$$

für die Bestimmung von λ erhalten, während jede der Gleichungen (7') das Verhältnis $G : F$ geben wird.

Sind alle Wurzeln dieser Gleichung reell, dann wird die Bewegung keine schwingende sein, einer positiven Wurzel wird eine continuierlich wachsende, einer negativen Wurzel wird eine continuierlich abnehmende und schliesslich verschwindende Bewegung entsprechen.

Einem Paare imaginrer Wurzeln $\lambda = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ entsprechen bezüglich (6') die Relationen

$$p = (F + F')e^{\alpha t}\cos\beta t + (F - F')\sqrt{-1}\, e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

$$q = (G + G')e^{\alpha t}\cos\beta t + (G - G')\sqrt{-1}\, e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

und es müssen imaginäre Werte F, F' und G, G' gegeben werden, um diese Ausdrücke reell zu erhalten.

Aus den Gleichungen (7') folgt

$$\frac{G}{F} = \frac{b - a\lambda}{\lambda^2 - c} = u + v\sqrt{-1}$$

wo u und v bekannt sind und der Wert von $\lambda = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ aus (8') zu substituieren ist. Folglich haben wir offenbar, wenn wir schreiben $\lambda = \alpha - \beta\sqrt{-1}$,

$$\frac{G'}{F'} = u - v\sqrt{-1}.$$

Wird daher die erste Gleichung in der Form geschrieben

$$p = H e^{\alpha t}\cos\beta t + K e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

so nimmt die zweite Gleichung die Gestalt an

$$q = (Hu + Kv)e^{\alpha t}\cos\beta t + (Hu - Kv)e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Es ist offenbar, dass die Bewegung, wenn nicht $\alpha = 0$ oder negativ ist, nicht als eine solche von kleiner Schwingung angesehen werden kann.

Der Gleichung (8′) kann die Form gegeben werden

$$\lambda^4 - (c + c' - a a')\lambda^2 + (a b' - a' b)\lambda + c c' - b b' = 0.$$

Damit die Wurzeln dieser Gleichung von der Form $\lambda = \pm \beta \sqrt{-1}$ sein können, müssen wir haben

$$a b' - a' b = 0. \qquad (A'')$$

Dann, wie vorher, damit die zwei Werte von λ^2 reell, beide von demselben, dem negativen Zeichen sein können, müssen wir haben

$$(c + c' - a a')^2 - 4(c c' - b b'),\quad c c' - b b',\quad c + c' - a a' \text{ alle positiv.} \qquad (B'')$$

1. Ein konischer Kreisel stützt sich mit seinem Scheitel auf eine vollkommen rauhe, horizontale Ebene und rotiert um seine geometrische Axe, welche beinahe vertikal ist. Welches ist die kleinste, ihn am Umfallen verhindernde Winkelgeschwindigkeit?

Die einzige Kraft ausser der an dem festen Punkte, welche an dem Körper wirkt, ist die Schwerkraft. Bezeichnet h den Abstand des Schwerpunktes des Körpers vom Scheitel, so sind die Momente der Kräfte um die Axe

$$L = y Z - z Y = -h q g, \qquad M = z X - x Z = h p g,$$

womit wir als Bewegungsgleichungen erhalten

$$A \frac{d^2 q}{d t^2} + (2A - C) n \frac{d p}{d t} - (A - C) n^2 q = h g \cdot q.$$

$$A \frac{d^2 p}{d t^2} - (2A - C) n \frac{d q}{d t} - (A - C) n^2 p = h g \cdot p,$$

wobei wir die Masse des Körpers gleich der Einheit nehmen. Diese Gleichungen können in der Form geschrieben werden

$$A \frac{d^2 q}{d t^2} + a \frac{d p}{d t} = b q, \qquad A \frac{d^2 p}{d t^2} - a \frac{d q}{d t} = b p.$$

Um dieselben zu lösen, setzen wir

$$p = F \cos(\lambda t + f), \qquad q = G \sin(\lambda t + f).$$

Die Substitution giebt

$$G(A\lambda^2 + b) = -a\lambda . F,\quad F(A\lambda^2 + b) = -a\lambda . G,\quad (A\lambda^2 + b)^2 = a\lambda^2,$$

oder $$A\lambda^2 \pm (2A - C) n \lambda + (A - C) n^2 + g h = 0,$$

$$\lambda = \mp \frac{2A - C}{2A} . n \pm \frac{\sqrt{C^2 n^2 - 4 A g h}}{2A}.$$

Damit nun der Kreisel nicht umsinken kann, müssen diese Werte von λ reell sein. Folglich müssen wir haben

$$n > \frac{\sqrt{4 A g h}}{C}.$$

II. Wenn der Körper so beschaffen ist, dass zwei seiner Hauptträgheitsmomente für den festen Punkt gleich sind, dann können die Gleichungen unter (I) auf eine andere Form gebracht werden. Anstatt die Bewegung von C auf zwei Axen OX', OY' zu beziehen, welche sich im Raume in einer bekannten Weise bewegen, können wir dieselbe auf zwei feste Axen OX, OY beziehen.

Es sei O der feste Punkt, OC die Hauptaxe, um welche der Körper rotiert, OA, OB seien die anderen zwei Prinzipalaxen, welche sich mit einer Winkelgeschwindigkeit $-n$ bewegen und hier nie weit von den festen Axen OX, OY abweichen.

Die auf die Axen OA, OB, OC bezogenen Gleichungen der Bewegung sind

$$\left.\begin{aligned} A\left(\frac{d\omega_1}{dt} + n\omega_2\right) - (A-C)n\omega_2 &= L, \\ A\left(\frac{d\omega_2}{dt} - n\omega_1\right) + (A-C)n\omega_1 &= M, \\ C\frac{d\omega_3}{dt} &= N. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Sind P, Q die Richtungscosinus von OC, bezogen auf die festen Axen, dann ist

$$P = \cos(CX), \qquad \frac{dP}{dt} = -\sin(CX)\cdot\frac{d}{dt}(CX).$$

Aber wir haben $\omega_2 = -\frac{d}{dt}(CX)$ und $CX = \frac{\pi}{2}$ annähernd, so dass

$$\omega_2 = \frac{dP}{dt} \text{ und gleicherweise } \omega_1 = \frac{dQ}{dt}.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen (1) giebt

$$A\frac{d^2Q}{dt^2} - Cn\frac{dP}{dt} = -L, \quad A\frac{d^2P}{dt^2} + Cn\frac{dQ}{dt} = M, \qquad (B)$$

welches die allgemeinen Gleichungen kleiner Schwingungen sind.

1. Eine Kugel ist an einem festen Punkte mittelst eines Fadens aufgehangen und macht kleine Schwingungen um die Vertikale durch den Aufhängepunkt. Welches ist die Bewegung?

Es sei l die Länge, T die Spannung des Fadens, P', Q' seien die Cosinus der Winkel, welche der Faden mit zwei festen, durch den Aufhängepunkt O gezogenen horizontalen Axen OX, OY einschliesst, und es werde die Axe der z vertikal abwärts positiv genommen. S sei der Schwerpunkt der Kugel, $C'S$ der durch den Berührungspunkt des Fadens gehende Radius von der Länge a. $C'S$ schneide die Kugel nochmals in C und SC sei die positive Richtung der Axe von C.

Damit sind die Gleichungen für die Bewegung der Kugel, wenn wir ihre Masse gleich der Einheit nehmen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -T.P', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -T.Q', \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g - T,$$

$$A\left(\frac{d^2Q}{dt^2} - n\frac{dP}{dt}\right) = -(yZ - zY) = Ta(Q' \quad Q),$$

$$A\left(\frac{d^2P}{dt^2} + n\frac{dQ}{dt}\right) = Ta(P' - P),$$

und die geometrischen Nebenbedingungen

$$x = lP' + aP, \qquad y = lQ' + aQ, \qquad z = l + a.$$

Diese Gleichungen geben die folgenden

$$l\frac{d^2P'}{dt^2} + a\frac{d^2P}{dt^2} = -gP', \quad l\frac{d^2Q'}{dt^2} + a\frac{d^2Q}{dt^2} = -gQ'.$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} - n\frac{dP}{dt} = \frac{ag}{A}(Q' - Q), \quad \frac{d^2P}{dt^2} + n\frac{dQ}{dt} = \frac{ag}{A}(P' - P).$$

Um diese Gleichungen zu lösen, setzen wir

$P = F\cos(\lambda t + f)$, $P' = F'\cos(\lambda t + f)$, $Q = G\sin(\lambda t + f)$, $Q' = G'\sin(\lambda t + f)$, womit wir erhalten

$$F'(l\lambda^2 - g) = a\lambda^2 F, \qquad G'(l\lambda^2 - g) = -a\lambda^2 G,$$

$$\frac{ag}{A}G' + \left(\lambda^2 - \frac{ag}{A}\right)G = n\lambda F, \quad \frac{ag}{A}F' + \left(\lambda^2 - \frac{ag}{A}\right)F = n\lambda G.$$

Folglich haben wir

$$\left(-\frac{ag}{A}\cdot\frac{a\lambda^2}{l\lambda^2 - g} + \lambda^2 - \frac{ag}{A}\right)^2 = (n\lambda)^2,$$

welches führt zu

$$(l\lambda^2 - g)\left(\lambda^2 \pm n\lambda - \frac{5g}{2a}\right) = \frac{5}{2}g\lambda^2.$$

Diese Gleichung giebt vier reelle Werte von λ^2 und es seien die Werte von $\lambda: \pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm\lambda_3, \pm\lambda_4$. Damit wird die Oscillation dargestellt durch

$$P = F_1\cos(\lambda_1 t + f_1) + F_2\cos(\lambda_2 t + f_2)$$

und ähnlichen Relationen für P', Q, Q'.

Die obigen Gleichungen werden die Werte von $F':F$, $G:F$, $G':F$ jedem Werte von λ entsprechend geben. Mithin haben wir hier acht willkürliche Konstanten, nämlich $F_1, F_2, F_3, F_4, f_1, f_2, f_3, f_4$, welche durch die Anfangswerte von $P, \frac{dP}{dt}, P', \frac{dP'}{dt}, \ldots$ zu bestimmen sind.

Nehmen wir die negativen Werte von λ, dann erhalten wir nur dieselben Ausdrücke wieder. Da die Werte von $P, P', \ldots$ bekannt sind, so können jene von x, y, z gefunden, mithin kann die ganze Bewegung bestimmt werden.

2. Ein Reif rollt eine vollkommen rauhe, horizontale Ebene entlang. Mit welcher kleinsten Winkelgeschwindigkeit kann sich derselbe mit seiner Ebene sehr nahe vertikal bewegen?

Wir nehmen an, dass der Reif ursprünglich vertikal war, dann wird er wegen der Symmetrie entlang einer Curve rollen, welche annähernd eine gerade Linie ist. Diese Linie wählen wir als Abscissenaxe und die Ordinatenaxe vertikal. Es seien Y, Z die Componenten des Reibungswiderstandes parallel zu den Coordinatenaxen, R bezeichne die Normalreaktion. Nehmen wir die Masse des Reifes gleich der Einheit, so ist $R = g$.

Die Gleichungen für die Bewegung des Reifes sind

$$A \frac{d^2 Q}{dt^2} - 2 A n \frac{dP}{dt} = -L, \quad A \frac{d^2 P}{dt^2} + 2 A n \frac{dQ}{dt} = M.$$

Nun ist das Moment M der Kräfte um OY offenbar gleich Null und $L = -Za - Ra\vartheta$, wo ϑ den Winkel bezeichnet, welchen die Projektion von SC auf die Ebene der yz mit Z einschliesst. Aber es ist $\vartheta = Q$, so dass

$$-L = Za + agQ.$$

Ferner haben wir, wenn x, y, z die Coordinaten von S sind,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z, \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dt} = \omega_x y.$$

Aber es ist

$$\omega_x = \omega_1 \cos \sphericalangle AOX + \omega_2 \cos \sphericalangle BOX + \omega_3 \cos \sphericalangle COX,$$

$$\omega_x = \omega_1 + nP = -\frac{dQ}{dt} + nP, \quad -Z = a\frac{d^2 Q}{dt^2} - an\frac{dP}{dt}.$$

Die Substitution in die erste Gleichung giebt

$$(A + a^2)\frac{d^2 Q}{dt^2} - n(2A + a^2)\frac{dP}{dt} - gaQ = 0$$

und die Integration der zweiten Gleichung

$$\frac{dP}{dt} = -2nQ + Konst.$$

Mithin erhalten wir

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{2n^2(2A + a^2) - ag}{A + a^2} Q = Konst.$$

Daher wird der Reif rollen, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$n^2 > \frac{ag}{2(2A + a^2)}.$$

Ist der Reif kreisförmig, dann haben wir $A = \frac{a^2}{2}$ und für die verlangte Winkelgeschwindigkeit besteht die Beziehung

$$n > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Bezeichnet noch v die Geschwindigkeit des Mittelpunktes des Reifes, so muss sein

$$v > \frac{1}{2}\sqrt{a g}.$$

III. Die geometrischen Relationen, welchen der Körper unterworfen ist, seien solche, dass ein Punkt der Momentanaxe während der ganzen Bewegung bekannt ist. Dann können wir im Falle kleiner Schwingungen Momente um diesen Punkt gerade so wie um einen festen Punkt nehmen. Dieser Umstand vereinfacht unsere Gleichungen sehr, denn die unbekannten Reaktionen werden allgemein in diesem Punkte wirken.

Durch diesen Punkt, welchen wir O nennen wollen, legen wir die Coordinatenaxen OX, OY, OZ parallel zu den Hauptaxen SA, SB, SC für den Schwerpunkt S, und es seien $\bar{x}, \bar{y}, h$ die Coordinaten von S, so dass $\bar{x}, \bar{y}$ sehr klein sind.

Uns zuerst auf die Hauptaxen beziehend, haben wir die allgemeine Gleichung

$$\Sigma m(y^2+z^2)\frac{d\,\omega_x}{d\,t} - \Sigma m(z^2-y^2)\,\omega_y\omega_z + \Sigma m y z(\omega_z^2-\omega_y^2)$$
$$-\Sigma m\,x\,z\left(\frac{d\omega_z}{d\,t}+\omega_x\omega_y\right) - \Sigma m\,x\,y\left(\frac{d\,\omega_y}{d\,t} - \omega_x\,\omega_z\right) = L,$$

und zwei weitere ähnliche Gleichungen, in welchen L, M, N die Momente um die Axen OX, OY, OZ resp. sind.

In diesen Gleichungen haben wir die Quadrate aller kleinen Grössen zu vernachlässigen. Folglich sind die Quadrate und Produkte von $\bar{x}, \bar{y}$, $\omega_x, \omega_y, \frac{d\,\omega_z}{d\,t}$ zu verwerfen. Auch haben wir, weil die Axen parallel zu den Hauptaxen durch S sind, $\Sigma m x z = h\bar{x}$, $\Sigma m y z = h\bar{y}$, $\Sigma m x y = \bar{x}.\bar{y}$, wenn wir die Masse des Körpers gleich der Einheit nehmen. Die Gleichungen reduzieren sich mithin auf

$$A'\frac{d\,\omega_x}{d\,t} - (B'-C')\,\omega_y\,.\,n + h\bar{y}\,.\,n^2 = L,$$

$$B'\frac{d\,\omega_y}{d\,t} - (C'-A')\,\omega_x\,.\,n - h\,\bar{x}\,.\,n^2 = M, \qquad C'\frac{d\,\omega_z}{d\,t} = N,$$

wenn A', B', C' die Trägheitsmomente für die Axen OX, OY, OZ sind. Wie früher sei nun $p = \vartheta\cos\varphi$, $q = -\vartheta\sin\varphi$, dann gehen, wie oben, unsere Gleichungen über in

$$A'\frac{d^2q}{d\,t^2} + (A'+B'-C')\,n\frac{d\,p}{d\,t} - (B'-C')\,n^2 q - h\bar{y}\,n^2 = -L,$$

$$B'\frac{d^2p}{d\,t^2} - (A'+B'-C')\,n\frac{dq}{d\,t} - (A'-C')\,n^2 p - h\,\bar{x}\,n^2 = M,$$

$$C'\frac{d\,\omega_z}{d\,t} = N.$$

Die Momente L, M, N müssen wie vorher durch p und q mit Hilfe der Geometrie dargestellt werden, alsdann werden die resultierenden Gleichungen von der Lage der Momentanaxe unabhängig sein, so dass sie für die ganze Bewegung richtig sein werden, sie sind in der gewöhnlichen Weise integrierbar, so dass es möglich ist, die ganze Bewegung zu bestimmen.

1. Ein Ellipsoid rotiert um eine Hauptaxe und ist mit dem einen Endpunkte dieses Diameters mit einer vollkommen rauhen, horizontalen Ebene in Berührung. Der Körper macht kleine Schwingungen. Wie ist die Bewegung beschaffen?

Die Axen SC, SA, SB machen mit der Vertikalen Winkel, deren Richtungscosinus $1, -p, -q$ sind, folglich sind die Componenten der absoluten Schwerkraft parallel zu den Axen OZ, OX, OY, $Z=-g$, $X=pg$, $Y=qg$. Bezeichnen $\bar{x}, \bar{y}, c$ die Coordinaten des Schwerpunktes, bezogen auf diese Axen, so haben wir

$$L=-g\bar{y}-cgq, \qquad M=g\bar{x}+cgp, \qquad N=0.$$

Wir haben nun $\bar{x}$ und $\bar{y}$ als Funktionen von p und q zu ermitteln. Nehmen wir den Endpunkt der Axe C als Ursprung neuer Coordinatenaxen OX', OY', OZ' parallel zu den Axen SA, SB, SC, dann ist die Gleichung der Fläche

$$2z'=\frac{cx'^2}{a^2}+\frac{cy'^2}{b^2},$$

wobei das Glied $\frac{z'^2}{c}$ vernachlässigt wurde, weil es von der Ordnung $\left(\frac{x'}{a}\right)^4$ ist. Sind x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes O des Ellipsoides mit der Ebene, dann sind die Gleichungen der Normalen in diesem Punkte

$$\frac{\xi-x'}{\frac{cx'}{a^2}}=\frac{\eta-y'}{\frac{cy'}{b^2}}=\frac{\zeta-z'}{-1}.$$

Aber diese Normale ist die Vertikale, folglich sind ihre Richtungscosinus

$$1, \ -p, \ -q, \ p=\frac{cx'}{a^2}, \ q=\frac{cy'}{b^2}.$$

Ferner ist $x'=-\bar{x}$, und $y'=-\bar{y}$, also

$$\bar{x}=-\frac{a^2p}{c}, \quad \bar{y}=-\frac{b^2q}{c}.$$

Durch Substitution in die allgemeinen Bewegungsgleichungen erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}(6c^2+b^2)\frac{d^2q}{dt^2}+12c^2n\frac{dp}{dt}+(b^2-c^2)\left(6n^2+5\frac{g}{c}\right)q=0,\\ (6c^2+a^2)\frac{d^2p}{dt^2}-12c^2n\frac{dq}{dt}+(a^2-c^2)\left(6n^2+5\frac{g}{c}\right)p=0.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Um diese Gleichungen zu lösen, setzen wir

$$p = F \sin(\lambda t + f), \qquad q = G \cos(\lambda t + f)$$

und führen diese Werte in die (1) ein, wodurch wir eine biquadratische Gleichung zur Bestimmung von λ bekommen. Damit die Bewegung oscillatorisch sein kann, müssen die vier Wurzeln reell sein, es müssen die drei Ausdrücke

$$\left\{\left(6n^2 + 5\frac{g}{c}\right)\left(\frac{c^2 - a^2}{6c^2 + a^2} + \frac{c^2 - b^2}{6c^2 + b^2}\right) - \frac{144\,c^2 n^2}{(6c^2 + a^2)(6c^2 + b^2)}\right\}^2$$

$$-4\left(6n^2 + 5\frac{g}{c}\right)^2\left(\frac{c^2 - a^2}{6c^2 + a^2}\cdot\frac{c^2 - b^2}{6c^2 + b^2}\right), \qquad (c^2 - a^2)(c^2 - b^2),$$

$$-\left(6n^2 + 5\frac{g}{c}\right)\left(\frac{c^2 - a^2}{6c^2 + a^2} + \frac{c^2 - b^2}{6c^2 + b^2}\right) + \frac{144\,c^4 n^4}{(6c^2 + a^2)(6c^2 + b^2)}$$

sämtlich positiv sein.

Wenn c die kleinste Axe des Ellipsoides ist, dann wird diesen Bedingungen für alle Werte von λ genügt. Ist c die mittlere Axe des Ellipsoides, so ist die zweite Grösse negativ und es kann kein Wert von n gefunden werden, welcher die Lage des Ellipsoides stabil macht. Wenn c die grösste Axe des Ellipsoides ist, dann wird der zweiten Bedingung genügt. Es sei

$$H = (c^2 - a^2)(6c^2 + b^2) + (c^2 - b^2)(6c^2 + a^2),$$

dann müssen wir haben, weil die erste Grösse positiv ist,

$$\left\{(144\,c^2 - 6H)\,n^2 - 5\frac{g}{c}H\right\}^2 - 4\left(6n^2 + 5\frac{g}{c}\right)^2 (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)$$
$$= \text{einer positiven Grösse}, \tag{A}$$

und weil der dritte Ausdruck positiv sein muss, so erhalten wir

$$n^2 > \frac{5\frac{g}{c}H}{144\,c^2 - 6H}. \tag{B}$$

Wird dieser Wert von n^2 in den Ausdruck (A) substituiert, so macht er (A) negativ, folglich liegt der Wert von n^2 zwischen den Wurzeln der quadratischen Gleichung, welche dadurch gebildet wird, dass wir (A) zu Null gleichen. Es ist klar, dass eine der Wurzeln dieser Gleichung positiv ausfällt.

IV. Ist der kleine Schwingungen ausführende Körper stabförmig, so können wir die linearen Bewegungsgleichungen sehr einfach dadurch erhalten, dass wir von den ursprünglichen Bewegungsgleichungen ausgehen.

1. Ein gleichmässiger, schwerer Stab ist an einem festen Punkte O mittelst eines Fadens aufgehangen und macht kleine Schwingungen um die Vertikale. Wie ist die Bewegung beschaffen?

Es sei O der Ursprung des Coordinatensystemes, die Axe der z vertikal abwärts, l die Länge des Fadens, $2a$ diejenige des Stabes. p', q', p, q seien die Cosinus der Winkel, welche der Faden und der Stab mit den Axen der x und der y einschliessen, und u bezeichne den Abstand irgend eines Elementes du des Stabes von demjenigen Ende, mit welchem der Stab befestigt ist. Damit sind die Coordinaten dieses Elementes

$$x = lp' + up, \qquad y = lq' + uq, \qquad z = l + u. \tag{1}$$

Die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes des Stabes sind, wenn M seine Masse und T die Spannung des Fadens bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} l\frac{d^2p'}{dt^2} + a\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{T}{M}p', \qquad l\frac{d^2q'}{dt^2} + a\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{T}{M}q', \\ 0 = g - \frac{T}{M}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nach dem Prinzipe von D'Alembert ist die Momentengleichung um X

$$\Sigma\, du\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma\, du\,(yZ - zY) = \Sigma\, du\,(gy),$$

welche infolge der (1) wird zu

$$\int_0^{2a} du\left\{-(l+u)\left(-l\frac{d^2q'}{dt^2} + u\frac{d^2q}{dt^2}\right\} = 2ag\,(lq' + aq\right).$$

oder
$$-2al\left(l\frac{d^2q'}{dt^2} + a\frac{d^2q}{dt^2}\right) - 2a^2l\frac{d^2q'}{dt^2} - \frac{8}{3}a^3\frac{d^2q}{dt^2}$$
$$= 2ag\,(lq' + aq).$$

Diese Relation geht mittelst der Gleichungen (2) über in

$$l\frac{d^2q'}{dt^2} + \frac{4}{3}a\frac{d^2q}{dt^2} = -gq.$$

Daher sind die vier Bewegungsgleichungen

$$l\frac{d^2p'}{dt^2} + a\frac{d^2p}{dt^2} = -gp', \qquad l\frac{d^2p'}{dt^2} + \frac{4}{3}a\frac{d^2p}{dt^2} = -gp,$$

und zwei ähnliche Gleichungen für q, q'.

Um diese zu lösen, setzen wir

$$p' = F\sin(\lambda t + a), \qquad p = G\sin(\lambda t + a),$$

erhalten
$$l\lambda^2F + a\lambda^2G = gF, \quad l\lambda^2F + \frac{4}{3}a\lambda^2G = gG,$$
$$\lambda^4 - \frac{4a + 3l}{al}g\lambda^2 + 3\frac{g^2}{al} = 0,$$

und können die Werte von λ aus dies r Gleichung gefunden werden.

Dritter Abschnitt.

Stetige Bewegung und kleine Schwingungen.

Bisher haben wir angenommen, dass der Körper kleine Schwingungen um seine Gleichgewichtslage ausführt. Wenn aber der Körper eine stetige Bewegung im Raume besitzt und kleine Schwingungen um diese sich bewegende Position macht, dann werden die Bewegungsgleichungen zusammengesetzter. Zur Vereinfachung der Aufgaben wollen wir voraussetzen, dass zwei der Hauptträgheitsmomente A, B für den festen Punkt gleich sind. Die folgenden Probleme werden genügen zu zeigen, wie wir vorgehen können, wenn ein Punkt des Körpers absolut fest ist und wenn er frei auf einer rauhen Ebene rollt.

I. Ein Körper mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten für seinen Schwerpunkt S dreht sich um einen festen Punkt O in der Axe des ungleichen Hauptmomentes unter der Wirkung der Schwerkraft. Die Axe OS sei zu der vertikalen unter einem Winkel α geneigt und rotiere um sie mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit. Unter welcher Bedingung ist die Bewegung stetig und wie gross ist die Zeit einer kleinen Oscillation?

Dieses Problem ist anzuwenden auf den Fall eines Kreisels, welcher sich mit seinem Scheitel auf einer vollkommen rauhen, horizontalen Ebene dreht.

Es werde der feste Punkt O als Coordinatenursprung und die Axe der z vertikal genommen. Die von O durch den Schwerpunkt S des Körpers gezogene Gerade werde die Axe des Körpers genannt. Die sich bewegenden Axen OA, OB, OC sollen so gewählt werden, dass OC die Axe des Körpers ist und dass OZ, OC, OA stets in einer Ebene liegen. Damit haben wir als Gleichungen der Bewegung

$$\left.\begin{aligned} A\left(\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\frac{d\chi}{dt}\right) - (A-C)\,\omega_2\,\omega_3 &= 0, \\ A\left(\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\frac{d\chi}{dt}\right) + (A-C)\,\omega_3\,\omega_1 &= g\,h\sin\vartheta, \\ C\frac{d\omega_3}{dt} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

und die geometrischen Nebenbedingungen sind

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_2, \qquad \frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta = -\omega_1, \qquad -\frac{d\chi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta = \omega_3. \qquad (2)$$

Eliminieren wir ω_1, ω_2 und setzen $\omega_3 = n$, so erhalten wir

$$A\sin\vartheta\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2A\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} - Cn\frac{d\vartheta}{dt} = 0, \qquad (3)$$

$$A\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - A\cos\vartheta\sin\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + Cn\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} = g\,h\sin\vartheta. \qquad (4)$$

Die stetige Bewegung kann nun wie folgt bestimmt werden.

Wenn die Bewegung stetig sein soll, dann müssen die Grössen ϑ und $\frac{d\psi}{dt}$ beide konstant sein. Setzen wir daher $\vartheta = \alpha$, $\frac{d\psi}{dt} = \lambda$, so wird der Gleichung (3) genügt, und die Gleichung (4) geht über in

$$-A \cos\alpha \sin\alpha\, \lambda^2 + Cn \sin\alpha \cdot \lambda = gh \sin\alpha.$$

Verwerfend den Faktor $\sin\alpha = 0$, weil α nicht klein ist, ergiebt sich

$$n = \frac{A \cos\alpha\, \lambda^2 + gh}{C\lambda}. \tag{5}$$

Dieses ist die Relation, welche stattfinden muss zwischen der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um seine Axe und der Winkelgeschwindigkeit dieser Axe um die Vertikale, wenn die Bewegung stetig sein soll.

Durch die Auflösung dieser Gleichung für λ erhalten wir

$$\lambda = \frac{Cn \pm \sqrt{C^2 n^2 - 4ghA\cos\alpha}}{2A\cos\alpha},$$

folglich müssen wir, damit die Bewegung stetig sein kann, die Bedingung erfüllt haben

$$n^2 > \frac{4ghA\cos\alpha}{C^2}.$$

Wenn α und n gegeben sind, so können wir den Körper mit einem der beiden Werte von λ beweglich machen. Zwischen ω_1 und λ findet die Relation statt

$$\omega_1 = -\lambda \sin\alpha.$$

Ermittelung der kleinen Oscillation.

Um die kleine Schwingung zu finden, setzen wir $\vartheta = \alpha + \vartheta'$ und $\frac{d\psi}{dt} = \lambda + \frac{d\psi'}{dt}$, wo ϑ', $\frac{d\psi'}{dt}$ kleine Grössen sind, deren Quadrate vernachlässigt werden können. Substituieren wir diese Werte in (3) und (4) und schreiben für Cn den aus (5) sich ergebenden Wert, so bekommen wir

$$A\lambda \sin\alpha \frac{d^2\psi'}{dt^2} - (gh - A\lambda^2\cos\alpha)\frac{d\vartheta'}{dt} = 0,$$

$$A\lambda \frac{d^2\vartheta'}{dt^2} + \sin\alpha\,(gh - A\lambda^2\cos\alpha)\frac{d\psi'}{dt} + \lambda^2 A \sin^2\alpha\,\vartheta' = 0.$$

Zum Zwecke der Lösung dieser Gleichungen setzen wir

$$\vartheta' = F\sin(pt + f), \qquad \text{und} \qquad \psi' = G\cos(pt + f).$$

Die Substitution giebt

$$A\lambda \sin\alpha\, p^2 G = -(gh - A\lambda^2\cos\alpha)Fp,$$
$$(A\lambda p^2 - \lambda^2 A \sin^2\alpha)F = -(gh - A\lambda^2\cos\alpha)\sin\alpha\, Gp.$$

Dadurch, dass wir diese Gleichungen miteinander multiplizieren, folgt

$$p^2 = \frac{A^2 \lambda^4 - 2 g h A \cos \alpha . \lambda^2 + g^2 h^2}{A^2 \lambda^2},$$

und die verlangte Zeit ist gleich $\frac{2\pi}{p}$.

Dieser Ausdruck wurde gegeben durch den Rev. N. M. Ferrers of Gonville and Caius College als ein Resultat eines von ihm in den mathematischen Tripos 1859 zur Lösung vorgeschlagenen Problemes.

Wir haben nun noch den Reibungswiderstand an dem festen Punkte zu bestimmen. Die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes des Körpers sind

$$\frac{du}{dt} - v\frac{d\psi}{dt} = X, \qquad \frac{dv}{dt} + u\frac{d\psi}{dt} = Y,$$

wenn u, v die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes parallel und senkrecht zu der Projektion von OA auf die horizontale Ebene bezeichnen und X, Y die Reibungscomponenten in denselben Richtungen sind. Weil der Punkt O fest ist, so haben wir

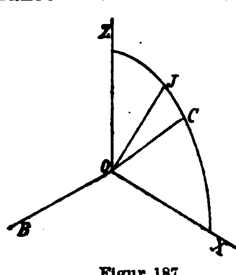
$$u = \omega_2 h \cos \vartheta, \qquad v = -\omega_1 h \cos \vartheta.$$

ω_1 und ω_2 sind durch die Gleichungen (2) bekannt, es können also mit diesen Daten X und Y gefunden werden. Ist die Bewegung stetig, dann haben wir durch (2) $\omega_2 = 0$, $\omega_1 = -\lambda \sin \alpha$, so dass $u = 0$, $v = \lambda \sin \alpha \cos \alpha . h$, wodurch sich für den Reibungswiderstand ergiebt

$$X = -\lambda^2 \sin \alpha \cos \alpha . h, \qquad Y = 0,$$

mithin wirkt der ganze Reibungswiderstand in der vertikalen Ebene ZCA. Weil der Schwerpunkt S einen horizontalen Kreis beschreibt, so muss die an ihm wirkende Kraft nach dem Centrum dieses Kreises gerichtet sein, wir hätten daher dieses Resultat vorhersehen können.

Die stetige Bewegung kann auch sehr leicht durch ein anderes Verfahren bestimmt werden.



Figur 187.

Es sei OC (Fig. 187) die Axe des Körpers, OJ die Momentanaxe, OZ die Vertikale. Diese drei Linien müssen bei stetiger Bewegung in einer vertikalen, mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit n um OZ rotierenden Ebene liegen. Ist Ω die Winkelgeschwindigkeit um OJ, so haben wir $\Omega \cos JC = n$. Ferner sei OB die horizontale Axe, um welche die Schwerkraft den Körper zu drehen sucht, dann ist OB senkrecht zu der Ebene ZOC. Weil die Schwerkraft eine Winkelgeschwindigkeit $\frac{g h \sin \alpha}{A} dt$ in der Zeit dt um OB erzeugt, so hat sich, vermöge des Parallelogrammes der Winkelge-

schwindigkeiten, die Momentanaxe OJ in der Zeit dt durch einen Winkel $\frac{g h \sin\alpha}{A\Omega} dt$ in einer zu der Ebene ZOJ senkrechten Ebene bewegt. Daher ist die der Wirkung der Kräfte zu verdankende Winkelgeschwindigkeit von J um Z

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{g h \sin\alpha}{A\Omega} \cdot \frac{1}{\sin JZ}.$$

Auch ist die Winkelgeschwindigkeit von J um C, welche der Trägheit des Körpers zu verdanken, gleich $\frac{A-C}{A}n$, folglich ist diese Winkelgeschwindigkeit von J um Z

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \frac{A-C}{A} n \frac{\sin JC}{\sin JZ}.$$

Die ganze Winkelgeschwindigkeit ist gleich der Summe dieser zwei, nämlich

$$\lambda = \left(\frac{g h \sin\alpha}{A n} \operatorname{cotg} JC + \frac{A-C}{A} n\right) \frac{\sin JC}{\sin JZ},$$

$$= \frac{g h \sin\alpha . \operatorname{cotg} JC + (A-C)n^2}{A n (\sin\alpha . \operatorname{cotg} JC - \cos\alpha)}.$$

Aber wenn die Bewegung stetig ist, dann liegen OZ, OJ und OC alle in einer Ebene. Nun ist die Winkelgeschwindigkeit von C um J gleich Ω, daher ist seine Winkelgeschwindigkeit um Z

$$\lambda = \Omega \frac{\sin JC}{\sin ZC} = \frac{n}{\cos JC} \cdot \frac{\sin JC}{\sin\alpha},$$

folglich

$$\operatorname{tg} JC = \frac{\lambda \sin\alpha}{n}.$$

Durch Substitution dieses Wertes von $\operatorname{tg} JC$ in den ersten Wert von λ erhalten wir

$$\frac{gh}{\lambda} = Cn - A\lambda\cos\alpha,$$

welches dieselbe Gleichung wie oben ist.

Die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt unter der Wirkung irgend welcher Kräfte kann in vielen Fällen dadurch dargestellt werden, dass wir das Momentalellipsoid auf einer Fläche rollen lassen, welche durch die Bedingungen des Problemes bestimmt ist. Aber diese Repräsentation der Bewegung ist nicht immer eine passende. In dem eben betrachteten Falle kann die stetige Bewegung dadurch repräsentiert werden, dass wir das Ellipsoid auf der Fläche eines geraden Kegels mit vertikaler Axe rollen lassen. Hier ist das Ellipsoid ein Sphäroid mit der Axe OC. Es sei OC als Axe der z genommen und OX links von OC gezogen, dann ist die Gleichung des Schnittes des Ellipsoides durch die Ebene COZ

$$A x^2 + C z^2 = \varepsilon^4. \tag{1'}$$

Sind x, z die Coordinaten des Schnittpunktes der Momentanaxe OJ und des Ellipsoides, ist r der entsprechende Radiusvektor, $\sphericalangle JOC = \beta$, so haben wir

$$A \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta = \frac{\varepsilon^4}{r^2}, \quad tg\, \beta = \frac{\lambda \sin \alpha}{n}. \tag{2'}$$

Die Gleichung der Tangentialebene in dem Endpunkte des Radiusvektor r ist

$$A \sin \beta . x + C \cos \beta . z = \frac{\varepsilon^4}{r}, \tag{3'}$$

und die Gleichung von OZ ist

$$x = z\, tg\, \alpha. \tag{4'}$$

Bezeichnet γ den halben Scheitelwinkel des Kegels, dann ist γ die Neigung von OZ zu der Tangentialebene (3'),

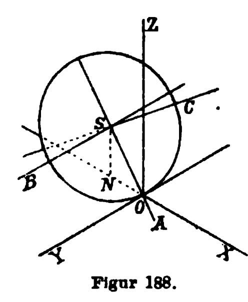
$$tg\, \gamma = \frac{\frac{C}{A} cotg\, \beta + tg\, \alpha}{1 - \frac{C}{A} cotg\, \beta . tg\, \alpha}$$

und nach der Substitution für $cotg\, \beta$ bekommen wir

$$cotg\, \gamma = - \frac{g h \sin \alpha}{A \lambda^2 + g h \cos \alpha}.$$

II. Eine unendlichdünne, kreisförmige Platte bewegt sich auf einer vollkommen rauhen, horizonlalen Ebene in einer solchen Weise, dass sie eine konstante Horizontalneigung α bewahrt. Unter welcher Bedingung ist die Bewegung stetig und wie gross ist die Zeit einer kleinen Schwingung?

Die Masse der Platte werde als Masseneinheit genommen, a sei der Halbmesser der Platte, die Axe der z vertikal. Die Hauptaxen SA, SB, SC des Körpers für seinen Schwerpunkt S bewegen sich mit dem Körper so, da SC normal zu der Ebene der Platte ist, dass die drei Axen SZ, SC, SA (Fig. 188) sämtlich in einer vertikalen Ebene liegen. Es sei O der Berührungspunkt der Platte und der Ebene. X, Y seien die Componenten des Reibungswiderstandes in O parallel und senkrecht zu der Ebene CSA. Der Rest der Bezeichnungen sei derselbe wie vorher.



Figur 188.

Die Gleichungen für die Bewegung um den Schwerpunkt S sind

$$A \left(\frac{d \omega_1}{d t} - \omega_2 \frac{d \chi}{d t} \right) - (A - C) \omega_2 \omega_3 = 0, \tag{1}$$

$$A \left(\frac{d \omega_2}{d t} + \omega_1 \frac{d \chi}{d t} \right) + (A - C) \omega_3 \omega_1 = - X a \sin \vartheta - R a \cos \vartheta, \tag{2}$$

$$C\frac{d\omega_3}{dt} = aY, \tag{3}$$

und die geometrischen Gleichungen

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_2, \quad (4) \qquad \frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta = -\omega_1, \quad (5) \qquad -\frac{d\chi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta = \omega_3. \quad (6)$$

Die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes S sind

$$\frac{du}{dt} - v\frac{d\psi}{dt} = X, \quad (7) \qquad \frac{dv}{dt} + u\frac{d\psi}{dt} = Y, \quad (8) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + R, \quad (9)$$

und die zugehörigen geometrischen Gleichungen

$$u = a\sin\vartheta.\omega_2, \quad (10) \qquad v = -a\omega_3, \quad (11) \qquad z = a\sin\vartheta. \quad (12)$$

Um diese Gleichungen zu lösen, haben wir u, v und z zu eliminieren, dadurch erhalten wir, weil das Quadrat von $\frac{d\vartheta}{dt}$ zu vernachlässigen ist,

$$\left.\begin{array}{c} X = a\sin\alpha\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + a\omega_3\frac{d\psi}{dt}, \quad Y = -a\frac{d\omega_3}{dt} + a\omega_2\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} \\ R = g + a.\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}. \end{array}\right\} \tag{I}$$

Diese Werte in die (1), (2), (3) eingeführt und (5) berücksichtigt giebt

$$\left.\begin{array}{l} A'\left(\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\frac{d\chi}{dt}\right) - (B' - C')\omega_2\omega_3 = 0 \\ B'\frac{d\omega_2}{dt} + A'\omega_1\frac{d\chi}{dt} + (A' + C')\omega_1\omega_3 = -g\,a\cos\vartheta \\ C'\frac{d\omega_3}{dt} - (A' - B')\omega_1\omega_2 = 0, \end{array}\right| \tag{II}$$

wo $\qquad A' = A, \qquad B' = B + a^2, \qquad C' = C + a^2.$

Diese Gleichungen ergeben sich auch, wenn Momente um den Punkt O genommen werden. Um dieses zu thun, müssen wir an jedem Elemente des Körpers eine Acceleration anbringen, welche gleich und entgegengesetzt derjenigen von O ist. Die Acceleration von O, welche der stetigen Bewegung zu verdanken, ist $a\omega_1\frac{d\chi}{dt}$, senkrecht zu der Ebene der Platte, und beim Nehmen der Momente haben wir uns dieselbe in S wirksam zu denken. Die Acceleration von O, welche aus der kleinen Oscillation hervorgeht, kann vernachlässigt werden.

Bestimmung der stetigen Bewegung. Für diese müssen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \frac{d\psi}{dt}$ sämtlich konstant sein. Es sei $\omega_3 = n$, $\frac{d\psi}{dt} = \lambda$, $\vartheta = \alpha$, dann erhalten wir durch Substitution in (4), (5), (6) und (II)

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_1 = -\lambda\sin\alpha, \quad (2A + a^2)n = A\lambda\cos\alpha - \frac{g\,a}{\lambda}\cot g\,\alpha,$$

weil $C = 2A$ ist.

Diese Relation muss zwischen der Winkelgeschwindigkeit der Platte um ihre Axe und der Winkelgeschwindigkeit der horizontalen Tangente bestehen, damit die Bewegung stetig sein kann. Der Berührungspunkt der Platte und der Ebene beschreibt auf der Ebene einen Kreis und es sei r der Radius dieses Kreises. Weil die Platte in der Zeit $\frac{2\pi}{\omega_3}$ eine Umdrehung macht, so ist

$$-r\frac{2\pi}{\omega_3}\lambda = 2\pi a, \qquad r = -\frac{\omega_3}{\lambda}a,$$

folglich auch

$$(2A + a^2)r = -A a \cos\alpha + g\frac{a^2}{\lambda}\cot g\,\alpha.$$

Bestimmung der kleinen Schwingung. Wir setzen $\vartheta = \alpha + \vartheta'$, $\frac{d\psi}{dt} = \lambda + \frac{d\psi'}{dt}$, $\omega_3 = n + \omega_3'$, wo ϑ', $\frac{d\psi'}{dt}$, ω_3' kleine Grössen darstellen, deren Quadrate und höhere Potenzen wir zu vernachlässigen haben. Substituierend für ω_1, ω_2, $\frac{d\chi}{dt}$ aus (4), (5), (6) wird die erste der Gleichungen (II)

$$A\sin\alpha\frac{d^2\psi'}{dt^2} + 2A(\cos\alpha\,.\,\lambda - n)\frac{d\vartheta'}{dt} = 0, \tag{13}$$

die dritte

$$(2A + a^2)\frac{d\omega_3}{dt} - a^2\sin\alpha\,.\,\lambda\frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

$$(2A + a^2)(\omega_3 - n) = a^2\sin\alpha\,\lambda(\vartheta - \alpha), \tag{14}$$

die zweite

$$(A + a^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (2A + a^2)\sin\vartheta\,\omega_3\frac{d\psi}{dt}$$

$$= -A\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = -g a\cos\vartheta,$$

welche sich reduziert auf

$$(A + a^2)\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} + L\vartheta' - M\sin\alpha\frac{d\psi'}{dt} = 0, \tag{15}$$

wobei $L = -A\lambda^2\cos 2\alpha + (2A + a^2)n\lambda\cos\alpha - g a\sin\alpha,$

$$M = 2A\cos\alpha\,.\,\lambda - (2A + a^2)n.$$

Nun giebt die Integration der (13) und die Einführung des Resultates in die (15)

$$(A + a^2)\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} + \{L + 2M(\cos\alpha\,.\,\lambda - n)\}\vartheta' = 0. \tag{16}$$

Die durch die Integration von (13) eingeführte Konstante würde zu einem konstanten Gliede in dem Werte von ϑ' Veranlassung geben, erhalten

durch die Integration von (16), aber alle konstanten Teile von ϑ sind eingeschlossen gedacht in seinem Mittelwerte $\vartheta = \alpha$, folglich muss diese Konstante vernachlässigt werden. Daher ist, wenn T die Zeit einer kleinen Schwingung bezeichnet,

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (A + a^2) = (1 + 2\cos^2\alpha) A \lambda^2 - 2n\lambda\cos\alpha(3A + a^2) + 2n^2(2A + a^2) - g a \sin\alpha,$$

womit dieselbe bestimmt ist.

Die Reibungscomponenten in dem Punkte O können durch die Gleichungen (7) bis (12) gefunden werden.

III. Bestimmung der Bewegung der Kugeln des Regulators von Watt für eine Dampfmaschine.

Die Einrichtung dieses Mechanismus ist wohlbekannt. Ein ähnlicher Apparat wird zur Regulierung der Bewegung der Uhren gebraucht. Wenn hier irgend ein Wachstum in der treibenden Kraft der Maschine, oder irgend eine Verminderung der Widerstände stattfindet, so dass die Maschine beginnt sich schneller zu bewegen, steigen die Kugeln vermöge ihrer wachsenden Centrifugalkraft aufwärts und schneiden mittelst eines Hebels die treibende Kraft ab, oder vermehren die Widerstände um eine dem Ausschlagwinkel proportionale Grösse. Wenn auf der anderen Seite die Maschine zu langsam geht, dann fallen die Kugeln einwärts und eine grössere treibende Kraft gelangt zur Wirkung. In dem Falle einer Dampfmaschine ist der Hebel an die Drosselklappe gefesselt und wird so die Dampfzuführung reguliert. Es ist klar, dass eine vollständige Anpassung der treibenden Kraft an die Widerstände nicht augenblicklich stattfinden kann, aber der Mechanismus wird eine Reihe kleiner Schwingungen um ein mittleres Statium stetiger Bewegung ausführen. Das zu betrachtende Problem kann daher so gestellt werden.

Zwei gleiche Stäbe OA, OA', jeder von der Länge l, sind mit einer vertikalen Spindel durch ein Charnier bei O verbunden, welches eine freie Bewegung in der Ebene AOA' zulässt. In A und A' sind zwei Kugeln, jede von der Masse m, befestigt. Um die Trägheit der anderen Teile der Maschine zu repräsentieren, wollen wir ein horizontales, an der Spindel befestigtes Schwungrad annehmen, welches das Trägheitsmoment J um die Spindel besitzt. Wenn der Mechanismus sich in dem Zustande gleichförmiger Bewegung befindet, seien die Stäbe unter einem Winkel α zu der Vertikalen geneigt und ihre konstante Winkelgeschwindigkeit sei gleich ω. Tritt irgend welche Störung in der Bewegung ein, so schlagen die Stangen um einen Winkel ϑ mit der Vertikalen aus und es kommt eine Kraft ins Spiel, welche das Moment $-\beta(\vartheta - \alpha)$ um die Spindel besitzt. Wie ist die Schwingung um das Statium stetiger Bewegung beschaffen?

Es sei φ der von der Ebene AOA' mit einer festen, vertikalen

Ebene im Raume eingeschlossene Winkel, $m k^2$ das Trägheitsmoment einer Stange mit Kugel um eine Senkrechte zu dem Stabe durch O, die Kugeln als materielle Punkte angesehen.

Die Gleichung des Winkelmomentes um die Spindel ist

$$\frac{d}{dt}\left\{(J + 2 m k^2 \sin^2 \vartheta)\frac{d\varphi}{dt}\right\} = -\beta(\vartheta - \alpha). \tag{1}$$

Die halbe lebendige Kraft des Systemes ist, wenn dieselbe mit T bezeichnet wird,

$$T = \frac{1}{2} J\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + m k^2\left\{\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\},$$

und das Moment der äusseren Kräfte an jeder Stange und Kugel um eine durchgehende zu der Ebene $A O A'$ senkrechte horizontale Linie ist, wenn U die Kräftefunktion, h den Abstand des Schwerpunktes eines Stabes und Kugel von O bezeichnet,

$$\frac{1}{2}\frac{dU}{d\vartheta} = -m g h \sin\vartheta.$$

Lagrange hat aber die Gleichung gegeben

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\vartheta'} - \frac{dT}{d\vartheta} = \frac{dU}{d\vartheta},$$

worinnen ϑ' den Differentialquotienten von ϑ bezüglich der Zeit bezeichnet, folglich erhalten wir, mit $a = \frac{k^2}{h}$,

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{a}\sin\vartheta. \tag{2}$$

Diese Gleichung kann auch dadurch erlangt werden, dass wir die Acceleration einer der als materielle Punkte betrachteten Kugeln in einer Richtung senkrecht zu der Stange, in der den Winkel ϑ enthaltenden Ebene nehmen.

Um die stetige Bewegung zu finden, haben wir $\vartheta = \alpha$, $\frac{d\varphi}{dt} = n$ zu setzen. Damit giebt die Gleichung (2)

$$0 - \sin\alpha\cos\alpha\,.\,n^2 = -\frac{g}{a}\sin\alpha, \qquad n^2\cos\alpha = \frac{g}{a},$$

$$n = \sqrt{\frac{g}{a\cos\alpha}}.$$

Um die Schwingungen zu bekommen, setzen wir $\vartheta = \alpha + x$, $\frac{d\varphi}{dt} = n + y$. Unsere zwei Gleichungen werden alsdann

$$(J + 2\,m\,k^2\,sin^2\,\alpha)\frac{d\,y}{d\,t} + 2\,m\,k^2\,n\,sin\,2\,\alpha\frac{d\,x}{d\,t} = -\,\beta\,x,$$

$$\frac{d^2\,x}{d\,t^2} - n\,sin\,2\,\alpha\,.\,y = \left(n^2\,cos\,2\,\alpha - \frac{g}{a}\,cos\,\alpha\right)\cdot x.$$

Zum Zwecke der Lösung dieser Gleichungen schreiben wir dieselbeu in der Form

$$\left(sin\,2\,\alpha\,D + \frac{\beta}{2\,m\,k^2\,n}\right)n\,x + \left(\frac{J}{2\,m\,k^2} + sin^2\,\alpha\right)D\,y = 0,$$

$$(D^2 + n^2\,sin^2\,\alpha)\,x - n\,sin\,2\,\alpha\,y = 0,$$

wo das Symbol D für die Operation $\frac{d}{d\,t}$ steht. Die Elimination von y durch Multiplikation übers Kreuz giebt

$$\left\{\left(\frac{J}{2\,m\,k^2} + sin^2\,\alpha\right)D^3 + n^2\,sin^2\,\alpha\left(1 + 3\,cos^2\,\alpha + \frac{J}{2\,m\,k^2}\right)D + \frac{\beta}{2\,m\,k^2}\,n\,sin\,2\,\alpha\right\}x = 0.$$

Die reelle Wurzel dieser Gleichung ist notwendigerweise negativ, denn das letzte Glied ist positiv. Die zwei anderen Wurzeln sind imaginär, denn das Glied mit D^2 zwischen zwei Gliedern gleicher Zeichen ist nicht vorhanden. Auch ist, da die Summe der drei Wurzeln gleich Null, der reelle Teil der zwei imaginären Wurzeln positiv. Diese Wurzeln seien daher $-2\,p$ und $p \pm q\sqrt{-1}$. Damit wird

$$x = H\,e^{-2\,p\,t} + K\,e^{p\,t}\,sin\,(q\,t + L),$$

wo H, K, L drei unbestimmte konstante, von der Beschaffenheit der anfänglichen Störung der Bewegung abhängige Grössen bedeuten. Daraus geht hervor, dass die Oscillation unstabil ist. Die Kugeln werden sich abwechselnd der vertikalen Spindel nähern und von ihr entfernen mit wachsender Heftigkeit.

Ein gemeinschaftlicher Fehler der Gouvernatoren ist der, dass sie zu schnell wirken und dadurch keine stetige Änderung in der Bewegung der Maschine eintritt. Wenn die Maschine zu schnell arbeitet, so schneidet der Regulator den Dampfzufluss ab, aber infolge der Trägheit der Maschinerie nimmt die Geschwindigkeit der Maschine nicht plötzlich ab. Die Folge davon ist, dass die Kugeln fortfahren sich zu bewegen, nachdem sie bereits den Dampfzufluss auf den erforderlichen Betrag zurückgeführt haben, und also zu viel Dampf abgeschnitten wird. Ähnliches geschieht, wenn sich die Kugeln einander nähern, wodurch ebenfalls eine beträchtliche Schwingung erzeugt wird. Dieser Fehler kann sehr viel dadurch modifiziert werden, dass ein Widerstand für die Bewegung des Regulators angebracht wird.

In dem Falle, wo die Bewegung eines Uhrwerkes durch ein Centrifugalpendel reguliert wird, ist als Beobachtungsresultat gefunden werden, dass eine starke Irregularität stattfindet. Wenn einmal die Kugeln den geringsten Grad einer elliptischen Bewegung erhalten, ist der Widerstand $\beta(\vartheta - \alpha)$, durch welchen die Bewegung reguliert

wird, geneigt die Ellipse mehr und mehr elliptisch zu machen. Um dieses zu verbessern, muss ein anderer Widerstand angebracht werden. Dieser Widerstand sollte von solchem Charakter sein, dass er die Kreisbewegung nicht ungreift, und nur von der Elliptizität des Momentes hervorgebracht wird

Eine Methode, durch welche dieses bewirkt werden kann, wurde von Sir G. Airy angegeben. Die schwingende Bewegung der Kugeln kann auf eine über die Spindel geschobene Hülse übertragen werden, welche dadurch auf- und abgleitet. Wird diese mit einer horizontalen, kreisförmigen Platte in einem mit Wasser gefüllten Cylinder von nur wenig grösserem Halbmesser verbunden, dann bewegt die Hülse durch ihre Oscillationen die Platte auf und ab. Dadurch kann der Bewegung der Hülse ein sehr grosser Widerstand entgegengestellt werden, welcher bestrebt ist, die Schwingung zu vermindern, während die von statischen, oder langsam alterierenden Kräften abhängige Ruhelage des Schiebers davon total unberührt bleibt.

(Memoires of the Astronomical Society of London, Vol. XX, 1851.)

Bestimmung der Schwingungen eines mit einem Wassercylinder ausgerüsteten Regulators. Die allgemeine Wirkung des Wassers ist die, einen Widerstand hervorzubringen, welcher der Geschwindigkeit proportional ist, sie kann daher dargestellt werden durch ein Glied $-\gamma \frac{d\vartheta}{dt}$ auf der rechten Seite der Gleichung (2). Die Lösung wird dieselbe wie vorher, und die cubische Gleichung nimmt die Form an

$$\left\{\left(\frac{1}{2mk^2} + \sin^2\alpha\right)(D^3 + \gamma D^2) + n\sin^2\alpha\left(1 + 3\cos^2\alpha + \frac{J}{2mk^2}\right)D + \frac{\beta}{2mk^2} n \sin\alpha\right\} x = 0.$$

Wenn die Wurzeln dieser Gleichung reell sind, so sind sie alle negativ, und der Wert von x ist

$$x = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t} + Ce^{-\nu t},$$

wo $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ die Wurzeln bedeuten und A, B, C unbestimmte Konstanten sind.

Wenn nur eine der Wurzeln reell ist, so ist diese Wurzel negativ, bezeichnen wir mit $p \pm \sqrt{-1}$ die anderen beiden Wurzeln, dann hat der Wert von x die Form

$$x = He^{-rt} + Ke^{pt}\sin(qt + L),$$

wenn H, K, L unbestimmte Konstanten bedeuten.

Damit die Bewegung stabil sein kann, ist es nötig, dass die Grösse p negativ ausfällt. Die analytische Bedingung dafür ist

$$\gamma\left(1 + 3\cos^2\alpha + \frac{J}{2mk^2}\right) > \frac{\beta}{2mk^2}\cdot 2\,\mathrm{cotg}\,\alpha.$$

Bei genügend grossem γ wird diese Bedingung erfüllt. Die Gleichförmigkeit der Bewegung der Stangen um die Vertikale wird dann gestört werden

durch eine Oscillation, deren Grösse kontinuierlich abnehmend und deren Periode $\frac{2\pi}{q}$ ist. Durch geeignete Wahl der Grösse von J bei der Konstruktion des Instrumentes kann die Periode manchmal so arrangiert werden, dass der kleinstmögliche üble Effekt zum Vorschein kommt. Wenn die Periode sehr lang gemacht wird, so wird das Instrument glatt arbeiten. Wenn sie sehr kurz gemacht werden kann, so wird die kleinste Abweichung von der Kreisbahn stattfinden.

In dieser Untersuchung sind die Reibungswiderstände an den Charnieren und den übrigen mechanischen Teilen des Gouvernators nicht berücksichtigt worden, welche nicht unbeträchtlich sein werden. Diese sind in vielen Fällen bestrebt, die Oscillation zu reduzieren und in Grenzen zu halten.

In dem Falle von Watt's Regulator, wo irgend eine permanente Änderung in der Relation zwischen der treibenden Kraft und dem Widerstande gemacht wird, ist das Statium gleichförmiger Bewegung, welches die Maschine schliesslich annehmen wird, verschieden von demjenigen, welches sie vorher besass. Treibt die Maschine eine gegebene Zahl von Webstühlen, so sind die Arme OA, OA' des Regulators zu einander unter einem gewissen Winkel 2α geneigt und drehen sich mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit n um die Vertikale. Wenn nun irgend eine Zahl von Webstühlen plötzlich ausgerückt wird, so werden sich die Kugeln von einander entfernen und die Arme unter einem anderen Winkel $2\alpha'$ zu einander geneigt sein, auch werden sich die Kugeln jetzt mit einer Winkelgeschwindigkeit n' um die Spindel drehen. In diesem Falle ist $n'^2 \cos\alpha' = n^2 \cos\alpha$. Der Gang der Maschine wird daher alteriert, sie arbeitet mit einem kleineren Widerstande schneller als mit einem grösseren, was ein grosser Mangel von Watt's Regulator ist. Aus dieser Ursache ist geschlossen worden, dass der Ausdruck „Gouvernator" ungeeignet sei, das Instrument ist in der That nur ein Moderator der Schwankungen der Maschine.

Diesem Mangel kann beträchtlich dadurch gesteuert werden, dass der Parabelregulator von Huyghens verwendet wird. Bei diesem Instrumente bewegen sich die Schwerpunkte A, A' der Kugeln auf dem Bogen einer Parabel, die Axe dieser Curve ist die Rotationsaxe. Es sei AN eine Ordinate der Parabel, AG die Normale, dann ist NG konstant und gleich dem Halbparameter L. Sehen wir die Kugeln als schwere Punkte und sämtliche Stangen als unendlich dünn an, so erkennen wir durch das Kräftedreieck, dass die Kugeln in jeder Lage auf dem Bogen ruhen, wenn $n^2 L = g$ ist, wo n die Winkelgeschwindigkeit der Kugeln um die vertikale Axe durch O bedeutet. Auch ist klar, dass die Kugeln auf dem Bogen gleiten müssen, wenn die Winkelgeschwindigkeit nicht die durch diese Formel gegebene ist. Durch diese Modifikation wirkt der Regulator in folgender Weise. Wenn der Widerstand vermindert wird, beginnt die Maschine zu laufen, die Kugeln steigen und der Dampfzufluss wird abgesperrt. Es ist klar, dass das Gleichgewicht nicht belästigt wird, bis die Menge von Dampf zugeführt wird, welche genügt, die Maschine in genau demselben Gang wie vorher zu erhalten.

Der Leser, welcher weiteres Interesse für den Gegenstand der Gouvernatoren besitzt, wird verwiesen auf: Abhandlung von Sir G. Airy, Vol. XI, of the Memoirs of the Astronomical Society, 1840; daselbst sind vier verschiedene Konstruktionen be-

trachtet. Artikel von Mr. Simens in the Phil. Trans. for 1866. Kurzer Abriss mehrerer Arten von Gouvernatoren von Prof. Maxwell in the Phil. Mag., for 1868. Bericht über mehrere Experimente durch Mr. Ellery mit dem parabolischen Regulator von Huyghens in the Astronomical Notices for December, 1875. Poncelet, Cours de mécanique appliquée etc. (deutsch von Schnuse). Franke, Zeitschrift des österreichischen Ingenieurvereins, 1849. Grashof, Theoretische Maschinenlehre

Dem Studierenden, welcher sich eingehender mit der Theorie kleiner Schwingungen beschäftigen will, wird empfohlen: Routh, Dynamics of a System of Rigid Bodies. Bei der Zusammenstellung des Inhaltes dieses Kapitels wurden die Werke von Routh verwendet, sofern nicht andere Angaben gemacht worden sind.

Zehntes Kapitel.

Bewegung veränderlicher, materieller Systeme.

In diesem Kapitel wollen wir Bewegungen vollkommen biegsamer, unelastischer und elastischer Fäden, Seile, Ketten betrachten.

I. Aufstellung der allgemeinen Bewegungsgleichungen eines vollkommen biegsamen Fadens unter der Wirkung beliebiger Kräfte.

Der irgend welchen Kräften unterworfene Faden kann entweder vollkommen unausdehnbar oder elastisch sein, welche Fälle wir bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen unterscheiden.

a) Der Faden ist unausdehnbar.

Die Gestalt der Curve des der Wirkung beliebiger Kräfte ausgesetzten Fadens wird im allgemeinen eine doppelt gekrümmte Linie sein, welche wir auf ein räumliches, rechtwinkeliges Coordinatensystem mit den festen Axen OX, OY, OZ beziehen, so dass (x, y, z) die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Fadencurve sind. Bezeichnet m die Masse einer Längeneinheit des Fadens, so ist $m\,ds$ diejenige eines Bogenelementes ds des Fadens. Die Beschleunigungen der Componentensummen der an irgend einem Fadenelemente wirkenden äusseren Kräfte parallel zu den Coordinatenaxen seien X, Y, Z und die Geschwindigkeiten dieses Elementes parallel zu denselben Axen v_x, v_y, v_z.

Nach dem Prinzipe von D'Alembert ist das Fadenelement ds im Gleichgewichte unter der Wirkung der Kräfte

$$m\,d\,s\left(X-\frac{d\,v_x}{d\,t}\right),\qquad m\,d\,s\left(Y-\frac{d\,v_y}{d\,t}\right),\qquad m\,d\,s\left(Y-\frac{d\,v_z}{d\,t}\right),$$

und der Spannungen in seinen Enden.

Bezeichnet T die Spannung in dem Punkte (x, y, z), so sind deren Componenten parallel zu den Coordinatenaxen $T\frac{d\,x}{d\,s}$, $T\frac{d\,y}{d\,s}$, $T\frac{d\,z}{d\,s}$, und die Spannungscomponenten in dem anderen Endpunkte des Elementes sind, da dessen Coordinaten $(x + d\,x)$, $(y + d\,y)$, $(z + d\,z)$,

$$T\frac{d\,x}{d\,s}+\frac{d}{d\,s}\left(T\frac{d\,x}{d\,s}\right)d\,s,\qquad T\frac{d\,y}{d\,s}+\frac{d}{d\,s}\left(T\frac{d\,y}{d\,s}\right)d\,s,$$

$$T\frac{d\,z}{d\,s}+\frac{d}{d\,s}\left(T\frac{d\,z}{d\,s}\right)d\,s.$$

Dadurch erhalten wir für die Bewegung des Fadens die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d\,v_x}{d\,t} &= \frac{d}{d\,s}\left(T\frac{d\,x}{d\,s}\right)+m\,X,\\ m\frac{d\,v_y}{d\,t} &= \frac{d}{d\,s}\left(T\frac{d\,y}{d\,s}\right)+m\,Y,\\ m\frac{d\,v_z}{d\,t} &= \frac{d}{d\,s}\left(T\frac{d\,z}{d\,s}\right)+m\,Z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

In diesen Gleichungen sind die Variablen s und t von einander unabhängig. Für ein und dasselbe Element des Fadens ist s stets konstant und seine Bahn bestimmt durch Variation von t. Ist dagegen die Curve zu bestimmen, in welcher zu einer Zeit t der Faden hängt, so ist dieselbe gegeben durch Variation von s, während t konstant ist. In dieser Untersuchung ist s die Länge des Bogens von einem beliebigen, in der Curve festen Punkte bis zu dem betrachteten Elemente.

Für das Bogenelement $d\,s$ besteht die Relation $d\,s^2 = d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2$, so dass stets

$$\left(\frac{d\,x}{d\,s}\right)^2+\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)^2+\left(\frac{d\,z}{d\,s}\right)^2=1.$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach t giebt

$$\frac{d\,x}{d\,s}\cdot\frac{d\,v_x}{d\,t}+\frac{d\,y}{d\,s}\cdot\frac{d\,v_y}{d\,t}+\frac{d\,z}{d\,s}\cdot\frac{d\,v_z}{d\,t}=0. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) genügen zur Bestimmung der Coordinaten (x, y, z) und T als Funktionen von s und t.

Diese Gleichungen können auch auf eine andere Form gebracht werden. Es seien φ, ψ, χ die Winkel, welche die Tangente im Punkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen einschliesst, dann ist $\frac{d\,x}{d\,s} = \cos\varphi$, $\frac{d\,y}{d\,s} = \cos\psi$, $\frac{d\,z}{d\,s} = \cos\chi$, womit die Gleichungen (1) die Form annehmen

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d v_x}{d t} &= \frac{d}{d s}(T\cos\varphi) + m X, \\ m\frac{d v_y}{d t} &= \frac{d}{d s}(T\cos\psi) + m Y, \\ m\frac{d v_z}{d t} &= \frac{d}{d s}(T\cos\chi) + m Z. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ferner giebt die Differentiation der goniometrischen Relationen

$$\left.\begin{aligned} -\sin\varphi\frac{d\varphi}{d t} = \frac{1}{d s}\cdot\frac{d^2 x}{d t} = \frac{d v_x}{d s}, \qquad -\sin\psi\frac{d\psi}{d t} = \frac{d v_y}{d s}, \\ -\sin\chi\frac{d\chi}{d t} = \frac{d v_z}{d s}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Dazu kommt noch die bekannte geometrische Gleichung

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1. \quad (5)$$

Die sieben Gleichungen (3), (4), (5) genügen zur Bestimmung der Werte von $v_x, v_y, v_z, \varphi, \psi, \chi, T$.

Findet die Bewegung des Fadens in einer Ebene statt und nehmen wir diese Ebene als Ebene der x, y, dann geht das räumliche Coordinatensystem in ein ebenes mit den Coordinaten x, y über, weil jetzt alle z und alle v_z gleich Null sind. In diesem Falle ist die Bewegung des Systemes vollständig bestimmt durch die Gleichungen

$$m\frac{d v_x}{d t} = \frac{d}{d s}(T\cos\varphi) + m X, \qquad m\frac{d v_y}{d t} = \frac{d}{d s}(T\sin\varphi) + m Y, \quad (6)$$

$$-\sin\varphi\frac{d\varphi}{d t} = \frac{d v_x}{d s}, \qquad \cos\varphi\frac{d\varphi}{d t} = \frac{d v_y}{d s}, \qquad \cos^2\varphi + \cos^2\psi = 1. \quad (7)$$

Die bei der Lösung dieser Gleichungen auftretenden willkürlichen Konstanten und Funktionen müssen aus den besonderen Verhältnissen eines jeden Problemes bestimmt werden.

b. Der Faden ist elastisch.

In diesem Falle sind die dynamischen Gleichungen sowohl als auch die geometrischen Bedingungen von der Elastizität des Fadenmateriales abhängig.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen werden, wenn σ die ungestreckte Länge des Bogens s, $m\,d\sigma$ die Masse eines Elementes $d\sigma$ der ungedehnten Länge, oder ds der gedehnten Länge bezeichnet, und wir denselben Weg wie vorhin gehen,

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d v_x}{d t} &= \frac{d}{d\sigma}\left(T\frac{d x}{d s}\right) + m X, \\ m\frac{d v_y}{d t} &= \frac{d}{d\sigma}\left(T\frac{d y}{d s}\right) + m Y, \\ m\frac{d v_z}{d t} &= \frac{d}{d\sigma}\left(T\frac{d z}{d s}\right) + m Z. \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Um die geometrischen Gleichungen zu finden, haben wir die Relation

$$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2$$

zu differentiieren, die unabhängigen Variablen sind nun σ und t und giebt die Ableitung mit Rücksicht auf t

$$\frac{dx}{d\sigma}\cdot\frac{1}{d\sigma}\cdot\frac{d^2x}{dt} + \frac{dy}{d\sigma}\cdot\frac{1}{d\sigma}\cdot\frac{d^2y}{dt} + \frac{dz}{d\sigma}\cdot\frac{1}{d\sigma}\cdot\frac{d^2z}{dt} = \frac{ds}{d\sigma}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{d\sigma}\right),$$

$$\frac{dx}{d\sigma}\cdot\frac{dv_x}{d\sigma} + \frac{dy}{d\sigma}\cdot\frac{dv_y}{d\sigma} + \frac{dz}{d\sigma}\cdot\frac{dv_z}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{d\sigma}\right).$$

Nennen wir ferner λ den Elastizitätsmodulus des Fadenmateriales, so ist

$$\frac{ds}{d\sigma} = 1 + \frac{T}{\lambda}, \tag{2'}$$

und giebt die Substitution dieses Wertes

$$\frac{dx}{d\sigma}\cdot\frac{dv_x}{d\sigma} + \frac{dy}{d\sigma}\cdot\frac{dv_y}{d\sigma} + \frac{dz}{d\sigma}\cdot\frac{dv_z}{d\sigma} = \left(1 + \frac{T}{\lambda}\right)\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{dT}{dt}. \tag{3'}$$

Die Gleichungen (1'), (2'), (3') werden zur Bestimmung von v_x, v_y, v_z, s und T als Funktionen von σ und t genügen.

Die Gleichungen (1') und (3') können auch leicht auf die Form der Gleichungen (3) und (4) gebracht werden. Die dynamischen Gleichungen sind in diesem Falle

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{d\sigma}(T\cos\varphi) + mX, \\ m\frac{dv_y}{dt} &= \frac{d}{d\sigma}(T\cos\psi) + mY, \\ m\frac{dv_z}{dt} &= \frac{d}{d\sigma}(T\cos\chi) + mZ. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Weiter haben wir

$$\frac{dx}{d\sigma} = \cos\varphi\frac{ds}{d\sigma} = \cos\varphi\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right), \qquad \frac{dy}{d\sigma} = \cos\psi\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right),$$

$$\frac{dz}{d\sigma} = \cos\chi\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right),$$

und es giebt die Differentiation dieser Relationen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{d\sigma} &= -\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}(T\cos\varphi), \\ \frac{dv_y}{d\sigma} &= -\sin\psi\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}(T\cos\psi), \\ \frac{dv_z}{d\sigma} &= -\sin\chi\frac{d\chi}{dt} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}(T\cos\chi). \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Wenn die Bewegung des Fadens in einer Ebene stattfindet, dann ist es oft vorteilhaft, die Geschwindigkeiten parallel und senkrecht zu der Tangente in dem fraglichen Curvenpunkte zu zerlegen.

Es seien v_t, v_n die Geschwindigkeiten des Bogenelementes ds parallel zu der Tangente und der Normalen dieses Elementes der Curve, ϱ sei der Krümmungsradius der Curve daselbst, φ bezeichne den Winkel, welchen die Tangente mit der Abscissenaxe einschliesst, und X', Y' seien die Componenten der resultierenden Beschleunigung der äusseren Kräfte an diesem Elemente ds parallel zur Tangente und Normalen, dann sind die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_t}{dt} - v_n \frac{d\varphi}{dt} &= X' + \frac{dT}{m\,ds}, \\ \frac{dv_n}{dt} + v_t \frac{d\varphi}{dt} &= Y' + \frac{T}{m\varrho}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die geometrischen Gleichungen erhalten wir wie folgt. Wir haben

$$v_x = v_t \cos\varphi - v_n \sin\varphi.$$

Die Differentiation dieser Gleichung mit Bezug auf s giebt

$$\frac{dv_x}{ds} = \frac{dv_t}{ds}\cos\varphi - v_t \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} - \frac{v_n}{ds}\sin\varphi - v_n \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\frac{dv_x}{ds} = \left(\frac{dv_t}{ds} - v_n \frac{d\varphi}{ds}\right)\cos\varphi - \left(\frac{dv_n}{ds} + v_t \frac{d\varphi}{ds}\right)\sin\varphi.$$

Nun ist aber $\frac{dv_x}{ds} = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{ds}{d\varphi} = \varrho$, folglich

$$-\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{dv_t}{ds} - \frac{v_n}{\varrho}\right)\cos\varphi - \left(\frac{dv_n}{ds} + \frac{v_t}{\varrho}\right)\sin\varphi.$$

Weil die Lage der Abscissenaxe willkürlich ist, kann sie so gewählt werden, dass die Tangente während ihrer Bewegung parallel zu der Abscissenaxe in dem betrachteten Statium ist, dann ist $\varphi = 0$, und wir haben

$$0 = \frac{dv_t}{ds} - \frac{v_n}{\varrho}. \tag{9}$$

Ferner erhalten wir, wenn die Abscissenaxe parallel zu der Normalen des fraglichen Curvenpunktes liegt,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv_n}{ds} + \frac{v_t}{\varrho}. \tag{10}$$

Diese vier Gleichungen (8), (9), (10) sind zur Bestimmung von v_t, v_n, φ und T als Funktionen von s und t genügend.

Ist der Faden elastisch, so werden die dynamischen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d v_t}{d t} - v_n \frac{d\varphi}{dt} &= X' + \frac{d T}{m\, d\sigma}, \\ \frac{d v_n}{d t} + v_t \frac{d\varphi}{dt} &= Y' + \frac{T}{m \varrho} \cdot \frac{d s}{d \sigma}. \end{aligned}\right| \tag{8'}$$

Die geometrischen Gleichungen bekommen wir durch Differentiation von

$$v_x = v_t \cos\varphi - v_n \sin\varphi,$$

mit Bezug auf die natürliche Länge σ des Fadens, dieses giebt

$$\frac{d v_x}{d \sigma} = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt}(T \cos\varphi) = \left(\frac{d v_t}{d\sigma} - \frac{v_n}{\varrho} \frac{d s}{d \sigma}\right) \cos\varphi$$

$$- \left(\frac{d v_n}{d\sigma} + \frac{v_t}{\varrho} \frac{d s}{d\sigma}\right) \sin\varphi.$$

Verfahren wir nun genau in derselben Weise wie vorhin, so gelangen wir zu den Relationen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \frac{d T}{d t} &= \frac{d v_t}{d\sigma} - \frac{v_n}{\varrho}\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right), \\ \frac{d\varphi}{dt}\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right) &= \frac{d v_n}{d\sigma} + \frac{v_t}{\varrho}\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

Die Gleichungen (9) und (10) können auch in der folgenden Weise abgeleitet werden. Wird die Bewegung des Punktes P des Fadens durch die Geschwindigkeiten v_t, v_n parallel zu der Tangente PA und der Normalen PO in P dargestellt, dann wird diejenige eines unendlich nahe gelegenen Punktes Q repräsentiert durch die Geschwindigkeiten $v_t + d v_t$, $v_n + d v_n$ parallel zu der Tangente QB und der Normalen QO in Q. Nun sei $PQ = ds$ und ON ein Perpendikel auf AP. Weil der Faden unelastisch ist, so muss die Projektion der resultierenden Geschwindigkeit von Q auf die Tangente in P gleich sein derselben Projektion der Geschwindigkeit von P. Daher ist

$$(v_t + d v_t) \cos d\varphi - (v_n + d v_n) \sin d\varphi = v_t,$$

oder, indem wir zur Grenze übergehen,

$$d v_t - v_n\, d\varphi = 0, \qquad \therefore \frac{d v_t}{d s} - \frac{v_n}{\varrho} = 0.$$

Ferner ist $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit von PQ um P, folglich muss die Differenz der Projektionen der Geschwindigkeiten von P und Q auf eine Richtung, welche beim Übergang zur Grenze senkrecht auf PQ ist, gleich $PQ \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ sein, so dass

$$(v_t + d v_t) \sin d\varphi + (v_n + d v_n) \cos d\varphi - v_n = d s \frac{d\varphi}{dt},$$

oder in der Grenze

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\,v_n}{d\,s} + \frac{v_t}{\varrho}.$$

II. Stetige Bewegung.

Ist die Bewegung eines Fadens von einer solchen Beschaffenheit, dass die Curve, welche er im Raume bildet, stets kongruent und ähnlich gelegen zu der Curve seiner Anfangslage ist, so wird seine Bewegung eine stetige Bewegung genannt.

1. Ermittelung der stetigen Bewegung eines unausdehnbaren Fadens. Es ist augenscheinlich, dass jedes Element des Fadens zwei Geschwindigkeiten unterworfen ist, die eine derselben geht aus der Bewegung der Curve im Raume hervor, die andere ist zu verdanken der Bewegung des Fadens entlang der Curve, welche er im Raume bildet. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet. Die Componenten der Geschwindigkeit der Curve parallel zu den Coordinatenaxen seien a, b zu einer beliebigen Zeit t; c bezeichne die Geschwindigkeit des Fadens entlang seiner Curve.

Die zu den Coordinatenaxen parallelen Geschwindigkeiten eines beliebigen Curvenpunktes sind

$$v_x = a + c\cos\varphi, \qquad v_y = b + c\sin\varphi. \tag{1}$$

Nun sind a, b, c nur Funktionen von t, die Differentiation dieser Gleichungen giebt

$$\frac{d\,v_x}{d\,s} = -\,c\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{d\,s}, \qquad \frac{d\,v_y}{d\,s} = c\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{d\,s},$$

und nach (7) unter I ist

$$\frac{d\,v_x}{d\,s} = -\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Daraus folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = c\,\frac{d\varphi}{d\,s}. \tag{2}$$

Die Substitution der Werte von v_x, v_y in die allgemeinen Bewegungsgleichungen (6) unter I giebt

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\,a}{dt} + \frac{d\,c}{dt}\cos\varphi - c\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} &= X + \frac{d}{d\,s}\left(\frac{T}{m}\cos\varphi\right),\\ \frac{d\,b}{dt} + \frac{d\,c}{dt}\sin\varphi + c\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} &= Y + \frac{d}{d\,s}\left(\frac{T}{m}\sin\varphi\right).\end{aligned}\right\}$$

Durch Substitution des Wertes von $\frac{d\varphi}{dt}$ unter (2) gehen diese Relationen über in

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \left(X - \frac{dc}{dt}\cos\varphi\right) + \frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{T}{m} - c^2\right)\cos\varphi\right\},\\ \frac{db}{dt} &= \left(Y - \frac{dc}{dt}\sin\varphi\right) + \frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{T}{m} - c^2\right)\sin\varphi\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Gestalt der Curve muss von der Zeit unabhängig sein, folglich darf die durch Ausscheidung von T entstehende Gleichung t nicht enthalten. Dieses wird nicht allgemein der Fall sein, es seien denn $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ sämtlich konstant. In einigen Fällen werden ihre Werte durch die bekannten Verhältnisse des gegebenen Problemes bestimmt sein. Die obigen Gleichungen müssen dann in der Weise gelöst werden, dass wir s als einzige unabhängige Variable und t als konstant ansehen.

Bewegt sich der Faden gleichförmig im Raume und gleiten die einzelnen Elemente desselben mit gleichförmiger Geschwindigkeit entlang seiner Curve, so sind $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ sämtlich gleich Null. Es wird in diesem Falle aus den obigen Gleichungen folgen, dass die Gestalt des Fadens derjenigen seiner Ruhelage entspricht, aber die Spannung wird die stationäre Spannung um den Betrag mc^2 überschreiten.

2. Ein elektrisches Kabel wird auf den gleichförmig tiefen Meeresgrund von einem Schiffe aus niedergelassen, welches sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit in gerader Linie bewegt, und das Kabel wird mit einer der Geschwindigkeit des Schiffes gleichen Geschwindigkeit abgelassen. Welches ist die Gleichung der Curve, in der das Tau hängt?

Die Bewegung kann in diesem Falle als eine stetige angesehen werden, und die Gestalt der Curve wird stets dieselbe sein.

Vernachlässigen wir die Reibung des Wassers an dem Kabel, so ist die einzige an dem Taue wirkende Kraft die um den Auftrieb des Wassers verminderte Schwere. Folglich wird die Gestalt der wandernden Curve identisch mit derjenigen der gemeinen Kettenlinie sein und die Spannung in einem beliebigen Punkte des Taues wird die Spannung in der Kettenlinie um das Gewicht einer Kabellänge gleich $\frac{c^2}{g'}$ überschreiten, wenn g' die um die Beschleunigung des Auftriebes verminderte Fallbeschleunigung bezeichnet.

Wir haben nämlich im vorliegenden Falle $X=0$, $Y=-g'$, $Z=0$,

$$v_x = c - c\cos\varphi, \qquad v_y = -c\sin\varphi,$$

$\frac{da}{dt}=0$, $\frac{db}{dt}=0$, womit die Gleichungen (3) übergehen in

$$0 = \frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{T}{m} - c^2\right) \cos\varphi\right\}, \qquad 0 = -g' + \frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{T}{m} - c^2\right) \sin\varphi\right\}.$$

Die Integration dieser Gleichungen giebt

$$g'A = \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \cos\varphi, \quad (1) \qquad g'B = -g's + \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \sin\varphi, \quad (2)$$

wo A und B zwei willkürliche Konstanten bedeuten.

In dem Punkte, wo das Kabel den Meeresgrund vom Schiffe aus zunächst berührt, muss entweder $T = 0$ oder $\varphi = 0$ sein. Wenn nämlich daselbst φ nicht gleich Null ist, so machen die Tangenten in den Endpunkten eines unendlich kleinen Teiles des Kabels daselbst einen endlichen Winkel miteinander; wenn nun T nicht gleich Null ist und wir projizieren die Spannung an den zwei Enden auf irgend eine Richtung, so erhalten wir eine unendlich kleine Masse, welche von einer endlichen Kraft beansprucht wird, was eine unendliche Geschwindigkeit zur Folge haben wird.

Nehmen wir den Punkt, in welchem das Kabel den Meeresgrund vom Schiffe aus zunächst berührt, als Coordinatenursprung, so dass x' die Abscisse eines beliebigen Kabelpunktes in der Richtung der Bewegung des Schiffes, s' die Länge des Kabels vom Ursprunge bis zu diesem Punkte bezeichnet, dann ist $x = x' + ct$, $s = s' + ct$, und mit $\varphi = 0$ ist auch $s' = 0$, $y' = 0$. Daher bekommen wir

$$g'B = -g'.ct, \qquad \text{d. i.} \qquad B = -ct,$$

folglich

$$-g'.ct = g'(s' + ct) + \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \sin\varphi, \qquad g's' = \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \sin\varphi, \quad (3)$$

$$T = mc^2 + \frac{g'ms'}{\sin\varphi},$$

oder, wenn wir $m = \frac{q}{g'}$ setzen, wobei also q das Gewicht der Längeneinheit des Kabels unter Wasser bedeutet,

$$T = q\frac{c^2}{g'} + \frac{qs'}{\sin\varphi}, \qquad (4)$$

wie oben bemerkt wurde.

Aus den Gleichungen (1) und (3) ergiebt sich

$$tg\,\varphi = \frac{dy}{dx'} = \frac{g's'}{A}.$$

Diese Eigenschaft kommt der gemeinen Kettenlinie zu, wodurch die obige Angabe als erwiesen anzusehen ist.

Nun wollen wir den allgemeineren Fall betrachten, nämlich den, in welchem die Reibung des Wassers an dem Kabel mit in Frage gezogen wird.

Wir nehmen dabei an, dass die Reibung des Wassers an jedem Elemente des Kabels proportional der Geschwindigkeit des Elementes ist und in einer Richtung wirkt, welche derjenigen der Bewegung des Elementes entgegengesetzt ist. Jedes Element des Taues besitzt eine Bewegung entlang dem Kabel und eine solche transversal zu ihm. Die Coëfficienten der dadurch entstehenden Reibungswiderstände sind eigentlich nicht dieselben, aber wir wollen sie für beide Bewegungen gleich gross nehmen und den Reibungscoëfficienten mit μ bezeichnen.

Wir nehmen die Abscissenaxe horizontal, x' als Abscisse eines beliebigen Kabelpunktes, gemessen von der Stelle, in welcher das Tau dem Schiffe zunächst den Grund berührt, und in der Richtung der Bewegung des Schiffes, s' als Länge der Curve, gemessen von demselben Orte bis zu dem fraglichen Curvenpunkte. Damit erhalten wir zur Zeit t, wenn für den Punkt x' $t=0$, $x=x'+ct$, $s=s'+ct$. Die an einem Elemente wirkenden Beschleunigungen sind $X=-\mu v_x$, $Y=-g'-\mu v_y$, wobei $v_x=c-c\cos\varphi$, $v_y=-c\sin\varphi$ ist. Mit diesen Werten gehen die Gleichungen (3) über in

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\mu c+\mu c\cos\varphi+\frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{T}{m}-c^2\right)\cos\varphi\right\},\\ 0 &= -g'+\mu c\sin\varphi+\frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{T}{m}-c^2\right)\sin\varphi\right\},\end{aligned}\right\}$$

oder, weil $\cos\varphi=\frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi=\frac{dy}{ds}$,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\mu c\,ds+\mu c\,dx+d\left\{\left(\frac{T}{m}-c^2\right)\cos\varphi\right\},\\ 0 &= -g'\,ds+\mu c\,dy+d\left\{\left(\frac{T}{m}-c^2\right)\sin\varphi\right\}.\end{aligned}\right\}$$

Die Integration dieser Gleichungen giebt

$$\left.\begin{aligned} g'A &= -\mu cs+\mu cx+\left(\frac{T}{m}-c^2\right)\cos\varphi,\\ g'B &= -g's+\mu cy+\left(\frac{T}{m}-c^2\right)\sin\varphi,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo A und B zwei willkürliche Konstanten bedeuten.

Ebenso wie im vorhergehenden Falle muss an der Stelle, wo das Kabel vom Schiffe aus den Grund zunächst trifft, entweder $T=0$, oder $\varphi=0$ sein.

Zuerst wollen wir $\varphi=0$ nehmen. In diesem Falle ist an derselben Stelle des Kabels $y=0$ und $s'=0$, so dass

$$g'B=-g'ct, \qquad \text{d. i.} \qquad B=-ct,$$

folglich

$$-g'ct = -g'(s'+ct) + \mu c y + \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \sin\varphi,$$

$$g's' - \mu c y = \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \sin\varphi. \tag{2}$$

Auch ist $g'A + \mu c(s'+ct) - \mu c(x'+ct) = \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \cos\varphi,$

oder

$$g'A + \mu c s' - \mu c x' = \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \cos\varphi. \tag{3}$$

Setzen wir $\frac{\mu c}{g'} = e$, so werden die Gleichungen (2) und (3) zu

$$g's' - eg'y = \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \sin\varphi, \tag{4}$$

$$g'A + eg's' - eg'x' = \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \cos\varphi. \tag{5}$$

Indem wir nun die (4) durch die (5) dividieren und beachten, dass $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx'}$ ist, ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{s' - ey}{A + es' - ex'}. \tag{6}$$

Dieses ist die Differentialgleichung der Curve, in der das Kabel hängt.

Um diese Differentialgleichung zu lösen, bestimmen wir zuerst s' aus ihr, dieses giebt

$$s' = \frac{A\frac{dy}{dx'} - ex'\frac{dy}{dx'} + ey}{1 - e\frac{dy}{dx'}}.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung erhalten wir

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx'}\right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx'^2}(A - ex' + e^2y)}{\left(1 - e\frac{dy}{dx'}\right)^2}.$$

Setzen wir der Einfachheit halber $\frac{dy}{dx'} = p$, $(A - ex' + e^2y) = u$, so geht die letzte Relation über in

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx'} = \frac{-e\frac{dp}{dx'}}{(1-ep)\sqrt{1+p^2}},$$

in welcher die Variablen getrennt sind, so dass die Integration bewirkt werden kann. Auch eine zweite Integration dieser Gleichung ist ausführbar, aber das Resultat wird sehr lang. Die willkürliche Konstante A

kann einen beliebigen Wert haben, derselbe ist abhängig von der zur Zeit $t = 0$ vom Schiffe herabhängenden Kabellänge.

Das Problem der mechanischen Bedingungen der Niederlegung eines submarinen Kabels ist von dem Astronomen Royal in dem Phil. Mag. July, 1858 betrachtet worden. Seine Lösung ist verschieden von der hier gegebenen, aber seine Methode der Integration der Differentialgleichung (6) ist dieselbe.

Die Curve gleicht in ihrem unteren Teile einem Kreisbogen, oder dem unteren Teile einer gemeinen Kettenlinie. In ihrem oberen Teile hat die Curve keine Neigung vertikal zu werden, sondern sie ist bestrebt, sich einer Asymptote zu nähern, welche einen Winkel $arc\,(cotg = e)$ mit dem Horizonte einschliesst. Die Asymptote geht nicht durch den Ort der Berührung des Grundes, sondern unter ihm hinweg; ihr kleinster Abstand ist $\frac{A}{e\sqrt{e^2+1}}$, auch läuft sie unter dem Schiffe hinweg.

Die Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte folgt aus der Gleichung (4), sie ist

$$T = m\,c^2 + m\,g'\frac{s' - e\,y}{\sin\varphi}. \tag{7}$$

Wenn wir den Reibungswiderstand nicht berücksichtigen, dann ist $\mu = 0$, $e = 0$. Die Differentialgleichung der Curve wird in diesem Falle

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{s'}{A} = \frac{m\,g'\,s'}{A'} = \frac{q\,s'}{A'},$$

und die Spannung in einem beliebigen Curvenpunkte

$$T = m\,c^2 + \frac{m\,g'\,s'}{\sin\varphi} = q\,\frac{c^2}{g'} + \frac{q\,s'}{\sin\varphi},$$

wo q das Gewicht der Längeneinheit des Taues unter Wasser bezeichnet.

Integrieren wir noch diese Differentialgleichung, so finden wir

$$y = \frac{A'}{2\,q}\left(e^{\frac{q\,x}{A'}} + e^{-\frac{q\,x}{A'}} - 2\right), \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{1}{2}\,\alpha\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}} - 2\right),$$

mit $\frac{A'}{q} = \alpha$, welches die Gleichung der gemeinen Kettenlinie ist. Die Konstante A' ist sonach die horizontale Spannung des Kabels, welche in allen Punkten gleich gross ist.

Ferner wollen wir voraussetzen, dass die Spannung in dem tiefsten Punkte des Kabels gleich Null ist. In diesem Falle ist es nicht nötig, dass die Tangente in dem tiefsten Curvenpunkte horizontal ist, sie möge deshalb einen Winkel λ mit der Horizontalen einschliessen.

Wir haben jetzt an derselben Stelle des Taues gleichzeitig $x' = 0$,

$y = 0$, $s' = 0$, $T = 0$. Damit geben die Gleichungen (1) als Werte der Konstanten A und B

$$A = -\frac{c^2}{g'} \cos\lambda, \quad B = -\frac{c^2}{g'} \sin\lambda - c\,t,$$

wodurch dieselben geschrieben werden können

$$\left.\begin{aligned} -c^2 \cos\lambda &= -\mu\, c\,(s' + c\,t) + \mu\, c\,(x' + c\,t) + \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \cos\varphi, \\ -c^2 \sin\lambda - g'\,c\,t &= -g'\,(s' + c\,t) + \mu\, c\, y + \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \sin\varphi, \end{aligned}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} -c^2 \cos\lambda + \mu\, c\, s' - \mu\, c\, x' &= \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \cos\varphi, \\ -c^2 \sin^2\lambda - g'\,c\,t &= -g'\,(s' + c\,t) + \mu\, c\, y + \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \sin\varphi, \end{aligned}\right\}$$

und wenn wir wieder $\frac{\mu\, c}{g'} = e$ setzen,

$$\left.\begin{aligned} -c^2 \cos\lambda + g'\,e\,s' - g'\,e\,x' &= \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \cos\varphi, \\ -c^2 \sin\lambda + g'\,s' - g'\,e\,y &= \left(\frac{T}{m} - c^2\right) \sin\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt die Differentialgleichung der Curve

$$\frac{d\,y}{d\,x'} = \frac{-\frac{c^2}{g'} \sin\lambda + s' - e\,y}{-\frac{c^2}{g'} \cos\lambda + e\,s' - e\,x'}, \tag{8}$$

welche in derselben Weise wie die Gleichung (6) integriert werden kann.

Es verdient hier der besondere Fall $e = cotg\,\lambda$ bemerkt zu werden. Die Gleichung (8) giebt mit $x' = 0$, $y = 0$, $\sin\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$, $\cos\lambda = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}}$, $\frac{d\,y}{d\,x'} = tg\,\lambda = \frac{1}{e}$. Diesen zwei Bedingungen wird genügt mit

$$y = \frac{1}{e}\, x',$$

welches folglich das verlangte Integral ist. Das Kabel bildet daher unter diesen Verhältnissen eine gerade Linie, welche unter dem Winkel $\lambda = arc\,(cotg = e) = arc\left(cotg = \frac{\mu\, c}{g'}\right)$ zum Horizonte geneigt ist. Für die Spannung in einem beliebigen Punkte dieses Kabels haben wir die Relation

$$g'\,s' - g'\,e\,y = \frac{T}{m} \sin\lambda,$$

so dass
$$T = \frac{m g' y}{\sin\lambda} \cdot \left(\frac{1}{\sin\lambda} - \cot g\,\lambda\right) = m g' y \frac{1 - \cos\lambda}{\sin^2\lambda}$$
$$= m g' y \frac{(1 - \cos\lambda)(1 + \cos\lambda)}{\sin^2\lambda(1 + \cos\lambda)},$$
$$T = m g' y \frac{1 - \cos^2\lambda}{\sin^2\lambda(1 + \cos\lambda)} = m g' y \cdot \frac{\sin^2\lambda}{\sin^2\lambda(1 + \cos\lambda)},$$
$$T = \frac{m g' y}{1 + \cos\lambda}.$$

3. Ein Kabel werde mit einer Geschwindigkeit c' von einem Schiffe abgelassen, welches sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit c in gerader Linie auf der Oberfläche eines konstant tiefen Sees bewegt. Der Widerstand des Wassers gegen die Bewegung des Kabels sei proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Der Reibungscoëfficient μ_1 des Widerstandes gegen die Longitutinalbewegung sei verschieden von dem Reibungscoëfficienten μ_2 des Widerstandes gegen die Transversalbewegung. Beweise, dass das Kabel die Gestalt einer geraden Linie annehmen kann, welche den Winkel λ mit dem Horizonte einschliesst, so dass $\cot g^2\lambda = \sqrt{e^4 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, wo e das Verhältnis der Geschwindigkeit des Schiffes zu der Endgeschwindigkeit einer seitlich in das Wasser fallenden Kabellänge ist. Beweise auch, dass die Spannung aus der Gleichung gefunden werden kann
$$T = \left\{ y - \frac{\mu_1}{\mu_2} e^2 \left(\frac{c'}{c} - \cos\lambda\right)^2 \frac{y}{\sin\lambda} \right\} m g'.$$

III. Anfangsbewegungen.

1. Ein Faden befindet sich unter der Wirkung irgend welcher Kräfte in einer Ebene und beginnt sich aus einer Ruhelage in der Gestalt irgend einer gegebenen Curve zu bewegen. Wie gross ist die Anfangsspannung in einem beliebigen Punkte?

Es seien $P m\,ds$, $Q m\,ds$ die Componenten der Kräfte an einem beliebigen Elemente ds parallel zu der Tangente und der Normalen dieses Elementes. Die Kraft P nehmen wir positiv, wenn sie in der Richtung wirkt, in welcher s gemessen wird, und Q positiv, wenn sie in der Richtung entlang der Normalen wirkt, wie der Krümmungshalbmesser ϱ gemessen wird, nämlich einwärts. m bezeichnet die Masse einer Längeneinheit des Fadens, v_t die Geschwindigkeit des Elementes parallel zu seiner Tangente, v_n diejenige parallel zu seiner Normalen.

Die Bewegungsgleichungen sind nach I, (8)
$$\frac{dv_t}{dt} - v_n \frac{d\varphi}{dt} = P + \frac{1}{m}\frac{dT}{ds}, \tag{1}$$
$$\frac{dv_n}{dt} = v_t \frac{d\varphi}{dt} = Q + \frac{1}{m}\frac{T}{\varrho}, \tag{2}$$

wo T die Spannung, φ den Neigungswinkel der Tangente zu einer festen Linie bezeichnet.

Die geometrischen Bedingungen sind nach I, (9), (10)

$$\frac{dv_t}{ds} - \frac{v_n}{\varrho} = 0, \quad (3) \qquad \frac{dv_n}{ds} + \frac{v_t}{\varrho} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{4}$$

Die Differentiation von (1) und die Multiplikation von (2) mit $\frac{1}{\varrho}$ giebt

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 v_t}{ds\,dt} - v_n \frac{d^2\varphi}{ds\,dt} - \frac{dv_n}{ds}\cdot\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{dP}{ds} + \frac{1}{m}\cdot\frac{d^2T}{ds^2}, \\ \frac{1}{\varrho}\frac{dv_n}{dt} + \frac{v_t}{\varrho}\cdot\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{Q}{\varrho} + \frac{1}{m}\cdot\frac{T}{\varrho^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ferner erhalten wir durch Differentiation von (3), weil $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds}$ ist,

$$\frac{d^2 v_t}{ds\,dt} - v_n \frac{d^2\varphi}{ds\,dt} - \frac{1}{\varrho}\frac{dv_n}{dt} = 0. \tag{6}$$

Subtrahieren wir nun die zweite der Gleichungen (5) von der ersten dieser Relationen, berücksichtigen dabei die (4) und die (6), so folgt

$$\frac{1}{m}\left(\frac{d^2T}{ds^2} - \frac{T}{\varrho^2}\right) + \frac{dP}{ds} - \frac{Q}{\varrho} = -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

In dem Augenblicke des Beginnes der Bewegung, gerade nachdem etwa der Faden durchschnitten worden ist, können die Quadrate kleiner Grössen vernachlässigt werden, folglich ist $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ zu verwerfen. Daher haben wir

$$\frac{d^2T}{ds^2} - \frac{T}{\varrho^2} = -m\frac{dP}{ds} + m\frac{Q}{\varrho}. \tag{7}$$

Dieses ist die allgemeine Gleichung zur Bestimmung der Spannung des Fadens gerade nachdem er durchschnitten worden ist.

Die beiden willkürlichen Konstanten, welche in die Lösung dieser Gleichung einzuführen sind, müssen aus den besonderen Verhältnissen des Falles bestimmt werden. Wenn die beiden Enden des Fadens frei sind, so muss die Spannung T an diesen Enden Null sein.

Weil der Faden seine Bewegung von einer Ruhelage aus beginnt, so haben wir anfangs $v_t = 0$, $v_n = 0$. Am Ende einer Zeit dt werden $\frac{dv_t}{dt}dt$, $\frac{dv_n}{dt}dt$ die Geschwindigkeiten eines Fadenelementes sein. Folglich erhalten wir, wenn ψ der Winkel der anfänglichen Bewegungsrichtung irgend eines Fadenelementes mit der Tangente desselben ist, durch die Gleichungen (1) und (2)

$$tg\,\psi = \frac{Q + \frac{1}{m} \cdot \frac{T}{\varrho}}{P + \frac{1}{m} \cdot \frac{d\,T}{d\,s}}.$$

Es muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Integrationskonstanten notwendigerweise nur konstant über die ganze Länge des Fadens zur Zeit $t = 0$ sind. Dieselben können Funktionen von t und entweder continuierlich oder discontinuierlich sein. Wenn z. B. ein Punkt des Fadens im Raume absolut fest ist, so kann die transversale Wirkung des festen Punktes auf den Faden verursachen, dass die Konstanten in diesem Punkte discontinuierlich werden. In diesem Falle ist die Gleichung (8) nicht notwendigerweise richtig für Punkte in unmittelbarer Nachbarschaft des festen Punktes.

Für einen heterogenen Faden können wir leicht auf demselben Wege zeigen, dass die Anfangsspannung durch die Gleichung gegeben ist

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{m} \cdot \frac{d\,T}{d\,s}\right) - \frac{1}{m}\frac{T}{\varrho^2} = -\frac{d\,P}{d\,s} + \frac{Q}{\varrho}.$$

2. Ein Faden ist im Gleichgewichte unter der Wirkung von Kräften in einer Ebene. Der Faden wird in einem beliebigen gegebenen Punkte durchschnitten. Wie gross ist die augenblickliche Änderung in der Spannung?

Es sei T_0 die Spannung in einem beliebigen Punkte (x, y) gerade vor dem Augenblicke des Zerschneidens des Fadens daselbst, dann genügen den Kräften P und Q die Gleichgewichtsbedingungen

$$0 = P + \frac{1}{m} \cdot \frac{d\,T_0}{d\,s}, \qquad 0 = Q + \frac{1}{m} \cdot \frac{T_0}{\varrho},$$

folglich haben wir

$$-\frac{d\,P}{d\,s} + \frac{Q}{\varrho} = \frac{1}{m}\frac{d^2\,T_0}{d\,s^2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{T_0}{\varrho}.$$

Wenn nun T' die augenblickliche Änderung in der Spannung bezeichnet, so ist $T' = T - T_0$, und die Gleichung (7) des vorhergehenden Problemes wird

$$\frac{d^2\,T'}{d\,s^2} - \frac{T'}{\varrho^2} = 0.$$

3. Ein Faden ist im Gleichgewichte in der Gestalt eines Kreises um das Centrum einer Repulsivkraft in seinem Mittelpunkte. Der Faden wird in irgend einem Punkte A durchschnitten und es soll bewiesen werden, dass die Spannung in einem beliebigen Punkte P sich ändert in dem Verhältnisse

$$\left(1-\frac{e^{\pi-\vartheta}+e^{-(\pi-\vartheta)}}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\right):1,$$

wo ϑ den durch den Bogen AP umspannten Centriwinkel bedeutet.

Es sei F die Centralkraft, a der Halbmesser des Kreises, dann ist $P=0$, $Q=-F$, womit die Gleichung (7) unter 1 übergeht in

$$\frac{d^2T}{ds^2}-\frac{T}{a^2}=-\frac{F}{a}.$$

Messen wir vom Punkte A nach dem Punkte P, so ist $s=a\vartheta$; auch ist F unabhängig von s. Folglich haben wir

$$\frac{d^2T}{a^2d\vartheta^2}-\frac{T}{a^2}=-\frac{F}{a},\qquad \frac{d^2T}{d\vartheta^2}=T-Fa.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$T=Fa+Ae^{\vartheta}+Be^{-\vartheta}.$$

Für die Bestimmung der willkürlichen Konstanten haben wir die Bedingung $T=0$, wenn $\vartheta=0$ und $\vartheta=2\pi$. Dieses giebt

$$0=Fa+A+B \qquad \text{und} \qquad 0=Fa+Ae^{2\pi}+Be^{-2\pi},$$

woraus folgt

$$A=-\frac{Fa(1-e^{-2\pi})}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}},\qquad B=\frac{Fa(1-e^{2\pi})}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}},$$

so dass

$$T=Fa\left\{1-\frac{(1-e^{-2\pi})e^{\vartheta}-(1-e^{2\pi})e^{-\vartheta}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\right\},$$

$$T=Fa\left\{1-\frac{e^{(\pi-\vartheta)}+e^{-(\pi-\vartheta)}}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\right\}.$$

In dem Augenblicke vor dem Zerschneiden des Fadens ist die Spannung $T=Fa$, folglich erhalten wir für das Verhältnis der Spannungen in dem Augenblicke nach und in dem Augenblicke vor dem Zerschneiden

$$\left(1-\frac{e^{(\pi-\vartheta)}+e^{-(\pi-\vartheta)}}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\right):1,$$

welches das oben gegebene Resultat ist.

4. Ein Faden ruht auf einer glatten, horizontalen Ebene. Auf das eine seiner Enden wird durch eine Impulsivspannung gewirkt. Wie gross ist die impulsive Spannung in einem beliebigen Punkte des Fadens? Wie ist die Anfangsbewegung beschaffen?

Es sei T die Impulsivspannung in einem beliebigen Punkte P, $T+dT$ diejenige in dem folgenden Punkte Q, dann wirken in den Endpunkten des Fadenelementes PQ die Spannungen T und $T+dT$; φ sei der Winkel, welchen die Tangente in P an den Faden mit einer festen

Geraden macht, v_t die Tangential-, v_n die Normalgeschwindigkeit des Elementes PQ zu Anfang der Bewegung.

Durch die Tangential- und Normalzerlegung erhalten wir

$$m v_t\, d s = (T + d T) \cos d \varphi - T, \qquad m v_n\, d s = (T + d T) \sin d \varphi,$$

und wenn wir zur Grenze übergehen

$$v_t = \frac{1}{m} \cdot \frac{d T}{d s}, \qquad v_n = \frac{1}{m} \cdot \frac{T}{\varrho}.$$

Nun ist $\quad \dfrac{d v_t}{d s} = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{d^2 T}{d s^2}, \qquad \dfrac{v_n}{\varrho} = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{T}{\varrho^2} = \dfrac{d v_t}{d s}$, nach I,

folglich

$$\frac{d^2 T}{d s^2} - \frac{T}{\varrho^2} = 0,$$

welche Gleichung die Spannung T bestimmt.

Dieses hätte auch aus der Gleichung (7) unter (1) geschlossen werden können.

Ist die Kette heterogen, dann können wir leicht auf demselben Wege finden

$$\frac{d}{d s}\left(\frac{1}{m} \cdot \frac{d T}{d s}\right) = \frac{1}{m} \cdot \frac{T}{\varrho^2}.$$

Sind T_1, T_2 die Impulsivspannungen in den Endpunkten eines beliebigen Bogens des Fadens, u_1, u_2 die Projektionen der Anfangsgeschwindigkeiten dieser Punkte auf die Tangenten an den Bogen daselbst, so lässt sich beweisen, dass die anfängliche kinnetische Energie des ganzen Bogens gleich $\frac{1}{2}(T_2 u_2 - T_1 u_1)$ ist. Dieses folgt bereits durch Integration von $m(v_t^2 + v_n^2)\, d s$ über die ganze Bogenlänge; aber es ergiebt sich auch daraus, dass die an jedem Ende verrichtete Arbeit das Produkt aus der Spannung und der halben tangentialen Anfangsgeschwindigkeit ist.

IV. Kleine Schwingungen schlaffer Fäden.

1. Eine heterogene Kette ist mit dem einen ihrer Endpunkte aufgehangen und ruht unter der Wirkung der Schwerkraft in einer geraden Linie. Der Kette wird eine kleine Verschiebung in einer vertikalen Ebene beigebracht. Welches sind die Gleichungen der Bewegung?

Es sei O der Aufhängepunkt, die Abscissenaxe OX werde vertikal abwärts gemessen, die horizontale Ordinatenaxe OY liege in der Ebene der Verschiebung. Ferner sei $m\, d s$ die Masse eines beliebigen Bogenelementes von der Länge $PQ = d s$, T die Spannung in P, l die Länge der Kette und Mg ein an ihrem unteren Ende angehangenes Gewicht.

Im vorliegenden Falle sind die Bewegungsgleichungen, weil $X = g$, $Y = 0$, $Z = 0$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{1}{m}\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + g, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{1}{m}\cdot\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Weil wir die Bewegung als sehr klein voraussetzen, so wird der Punkt P in einem sehr kleinen Bogen schwingen, die Tangente in seinem Mittelpunkte vertikal sein, folglich können wir $\frac{dx}{dt} = 0$ setzen. Auch kann die Projektion des unendlich kleinen Bogens ds auf die Axe der x gleich diesem Bogen genommen werden, so dass $dx = ds$. Damit giebt die Integration der ersten der Gleichungen (1)

$$T = C - g\int m\,dx.$$

Nun ist aber $T = Mg$, wenn $x = l$, also $C = Mg$, daher

$$T = Mg + g\int_x^l m\,dx. \quad (2)$$

Für eine homogene Kette nimmt diese Gleichung die einfache Gestalt an

$$T = Mg + mg\,(l - x). \quad (3)$$

Es ist zu bemerken, dass dieser Ausdruck von der Schwingungszeit unabhängig und die Spannung in einem beliebigen Punkte der Kette gleich dem totalen Gewichte der Masse unter diesem Punkte ist.

Die zweite der Gleichungen (1) kann in einer der Formen geschrieben werden

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{1}{m}\frac{d}{dx}\left(T\frac{dy}{dx}\right), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{1}{m}T\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{m}\cdot\frac{dT}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wo T eine Funktion von x ist, gegeben durch die Gleichung (2) oder (3).

Wir wollen nun annehmen, dass die Verschiebungen der materiellen Punkte, welche irgend einen begrenzten Teil der Kette bilden, während einer endlichen Zeit dargestellt werden durch $y = \varphi(x, t)$, wo φ eine kontinuierliche Funktion von x und t bedeutet. Es sei P ein geometrischer Punkt innerhalb dieses Teiles der Kette, welcher sich so bewegt, dass die Partikelgeschwindigkeit bei P, d. i. $\frac{dy}{dt}$ immer gleich irgend einer konstanten Grösse A ist. Bezeichnet v die Geschwindigkeit, mit welcher sich P bewegt, und folgen wir der Bewegung von P, so haben wir

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dx\,.\,dt}v = 0. \quad (5)$$

Ferner sei Q ein ebenfalls in diesem Teile gelegener Punkt, so dass die Tangente an die Kette in Q mit der Vertikalen einen Winkel macht, dessen trigonometrische Tangente, d. i. $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{T}$ ist, wo B eine gewisse Konstante bezeichnet, v' die Geschwindigkeit von Q, dann ist

$$T\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)v' = 0. \tag{6}$$

Eliminieren wir die zweiten Differentialquotienten von y aus den Gleichungen (4), (5), (6), so lässt sich leicht ableiten, dass in dem Augenblicke, wo P mit Q zusammenfällt,

$$v\,v' = \frac{T}{m}. \tag{7}$$

Diese Folgerung verlangt, dass die zweiten Differentialquotienten endlich sein müssen und dass y eine kontinuierliche Funktion von x und t sein muss. Sie würde auf keinen der Punkte P anwendbar sein, wenn die diskontinuierlichen Endpunkte zweier Wellen über P hinaus in entgegengesetzter Richtung laufen würden. Die Betrachtung dieser Ausnahme ist für unseren gegenwärtigen Zweck unnötig.

Es sei AB ein verschobener Teil der Kette, welcher in der Richtung AB auf einer Kette sich bewegt, die sonst im Gleichgewichte ist. An den Grenzen der Verschiebung müssen die zwei Teile des Fadens keinen endlichen Winkel miteinander machen. Wenn sie es thäten, so würde ein Element des Fadens von einer endlichen Kraft angegriffen werden, welche das Resultat der zwei endlichen Spannungen in den Endpunkten ist. In einem solchen Falle würde die Verschiebung augenblicklich sich selbst weiter entlang der Kette ausdehnen und eine neue Form aufnehmen. Indem wir diesen Fall ausschliessen, müssen wir haben, so lange als die Bewegung endlich ist, beide $\frac{dy}{dt} = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$, an beiden, dem oberen und dem unteren Ende der Verschiebung. Wenn dann P ein Punkt ist, in welchem $\frac{dy}{dt} = 0$, und Q ein solcher, in welchem $\frac{dy}{dx} = 0$, können P und Q betrachtet werden als genommen gerade innerhalb der Begrenzung der Welle. P und Q werden daher jeder mit der Geschwindigkeit dieser Grenze sich bewegen. Folglich finden wir, indem wir $v = v'$ setzen, für die Geschwindigkeit eines jeden Punktes

$$v^2 = \frac{T}{m}. \tag{8}$$

Es geht daraus hervor, dass wenn sich eine einzelne Welle auf der Kette

bewegt, die Geschwindigkeit so wächst, wie die Welle sich dem oberen Ende nähert. Das obere Wellenende wird etwas rascher sich bewegen als das untere, weil die Spannung in dem oberen Ende diejenige in dem unteren überschreitet; also wird die Wellenlänge stufenweise wachsen. Wenn die Welle die Kette herunterwandert, so nimmt die Geschwindigkeit aus demselben Grunde ab.

In dem siebenten Bande des Journal Polytechnique diskutiert Poisson die Schwingungen einer homogenen, an einem Ende aufgehangenen Kette. $\sqrt{l-x} \pm \frac{1}{2}\sqrt{g}.t$ gleich s oder s' setzend, gemäss dem, wenn das obere oder untere Zeichen genommen wird, und $y' = y\sqrt[4]{l-x}$, führt er die Bewegungsgleichung auf die Form zurück $\frac{d^2 y'}{d s\, d s'} = -\frac{1}{4}\frac{y'}{4(s+s')^2}$. Er erhält das Integral mittelst zweier bestimmter Integrale und zweier unendlicher Reihen. Nach einer ziemlich langen Diskussion der Formen der willkürlichen Funktionen, welche in dem Integrale auftreten, findet er, dass eine einzelne Welle die Kette hinaufwandern wird mit einer gleichförmigen Beschleunigung und herunter mit einer gleichförmigen Verzögerung, jede gleich der halben Fallbeschleunigung.

2. Es sei das Gesetz der Dichtigkeit der in einem Endpunkte aufgehangenen Kette $m = A(l + l' - x)^{\frac{1}{2}}$, wo l die Länge der Kette bedeutet, A, l' zwei Konstanten sind. Auch sei ein Gewicht $= 2Ag\sqrt{l'}$ an dem unteren Ende befestigt. Beweise, dass

$$y = f\left\{(l + l' - x)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{g}{2}}\,t\right\} + F\left\{(l + l' - x)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{g}{2}}\,t\right\}.$$

Die Integration kann hier dadurch bewirkt werden, dass wir schreiben $\vartheta = (l + l')^{\frac{1}{2}} - (l + l' - x)^{\frac{1}{2}}$, die Bewegungsgleichung nimmt dann die Form an $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2} g \frac{d^2 y}{d\vartheta^2}$, welche in der gewöhnlichen Weise gelöst werden kann.

3. Man sagt, dass eine Saite einen harmonischen Ton von sich giebt, wenn ihre Bewegung durch die Gleichung $y = \varphi(x)\sin(\varkappa t + \alpha)$ repräsentiert werden kann, so dass die Bewegung eines jeden Elementes in demselben konstanten Zeitabschnitte sich selbst wiederholt. Zeige, dass die harmonischen Perioden der Seite und des Gewichtes gegeben sind durch

$$\varkappa\sqrt{l'}\,.\,tg\,\varkappa\left\{(l + l')^{\frac{1}{2}} - \sqrt{l'}\right\} = 1. \tag{1}$$

Um dieses zu beweisen, substituieren wir $y = f(\vartheta)\sin(\varkappa t + \alpha)$ in die Differentialgleichung, welche in dem vorhergehenden Beispiele gegeben ist,

wodurch wir finden, dass $f(\vartheta)$ trigonometrisch ist. Weil $y=0$, wenn $x=0$, für alle Werte von t, so reduziert sich der Ausdruck für y auf

$$y = \sin \varkappa \vartheta \left\{ A_\varkappa \sin \varkappa t \sqrt{\frac{g}{2}} + B_\varkappa \cos \varkappa t \sqrt{\frac{g}{2}} \right\}, \tag{2}$$

wo $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ zwei willkürliche Konstanten sind. Aber wenn $x = l$ ist, so muss y der Bewegungsgleichung des Gewichtes $\frac{d^2 y}{dt^2} = -g\frac{dy}{dx}$ genügen. Daraus folgt das Resultat durch Substitution.

4. Wenn die Anfangsbewegung von Saite und Gewicht durch die Gleichungen gegeben ist $y=f(x)$, $\frac{dy}{dt} = F(x)$ zur Zeit $t=0$, dann kann y in eine Reihe entwickelt werden; das allgemeine Glied derselben ist durch die Gleichung (2) des letzten Beispiels ausgedrückt.

Die Werte von $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ lassen sich wie folgt bestimmen. Die Gleichung (1) des letzten Beispiels kann in der Form geschrieben werden

$$\cos \varkappa \vartheta_1 = \varkappa \sqrt{l} \sin \varkappa \vartheta_1,$$

wo ϑ_1 den Wert von ϑ bezeichnet, wenn $x = l$ ist. Wir finden dann leicht, dass

$$\int_0^{\vartheta_1} \sin \varkappa \vartheta \sin \varkappa' \vartheta \, d\vartheta = -\sqrt{l} \sin \varkappa \vartheta_1 \sin \varkappa' \vartheta_1,$$

$$\int_0^{\vartheta_1} \sin^2 \varkappa \vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{2}\vartheta_1 - \frac{1}{2}\sqrt{l} \sin^2 \varkappa \vartheta_1.$$

Diese Resultate kommen durch Integration der linken Seiten und durch Substitution für $\cos \varkappa \vartheta_1$, $\cos \varkappa' \vartheta_1$ die Werte in Gliedern von $\sin \varkappa \vartheta_1$, $\sin \varkappa' \vartheta_1$.

Wenn wir nun beide Seiten der Gleichung (2) mit $\varkappa \vartheta$ multiplizieren und von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \vartheta_1$ integrieren, so finden wir durch den Gebrauch dieser zwei Resultate

$$\frac{1}{2} B_\varkappa (\vartheta_1 + \sqrt{l} \sin^2 \varkappa \vartheta_1) = \int_0^{\vartheta_1} y \sin \varkappa \vartheta \, d\vartheta + f(l)\sqrt{l} \sin \varkappa \vartheta_1.$$

Die Differentiation von (2) und die Durchführung desselben Prozesses giebt

$$\frac{\varkappa}{2} A_\varkappa \sqrt{\frac{g}{2}} (\vartheta_1 + \sqrt{l} \sin^2 \varkappa \vartheta_1) = \int_0^{\vartheta_1} \frac{dy}{dt} \sin \varkappa \vartheta \, d\vartheta + F(l)\sqrt{l} \sin \varkappa \vartheta_1.$$

5. Ein unelastischer, heterogener Faden, auf welchen die Schwerkraft wirkt, ist an zwei festen Punkten aufgehangen. Irgend eine kleine Verschiebung wird dem Faden in seiner eigenen Ebene erteilt und es sollen die daraus folgenden kleinen Oscillationen bestimmt werden.

Es sei die Axe der x horizontal, diejenige der y vertikal, C ein beliebiger Punkt des im Gleichgewichte hängenden Fadens, s der von C aus gemessene Bogen. Ferner seien (x, y) die Coordinaten eines beliebigen Punktes P, welcher bestimmt ist durch Bogen $CP = s$. T sei die Spannung in P, $mg\,ds$ das Gewicht eines bei P gelegenen Fadenelementes.

Die Gleichungen des Gleichgewichtes sind

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) - mg = 0.$$

Bezeichnet α den Winkel, welchen die Tangente an die Curve in P mit der Abscissenaxe einschliesst, so finden wir leicht, dass

$$T = \frac{wg}{\cos\alpha}, \qquad m = w\cdot\frac{d.\,tg\,\alpha}{ds}, \tag{1}$$

wo w eine unbestimmte Konstante bedeutet.

Wenn der Faden in Bewegung ist, seien $(x+\xi,\ y+\eta)$ die Coordinaten der Lage des Punktes P zu der Zeit t, und die Spannung in diesem Punkte sei $T' = T + U$. Damit sind die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{m}\cdot\frac{d}{ds}\left\{T'\left(\frac{dx}{ds} + \frac{d\xi}{ds}\right)\right\},$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{1}{m}\cdot\frac{d}{ds}\left\{T'\left(\frac{dy}{ds} + \frac{d\eta}{ds}\right)\right\} - g,$$

welche durch Subtraktion der Gleichgewichtsbedingungen sich reduzieren auf

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{1}{m}\cdot\frac{d}{ds}\left(T\frac{d\xi}{ds} + U\frac{dx}{ds}\right),\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{1}{m}\cdot\frac{d}{ds}\left(T\frac{d\eta}{ds} + U\frac{dy}{ds}\right),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wenn die Quadrate kleiner Grössen vernachlässigt werden.

Weil der Faden unelastisch ist, besteht die geometrische Relation

$$(dx + d\xi)^2 + (dy + d\eta)^2 = (ds)^2.$$

Die Entwickelung der Quadrate und die Vernachlässigung der Quadrate kleiner Grössen giebt

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\eta}{ds} = 0. \tag{3}$$

Wir haben also drei Grössen, ξ, η und U, als Funktionen von s und t zu bestimmen.

Die Geschwindigkeit, mit welcher eine einzelne Welle den Faden durchläuft, ist in folgender Weise zu ermitteln.

Nehmen wir eine kleine Gleichgewichtsstörung an, welche entlang dem Faden wandert, so dass hier keine plötzliche Änderung der Richtung

des Fadens an den Grenzen der Welle eintritt, dann müssen wir in diesen Punkten haben $\frac{d\xi}{ds}=0$, $\frac{d\eta}{ds}=0$, $\frac{d\xi}{dt}=0$, $\frac{d\eta}{dt}=0$, $U=0$. Es sei v die Geschwindigkeit, mit welcher ein Endpunkt dieser Welle entlang dem Faden wandert, dann ist, wenn wir dieser Grenze mit unserem Geiste folgen,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+v\frac{d^2\xi}{ds.dt}=0, \qquad \frac{d^2\xi}{dt.ds}+v\frac{d^2\xi}{ds^2}=0,$$

und daher

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=v^2\cdot\frac{d^2\xi}{ds^2}$$

mit einer ähnlichen Gleichung für η. Mithin werden die dynamischen Gleichungen an der Grenze

$$\left.\begin{aligned}\left(v^2-\frac{T}{m}\right)\frac{d^2\xi}{ds^2}&=\frac{1}{m}\cdot\frac{dU}{ds}\cdot\frac{dx}{ds},\\ \left(v^2-\frac{T}{m}\right)\frac{d^2\eta}{ds^2}&=\frac{1}{m}\cdot\frac{dU}{ds}\cdot\frac{dy}{ds},\end{aligned}\right\}$$

und die geometrische Bedingung ist

$$\frac{d^2\xi}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds}=-\frac{d^2\eta}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds}.$$

Aus diesen Relationen ergiebt sich leicht $v^2=\frac{T}{m}$. Substituieren wir für T und m die Werte und bezeichnen mit ϱ den Krümmungsradius für den Punkt P, so kommt

$$v=\sqrt{g\varrho\cos\alpha}, \tag{4}$$

womit sich herausstellt, dass die Geschwindigkeit einer jeden Wellengrenze gleich derjenigen ist, welche ein Punkt erlangt, wenn er den vierten Teil der Krümmungssehne durchfällt.

6. Eine Kette ist im Gleichgewichte unter der Wirkung irgend welcher Kräfte, die nur Funktionen der Lage des Elementes im Raume sind, an welchem sie wirken. Es soll bewiesen werden, dass die Geschwindigkeit einer der Grenzen einer einzelnen Welle gleich derjenigen ist, welche zu verdanken ist einem Wege gleich dem vierten Teile der Krümmungssehne in der Richtung der resultierenden Kraft an dieser Grenze.

7. Die Bewegungsgleichungen einer schweren, schlaffen, heterogenen Kette sollen so weit wie möglich gelöst werden.

Es wird bequem sein, die unbekannten Grössen ξ, η, U in Gliedern einer einzigen Funktion φ darzustellen. Wir bezeichnen mit $\alpha+\varphi$ den Winkel, welchen die Tangente in P mit dem Horizonte zur Zeit t macht, dann ist

$$\cos(\alpha + \varphi) = \frac{dx + d\xi}{ds}, \qquad \sin(\alpha + \varphi) = \frac{dy + d\eta}{ds},$$

$$-\varphi \sin\alpha = \frac{d\xi}{ds}, \qquad \varphi \cos\alpha = \frac{d\eta}{ds}, \tag{5}$$

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = -\varrho\,\varphi \sin\alpha, \qquad \frac{d\eta}{d\alpha} = \varrho\,\varphi\cos\alpha, \tag{6}$$

$$\xi = -\int \varrho\,\varphi \sin\alpha\, d\alpha + A, \qquad \eta = \int \varrho\,\varphi \cos\alpha\, d\alpha + B, \tag{7}$$

wo A und B zwei unbestimmte Funktionen von t bedeuten.

Die Gleichungen (2) in 5 werden nun

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\left(-g\,\varphi\, tg\,\alpha + \frac{U}{w}\cos\alpha\right), \\ \frac{d^2\eta}{dt^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\left(g\,\varphi + \frac{U}{w}\sin\alpha\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Der Kürze halber sollen Accente Differentiationen mit Bezug auf t bezeichnen. Indem wir die Differentiationen auf den rechten Seiten ausführen, können diese Gleichungen geschrieben werden

$$\left.\begin{aligned} -\xi''\sin\alpha + \eta''\cos\alpha - g\left(\varphi\sin\alpha + \frac{d\varphi}{d\alpha}\cos\alpha\right) &= U\frac{\cos^2\alpha}{w}, \\ \xi''\cos\alpha + \eta''\sin\alpha + g\,\varphi\cos\alpha &= \frac{dU}{d\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{w}. \end{aligned}\right\}$$

Differentiieren wir die erste mit Bezug auf α und addieren das Resultat zu der zweiten, so folgt

$$\frac{\varrho\,\varphi''}{\cos\alpha} - g\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 2\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{U\cos\alpha}{w}\right).$$

Differentiieren wir die zweite und subtrahieren die erste von dem Resultate, dann wird

$$2g\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{U\cos\alpha}{w}\right).$$

Diese Gleichungen geben offenbar

$$U\cos\alpha = w\,g\left(2\int\varphi\, d\alpha + C\alpha + D\right), \tag{9}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\frac{\cos\alpha}{\varrho}\left(\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 4\varphi + 2C\right), \tag{10}$$

wo C und D zwei unbestimmte Funktionen von t sind. Dieses sind die allgemeinen Gleichungen zur Bestimmung kleiner Schwingungen eines schlaffen Fadens.

Wenn die unverschobene Gestalt des Fadens gegeben ist, so ist ϱ als Funktion von α bekannt. Wir können dann die Gleichung (10) dazu gebrauchen, um φ als Funktion von α und t zu finden. Sodann wird

die Spannung mittelst der Gleichung (9) gefunden, und die Displacements ξ, η eines beliebigen Punktes des Fadens können durch die Gleichungen (7) bestimmt werden.

Die Ermittelung der ganzen Bewegung hängt daher von der Lösung einer einzelnen Gleichung ab. Nehmen wir an, dass die Integrationen bewirkt worden sind, so wird der Ausdruck für φ zwei neue willkürliche Funktionen von α und t enthalten, welche wir durch $\psi\,(P)$, $\chi\,(Q)$ darstellen können, wo ψ und χ willkürliche Funktionen der zwei bestimmten Kombinationen P und Q der Variablen sind. Die willkürlichen Funktionen A und B sind von C und D nicht unabhängig, die Relationen zwischen denselben können durch Substitution in die Gleichungen (8) gefunden werden. Wir haben also hier vier willkürliche Funktionen, ihre Werte sind aus den Bedingungen der Frage zu bestimmen. Sind α_0, α_1 die Werte von α, welche den zwei Enden des Fadens entsprechen, dann sind die Werte von φ und t durch die Frage gegeben für alle Werte von $\alpha = \alpha_0$ bis $\alpha = \alpha_1$, wenn $t = 0$; auch sind die Anfangswerte von A und B gegeben. Also sind die Werte von $\psi\,(P)$ und $\chi\,(Q)$ für alle Werte von P und Q zwischen den Grenzen bestimmt, welche entsprechen $\alpha = \alpha_0$, $t = 0$, und $\alpha = \alpha_1$, $t = 0$. Die Formen von ψ und χ für Werte von P und Q ausserhalb dieser Grenzen, sowie die Werte von A und B, wenn t nicht gleich Null ist, werden aus den Bedingungen für die Enden des Fadens gefunden. Wenn die Enden fest sind, so haben wir $\xi = 0$ und $\eta = 0$ für alle Werte von t, weil $\alpha = \alpha_0$ und $\alpha = \alpha_1$. Es kann sich also ereignen, dass die willkürlichen Funktionen A, B, ψ, χ diskontinuierlich sind.

In vielen Fällen werden uns die Verhältnisse des Problemes in den Stand setzen, auf einmal die Gestalt von C zu bestimmen. Nehmen wir an, dass der Faden symmetrisch um eine vertikale Linie, die Axe der y im Gleichgewichte ist, dass seine Endpunkte in einer horizontalen Linie befestigt sind. In diesem Falle wird, wenn die Anfangsbewegung auch symmetrisch zu der Axe der y ist, die ganze folgende Bewegung symmetrisch sein. Also muss φ eine Funktion von α sein, welche in entwickelter Gestalt nur ungerade Potenzen von α enthält. Die Substitution einer solchen Reihe in die Gleichung (10) zeigt, dass C gleich Null sein muss.

Es sind mehrere Fälle vorhanden, in denen die Gleichung für die kleinen Bewegungen einer Kette mehr oder weniger vollständig integriert werden kann. Einer der am meisten interessierenden Fälle ist der, in welchem die Gleichgewichtscurve des Fadens eine Cycloide ist. Hier haben wir, wenn b den Halbmesser des erzeugenden Kreises bedeutet, $\varrho = 4\,b\cos\alpha$, $m = \dfrac{w}{4\,b\cos^3\alpha}$, so dass der tiefere Teil des Fadens nahezu

von gleichförmiger Dichtigkeit ist, während dieselbe nach oben hin rapid wächst und in den Spitzen unendlich gross ist. Die Gleichung zur Bestimmung der Oscillationen nimmt nun die einfache Form an

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g}{4b}\left\{\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 4\varphi + 2C\right\}, \tag{11}$$

in welcher alle Coëfficienten konstant sind.

Hier sind zwei Bewegungsfälle zu diskutieren: 1) wenn der Faden auf- und abschwingt, 2) wenn er seitlich oscilliert, welche durch die zwei folgenden Beispielen behandelt werden.

8. Ein schwerer Faden ist mit seinen Enden an zwei Punkte einer festen, horizontalen Geraden gefesselt und hängt unter der Wirkung der Schwerkraft in der Gestalt einer Cycloide. Welches sind die symmetrischen Schwingungen des Fadens, wenn der tiefste Punkt sich nur auf und ab bewegt?

In diesem Falle haben wir $C = 0$. Um die Beschaffenheit einer kleinen Schwingung zu finden, setzen wir

$$\varphi = \Sigma R \sin x t + \Sigma R' \cos x t,$$

wo Σ die Summation aller Werte von x bedeutet, R, R' Funktionen von α allein sind. Die Substitution giebt

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + 4\left(1 + \frac{b x^2}{g}\right) R = 0,$$

mit einer ähnlichen Gleichung für die Bestimmung von R'. Daher ist

$$R = L \sin 2\sqrt{\left(1 - \frac{b x^2}{g}\right)}\alpha,$$

wenn L eine willkürliche Konstante bedeutet. Die andere Konstante ist durch die Bedingung bestimmt, dass die Bewegung um die Axe der y symmetrisech ist. Der Kürze halber setzen wir $\lambda = 2\sqrt{\left(1 + \frac{b x^2}{g}\right)}$. Durch Substitution in (7) finden wir, dass die von R abgeleiteten Glieder werden

$$\xi = \Sigma L \frac{2b}{\lambda^2 - 4}\{\lambda \cos \lambda\alpha \sin 2\alpha - 2 \sin \lambda\alpha \cos 2\alpha\} \sin x t,$$

$$\eta = \Sigma\Big[- L\frac{2b}{\lambda^2 - 4}\{\lambda \cos\lambda\alpha \cos 2\alpha + 2\sin\lambda\alpha \sin 2\alpha\}$$

$$- L\frac{2b}{\lambda}\cos\lambda\alpha + H\Big] \sin x t,$$

wo H eine von der Lage der Aufhängepunkte abhängige Konstante bezeichnet. Die von R' abgeleiteten Glieder müssen noch zu diesen addiert

werden, sind aber der Kürze halber weggelassen worden, dieselben können von den angeschriebenen Grössen abgeleitet werden, wenn wir $\cos \varkappa t$ für $\sin \varkappa t$, und L', H' für L, H setzen.

Es sei die Länge des Fadens gleich $2l$, dann ist an jedem Ende $\sin \alpha_0 = \frac{l}{4b}$. An beiden Enden müssen wir haben $\xi = 0$, $\eta = 0$. Allen diesen vier Bedingungen kann genügt werden, wenn

$$\frac{tg\, \lambda \alpha_0}{\lambda} = \frac{tg\, 2\alpha_0}{2}.$$

Diese Gleichung bestimmt daher die möglichen Zeiten einer symmetrischen Vibration eines heterogenen Fadens, welcher in der Gestalt einer Cycloide hängt.

Wenn α nicht sehr gross ist, dann sind die Schwingungen nahezu dieselben wie diejenigen eines gleichförmigen Fadens. In diesem Falle ist, weil α_0 klein, aber $\lambda \alpha_0$ nicht notwendig klein, die approximative Gleichung zur Bestimmung von λ

$$tg\, \lambda \alpha_0 = \lambda \alpha_0.$$

Der kleinste Wert von $\lambda \alpha$, welcher genommen werden darf, ist ein wenig kleiner als $\frac{3}{2}\pi$. Folglich ist λ gross, daher $\varkappa = \sqrt{\left(\frac{g}{4b}\right)}\lambda$ annähernd. Die Ausdrücke für ξ und η nehmen nun die Form an

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \Sigma L \frac{4b}{\lambda^2} \{\lambda \alpha \cos \lambda \alpha - \sin \lambda \alpha\} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4b}}\lambda . t + \varepsilon\right), \\ \eta &= \Sigma L \frac{4b}{\lambda} \{\cos \lambda \alpha_0 - \cos \lambda \alpha\} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4b}}\lambda . t + \varepsilon\right). \end{aligned}\right\}$$

Die Glieder, welche von $\cos \varkappa t$ abhängen, sind eingeschlossen in diesen Ausdrücken für ξ und η durch Einführung von ε in den trigonometrischen Faktor.

Die Wurzeln der Gleichung $\lambda \alpha_0 = tg\, \lambda \alpha_0$ können durch Interpolation gefunden werden. Die erste ist Null, weil aber λ in dem Nenner eines der kleinen Glieder vorkommt, ist dieser Wert unzulässig. Die anderen können durch die Formel ausgedrückt werden $\lambda \alpha_0 = (2i+1)\frac{\pi}{2} - \vartheta$, wo ϑ nicht sehr gross ist. Dieses macht die Zeit einer Vibration nahezu gleich $\frac{4}{2i+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{4gb}}$. Also sind die Schwingungszeiten des Fadens alle klein.

Dieses Resultat zeigt, weshalb das Marschieren von Truppen auf einer Hängebrücke, längere Zeit hindurch, Schwingungen verursacht, welche

so gross werden können, dass sie der Brücke Gefahr bringen. Es ist offenbar möglich, dass die Schrittzeit gleich, oder fast gleich einer der Schwingungszeiten der Brücke sein kann, in welchem Falle eine grosse Anstrengung der Stabilität der Brücke möglich ist.

Es ist zu bemerken, dass die Glieder in dem Ausdrucke für ξ das Quadrat von λ im Nenner besitzen, während jene in dem Ausdrucke für η die erste Potenz von λ enthalten. Weil λ gross ist, so können wir für eine erste Annäherung die Werte von ξ zusammen vernachlässigen und annehmen, dass jedes Element des Fadens sich einfach auf- und abbewege.

Der Leser, welcher eine andere Methode der Diskussion der kleinen Schwingungen eines aufgehangenen Fadens einzusehen wünscht, mag ein Memoir von Mr. Röhrs in dem neunten Bande der Cambridge Transactions konsultieren. Mr. Röhrs betrachtet einen homogenen, zu der Vertikalen symmetrischen und beim Beginne des Prozesses nahezu horizontalen Faden.

9. Ein Faden hängt von zwei Punkten unter der Wirkung der Schwerkraft in der Gestalt einer Cycloide herab. Dieselbe schwingt in ihrer eigenen Ebene von Seite zu Seite so, dass der Mittelpunkt nur eine seitliche, ohne eine bemerkbare vertikale Bewegung besitzt. Welches sind die Schwingungszeiten?

Wie in dem letzten Beispiele setzen wir

$$\varphi = \Sigma R \sin \varkappa t + \Sigma R' \cos \varkappa t,$$

wo R, R' Funktionen von α allein sind. Substituierend in Gleichung (11) sehen wir, dass $2C = \Sigma h \sin \varkappa t + \Sigma k \sin \varkappa t$, wo h und k willkürliche Konstanten bedeuten. Die Gleichung zur Auffindung von R ist

$$\frac{d^2 R}{d\alpha^2} + 4\left(1 + \frac{b\varkappa^2}{g}\right) R = -h.$$

Wenn wir $\lambda^2 = 4\left(1 + \frac{b\varkappa^2}{g}\right)$ wie vorher setzen, finden wir

$$R = -\frac{h}{\lambda^2} + L \sin(\lambda\alpha + M).$$

Daher ist, die Glieder von φ nehmend, welche $\sin \varkappa t$ enthalten,

$$\frac{\xi}{\sin \varkappa t} = \frac{h' - hb\cos 2\alpha}{\lambda^2}$$
$$+ L\frac{2b}{\lambda^2 - 4}\left\{\lambda \cos(\lambda\alpha + M)\sin 2\alpha - 2\sin(\lambda\alpha + M)\cos 2\alpha\right\},$$

wo h' eine willkürliche, durch Integration eingeführte Konstante ist. Substituierend in (8) erhalten wir $h' = -h\left(b + \frac{g}{\varkappa^2}\right)$. Auch bekommen wir auf demselben Wege

$$\frac{\eta}{\sin \varkappa t} = \frac{hb}{\lambda^2}(2\alpha + \sin 2\alpha)$$
$$- L\frac{2b}{\lambda^2 - 4}\left\{\lambda \cos(\lambda\alpha + M)\cos 2\alpha + 2\sin(\lambda\alpha + M)\sin 2\alpha\right\}$$
$$- L\frac{2b}{\lambda}\cos(\lambda\alpha + M) + H.$$

Wählen wir die zwei Aufhängepunkte in derselben horizontalen Linie, so müssen wir haben $\xi = 0$, $\eta = 0$, wenn $\alpha = \pm\alpha_0$. Diesen Bedingungen kann dadurch genügt werden, dass wir nehmen $M = \frac{\pi}{2}$, $H = 0$, denn dann wird ξ eine gerade und η eine ungerade Funktion von α. In diesem Falle ist für den tiefsten Punkt des Fadens $\eta = 0$. Wir besitzen dann zwei Gleichungen, um $\frac{L}{h}$ zu finden, indem wir diese Werte gleichen, wird

$$\frac{2\,tg\,2\alpha_0 - \lambda\,tg\,\lambda\alpha_0 - \frac{tg\,\lambda\alpha_0}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{\lambda^2-4}{\lambda}}{2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0} = \frac{\lambda\,tg\,\lambda\alpha_0\,tg\,2\alpha_0 + 2}{2\cos^2\alpha_0 + \frac{4}{\lambda^2-4}}.$$

Ist α_0 klein, so wird dieser Gleichung sehr nahe genügt mit $\lambda\alpha_0 = i\pi$, wo i eine beliebige ganze Zahl bedeutet. In diesem Falle nehmen die vollständigen Ausdrücke für ξ und η die einfachen Formen an

$$\xi = \Sigma L\frac{4b}{\lambda^2}(\cos\lambda\alpha_0 - \cos\lambda\alpha - \lambda\alpha\sin\lambda\alpha)\sin\left(\sqrt{\frac{g}{4b}}\lambda . t + \varepsilon\right)$$
$$\eta = \Sigma L\frac{4b}{\lambda}\sin\lambda\alpha\sin\left(\sqrt{\frac{g}{4b}}\lambda . t + \varepsilon\right).$$

10. Wenn die Änderung der Variablen von α, t bis p, q geht, wo
$$p = t + \int\sqrt{\frac{\varrho}{g\cos\alpha}}\,d\alpha, \qquad q = -t + \int\sqrt{\frac{\varrho}{g\cos\alpha}}\,d\alpha,$$
zeige, dass dann die allgemeine Gleichung (10) für kleine Schwingungen die Form annimmt
$$\frac{d^2\varphi'}{dp\,dq} + \frac{\mu^3}{4}\left(\frac{d^2\mu}{d\alpha^2} + 4\mu\right)\varphi' = -\frac{\mu^3}{2}C,$$
wo $\mu^4 = \frac{g\cos\alpha}{\varrho}$, und $\varphi = \mu\varphi'$ ist.

Zeige auch, dass der Coëfficient von φ' eine Funktion von $p+q$ ist; die Gestalt dieser Funktion hängt ab von dem Gesetze der Dichtigkeit des Fadens.

Diese Transformation kann nützlich werden, weil aus 5 folgt, dass p konstant ist für die Grenzen einer einzelnen Welle, welche in der einen Richtung, und q konstant für eine Welle, welche in der anderen Richtung wandert.

11. Ein Faden hängt im Gleichgewichte unter der Wirkung der Schwerkraft in einer solchen Form, dass ihre Gleichung ist $\frac{\cos\alpha}{\varrho} = \frac{b^4}{g}\sin^4(2\alpha + c)$.

wo b und c irgend welche Konstanten sind. Zeige, dass das Dichtigkeitsgesetz gegeben ist durch

$$m = w \frac{b^4}{g} \cdot \frac{\sin^4(2\alpha + c)}{\cos^3 \alpha}.$$

Wird ein solcher Faden in einer symmetrischen Weise in Bewegung versetzt, so lässt sich zeigen, dass seine Bewegung gegeben ist durch

$$\varphi = b \sin(2\alpha + c) \left\{ F\left(t - \frac{\cot(2\alpha + c)}{2b^2}\right) + f\left(t + \frac{\cot(2\alpha + c)}{2b^2}\right) \right\}.$$

12. Wenn ausser der Schwerkraft an jedem Elemente des Fadens noch eine kleine Kraft wirkt, deren Grösse Fg ist, so lässt sich zeigen, dass die Bewegungsgleichung des Fadens ist

$$\frac{\varrho}{g \cos \alpha} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} - 4\varphi - 2C = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{dF}{d\alpha} + 2 \int \frac{F}{\cos \alpha} d\alpha.$$

Ist der Faden nahezu horizontal, also α sehr klein, und $F = f \sin(a t - c\alpha)$, so kann dargethan werden, dass der Nenner des entsprechenden Gliedes in dem Ausdrucke für φ gleich $g(c^2 - 4) - \varrho a^2$ ist.

13. Ein unelastischer Faden ist mit seinen Enden an zwei feste Punkte gefesselt und hängt unter der Wirkung der Schwerkraft in der Gestalt einer Kettenlinie mit dem Parameter c. Irgend eine kleine Verschiebung wird dem Faden in seiner eigenen Ebene erteilt. Verlangt wird die Ermittelung der allgemeinen Gleichung für die kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage.

Es sei α der Winkel, welchen die Berührungslinie in einem beliebigen Punkte der Curve mit dem Horizonte macht, wenn der Faden ruht, $(\alpha + \varphi)$ der Winkel, den dieselbe Linie zu der Zeit t mit der nämlichen Geraden einschliesst. Ferner sei v_t die Tangentialgeschwindigkeit, v_n die Normalgeschwindigkeit eines beliebigen Fadenelementes ds, T' die Spannung dieses Elementes. Die Masse der Längeneinheit werde als Masseneinheit genommen. Damit sind die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung des Fadens

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_t}{dt} - v_n \frac{d\varphi}{dt} &= -g \sin(\alpha + \varphi) + \frac{dT'}{ds} \\ \frac{dv_n}{dt} + v_t \frac{d\varphi}{dt} &= -g \cos(\alpha + \varphi) + \frac{T' d(\alpha + \varphi)}{ds}. \end{aligned}\right\}$$

Die Direktrix der Kettenlinie werde als Abscissenaxe genommen und s von dem Punkte an gemessen, welcher mit dem tiefsten Punkte der Kettenlinie zusammenfällt, wenn der Faden im Gleichgewichte ist. Dann ist die Spannung des ruhenden Fadens $gy = \frac{gc}{\cos \alpha}$. Nun sei

$$T' = \frac{gc}{\cos \alpha} + T, \qquad tg\, \alpha = \frac{s}{c};$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos^2 \alpha}{c}, \qquad \frac{dT'}{ds} = \frac{\cos^2 \alpha}{c} \cdot \frac{dT'}{d\alpha}.$$

Durch Substitution dieser Werte von T' und $\frac{dT'}{ds}$, uns dabei daran erinnernd, dass bei kleinen Schwingungen die Quadrate und Produkte der kleinen Grössen v_t, v_n, φ vernachlässigt werden können, erhalten wir

$$\frac{dv_t}{dt} = -g\cos\alpha\,.\,\varphi + \frac{\cos^2\alpha}{c}\cdot\frac{dT}{d\alpha}. \tag{1}$$

$$\frac{dv_n}{dt} = g\sin\alpha\,.\,\varphi + g\cos\alpha\frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{c}\cdot T. \tag{2}$$

Ferner bestehen die beiden geometrischen Relationen

$$\frac{dv_t}{ds} - \frac{v_n}{\varrho} = 0, \qquad \frac{dv_n}{ds} + \frac{v_t}{\varrho} = \frac{d\varphi}{dt},$$

wo $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}$ der reziproke Wert des Krümmungshalbmessers ist.

Durch Umwandlung der unabhängigen Variablen in α und Vernachlässigung der Quadrate kleiner Grössen reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$v_n = \frac{dv_t}{d\alpha}, \quad \frac{d^2v_t}{d\alpha^2} + v_t = \frac{c}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3}$$

Zur Abkürzung wollen wir schreiben v_t', v_n', φ'' für $\frac{dv_t}{dt}, \frac{dv_n}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, resp. Um diese Gleichungen zu lösen, müssen wir T aus den Gleichungen (1) und (2) eliminieren. Die Differentiation der zweiten Gleichung giebt

$$\frac{d^2v_t'}{d\alpha^2} = g\cos\alpha\,.\,\varphi + g\cos\alpha\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + \frac{\cos^2\alpha}{c}\cdot\frac{dT}{d\alpha} - \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{c}\cdot T.$$

Die Subtraktion der Gleichung (1) von diesem Resultate liefert

$$\frac{d^2v_t'}{d\alpha^2} - v_t' = g\cos\alpha\left(\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 2\varphi\right) - \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{c}\cdot T,$$

und wenn wir hieraus mittelst (2) T eliminieren, so kommt

$$\cos\alpha\left(\frac{d^2v_t'}{d\alpha^2} + v_t'\right) + 2\left(\sin\alpha\frac{dv_t'}{d\alpha} - v_t'\cos\alpha\right) = g\cos^2\alpha\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}$$

$$+ 2g\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\varphi}{d\alpha} + 2g\varphi. \tag{4}$$

Aber durch (3) ist

$$\frac{d^2v_t'}{d\alpha^2} + v_t' = \frac{c}{\cos^2\alpha}\varphi''. \tag{5}$$

$$\sin\alpha\frac{dv_t'}{d\alpha} - v_t'\cos\alpha = c\int\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\varphi''\,d\alpha.$$

Durch Substitution dieser Werte in die (4) erhalten wir

$$\frac{c}{\cos\alpha}\varphi'' + 2c\int\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\varphi''\,d\alpha = g\left(\cos^2\alpha\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\varphi}{d\alpha} + 2\varphi\right).$$

Wieder differentiierend, wird

$$\frac{c}{\cos\alpha}\frac{d\varphi''}{d\alpha}+\frac{3c\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\varphi''=g\cos^2\alpha\left(\frac{d^3\varphi}{d\alpha^3}+4\frac{d\varphi}{d\alpha}\right);$$

$$\frac{\cos^3\alpha\frac{d\varphi''}{d\alpha}+3\cos^2\alpha\sin\alpha\,\varphi''}{\cos^6\alpha}=\frac{g}{c}\left(\frac{d^3\varphi}{d\alpha^3}+4\frac{d\varphi}{d\alpha}\right);$$

und wenn wir beide Seiten integrieren

$$\frac{\varphi''}{\cos^3\alpha}=\frac{g}{c}\left\{\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}+4\varphi+f(t)\right\}.$$

Kehren wir nun zu der ursprünglichen Bezeichnung zurück, so kann dieses geschrieben werden

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{g}{c}\cos^3\alpha\left\{\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}+4\varphi+f(t)\right\}. \tag{6}$$

Dieses ist die allgemeine Gleichung zur Bestimmung kleiner Schwingungen eines schlaffen Fadens.

Die Spannung des Fadens wird durch die Gleichung (3) gegeben, aber ein anderer Ausdruck dafür kann auch wie folgt gefunden werden. Differentiieren wir die (2), addieren das Resultat zu (1) und beachten die (5), so folgt

$$\frac{c}{\cos^2\alpha}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=g\cos\alpha\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}+2\frac{\cos^2\alpha}{c}\cdot\frac{dT}{d\alpha}+\frac{T}{c}\frac{d.\cos^2\alpha}{d\alpha},$$

oder $\cos\alpha\frac{dT}{d\alpha}-\sin\alpha\,.\,T=\frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{\cos^3\alpha}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\frac{g}{c}\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\right)=\frac{cg}{2}\left\{4\varphi+f(t)\right\}.$

$$\cos\alpha\,T=\frac{cg}{2}\int\left\{4\varphi+f(t)\right\}d\alpha.$$

$$T=\frac{cg}{2\cos\alpha}\left\{f(t)+4\int\varphi\,d\alpha\right\}.$$

Wenn der Faden so straff ist, dass wir die Quadrate von α vernachlässigen können, so haben wir, weil $tg\,\alpha=\frac{s}{c}$, $s=c\alpha$, daher $\frac{ds}{d\alpha}=c$, folglich $\frac{d\varphi}{d\alpha}=c\frac{d\varphi}{ds}$, $\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}=c\frac{d^2\varphi}{ds^2}$.

Die Gleichung (6) geht damit über in

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=gc\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{g}{c}\left\{4\varphi+f(t)\right\}.$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichung sei $\varphi=F(t)+\varphi'$ und $F(t)$ sei eine solche Funktion, dass

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2}=\frac{g}{c}\left\{4F(t)+f(t)\right\}.$$

Dann haben wir

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2}=gc\frac{d^2\varphi'}{ds^2}+4\frac{g}{c}\varphi'. \tag{7}$$

Weil c sehr gross ist, so ist das erste Glied auf der rechten Seite viel wichtiger als das zweite.

14. Ein schwerer Faden hängt im Gleichgewichte in der Gestalt einer Kettenlinie und es wird ihm eine kleine Gleichgewichtsstörung beigebracht. Wie ist die Bewegung des unteren Teiles des Fadens beschaffen?

Wählen wir dieselbe Bezeichnung wie vorhin, so ist die Gleichung der Bewegung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g}{c}\cos^3\alpha\left\{\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 4\varphi + f(t)\right\}. \tag{6}$$

Die Integration wird zwei willkürliche Konstanten in den Wert von φ einführen. Die Formen dieser Funktionen sind durch die Anfangswerte von φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ bestimmt. Die Gestalt der Funktion $f(t)$ ist durch die Bedingung bestimmt, dass $\varphi = 0$, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Die Bedeutung von $f(t)$ kann dadurch gefunden werden, dass wir uns auf die letzte Aufgabe beziehen. Daselbst ist gezeigt worden, dass mit $\varphi = F(t) + \varphi'$ die Funktion $f(t)$ verschwindet, wenn α klein ist. Nun ist $F(t)$ für alle Elemente des Fadens dieselbe Grösse, weil sie nur eine Funktion von t ist. Folglich ist nahe dem tieferen Teile des Fadens, wo α klein ist, die Gleichung $\varphi = F(t)$ äquivalent einer kleinen rotatorischen Bewegung der Curve als ein Ganzes, wobei die Form unverändert bleibt. Die Werte von v_t und v_n können aus den Gleichungen (3) gefunden werden

$$v_n = \frac{dv_t}{d\alpha}, \qquad \frac{d^2v_t}{d\alpha^2} + v_t = \frac{c}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3}$$

Die Integration dieser Gleichungen wird zwei willkürliche Funktionen von t einführen, wir werden haben

$v_t = \psi(t)\sin\alpha + \chi(t)\cos\alpha +$ Glieder, welche von dem Werte von φ abhängen,
$v_n = \psi(t)\cos\alpha - \chi(t)\sin\alpha +$ Glieder, welche von dem Werte von φ abhängen.

Diese willkürlichen Funktionen sind offenbar nur äquivalent den kleinen Translationsbewegungen von $\chi(t)$ und $\psi(t)$ parallel zu den Axen der x und der y resp. Betrachtend den Weg, auf welchem der Faden gestützt ist, so werden die Werte von v_t, v_n an einigen Stellen der Curve bekannt sein. Dieses wird uns in den Stand setzen, die Formen von $\chi(t)$ und $\psi(t)$ zu bestimmen.

Wir wollen annehmen, dass der Faden an keiner Stelle weit von seiner Ruhelage abweicht. Bei der Bestimmung der Bewegung des tieferen Teiles des Fadens können wir $\cos^3\alpha = 1$ setzen und es ist daher die Gleichung (7) der letzten Aufgabe hier zulässig:

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} = cg\frac{d^2\varphi'}{ds^2} + 4\frac{g}{c}\varphi', \tag{7}$$

wo $\varphi = \varphi' + F(t)$ ist.

Um das Integral dieser Gleichung zu erhalten, setzen wir

$$\varphi' = L \sin(ms + nt),$$

welche Substitution giebt

$$-n^2 = -gcm^2 + 4\frac{g}{c},$$

$$n = \pm m\sqrt{gc - \frac{4g}{cm^2}} = \pm ma, \text{ der Kürze halber,}$$

dann sind

$$\varphi' = L \sin m(s + at), \qquad \varphi' = M \sin m(s - at)$$

beide Integrale der Differentialgleichung. Ebenso sind auch

$$\varphi' = L' \cos m(s + at), \qquad \varphi' = M' \cos m(s - at)$$

Integrale, wobei L, M, L', M' irgend welche Werte besitzen können. Der vollständige Wert von φ' wird daher eine Reihe von Gliedern sein, dessen allgemeine Form die Summe dieser vier partiellen Integrale ist, daher

$$\left.\begin{aligned}\varphi' &= L \sin m(s + at) + L' \cos m(s + at) + M \sin m(s - at)\\ &\quad + M' \cos m(s - at),\\ \frac{1}{a}\cdot\frac{d\varphi'}{dt} &= Lm \cos m(s + at) - L'm \sin m(s + at)\\ &\quad - Mm \cos m(s - at) + M'm \sin m(s - at).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Zum Zwecke der Bestimmung der Werte der Konstanten L, M, L', M' müssen wir unsere Zuflucht zu den Anfangswerten von φ' und $\frac{d\varphi'}{dt}$ nehmen. Diesen Anfangswerten können wir die Form geben

$$\left.\begin{aligned}\varphi' &= A \sin ms + A' \cos ms,\\ \frac{1}{a}\frac{d\varphi'}{dt} &= B \sin ms + B' \cos ms,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wo A, A', B, B' bekannte Grössen sind.

Die Anfangswerte von φ' und $\frac{d\varphi'}{dt}$ müssen mit den durch die Gleichungen (8) gegebenen übereinstimmen, wenn wir daselbst $t = 0$ setzen, was giebt

$$\left.\begin{aligned}\varphi' &= (L + M) \sin ms + (L' + M') \cos ms,\\ \frac{1}{a}\frac{d\varphi'}{dt} &= (L - M) m \cos ms - (L' - M') m \sin ms,\end{aligned}\right\}$$

so dass offenbar

$$L + M = A,\ (L - M)m = B',\ L' + M' = A',\ (L' - M')m = -B,$$

folglich

$$L = \frac{1}{2}\left(A + \frac{B'}{m}\right),\quad M = \frac{1}{2}\left(A - \frac{B'}{m}\right),\quad L' = \frac{1}{2}\left(A' - \frac{B}{m}\right),$$

$$M' = \frac{1}{2}\left(A' + \frac{B}{m}\right).$$

Durch Substitution dieser Werte in (8) erhalten wir die allgemeine Gestalt von φ'.

Um die Bedeutung der einzelnen Glieder des Ausdruckes für φ' darzulegen, wählen wir ein beliebiges Glied, nämlich

$$\varphi' = L \sin m(s \pm at),$$

wo

$$a = \sqrt{gc - \frac{4g}{cm^2}}.$$

Dieses ist der Ausdruck für die Bewegung einer Welle von der Länge $\lambda = \frac{2\pi}{m}$ und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $a = \pm\sqrt{gc}\cdot\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2\pi^2}}$.

Weil a für verschiedene Werte von λ verschieden ist, geht daraus hervor, dass Wellen verschiedener Länge mit unbedeutend verschiedenen Geschwindigkeiten sich fortpflanzen.

Wenn der Anfangswert von φ' irgend ein Glied $A \sin ms$ enthält, in welchem $\lambda = \frac{2\pi}{m}$ gleich oder grösser als $c\pi$ ist, dann wird der allgemeine Ausdruck ein ähnliches Glied enthalten. Der Wert von a wird in diesem Falle imaginär und die Form dieses Teiles des Integrales muss geändert werden. Setzen wir $a = b\sqrt{-1}$, dann wird

$$\varphi' = L \sin m(s + bt\sqrt{-1}) = L\{\sin ms \,.\, \cos(mbt\sqrt{-1})$$
$$+ \cos ms \,.\, \sin(mbt\sqrt{-1})\},$$

oder, wenn wir für $\sin(mbt\sqrt{-1})$ und $\cos(mbt\sqrt{-1})$ ihre Exponentialgrössen schreiben,

$$\varphi' = (Le^{mbt} + Me^{-mbt})\sin ms + (L'e^{mbt} + M'e^{-mbt})\cos ms,$$

wo hier L, M, L', M' Konstanten bezeichnen, die von den oben gleich bezeichneten Konstanten verschieden sind.

Wenn $L = 0$, $L' = 0$, so werden die Werte von φ' bald aufhören klein zu sein und die vorhergehende Untersuchung ist dann nicht mehr anwendbar.

Findet sich hier ein Glied $\left(A \sin 2\frac{s}{c} + B\cos 2\frac{s}{c}\right)$ in dem Anfangswerte für φ' vor, dann ist $m = 2$ und die Grösse a in dem ent-

sprechenden Gliede des allgemeinen Ausdruckes für φ' verschwindet. Der allgemeine Ausdruck (8) wird dann für die Glieder $L \sin m(s + a t)$ und $M \sin m(s - a t)$ unvollständig, welche sich zu einem verbinden, und wir haben nicht länger die genügende Anzahl willkürlicher Konstanten. Dieses zeigt eine Änderung in der Form von φ an. Wir wollen annehmen, dass

$$\varphi = L \sin 2\alpha + M \cos 2\alpha + N,$$

wo L, M, N gewisse unbekannte Funktionen von t sind. Substituierend in die Gleichung (6), welche für die ganze Länge des Fadens richtig ist, erhalten wir

$$\frac{d^2 L}{d t^2} \sin 2\alpha + \frac{d^2 M}{d t^2} \cos 2\alpha + \frac{d^2 N}{d t^2} = \frac{g}{c} \cos^3 \alpha \{4 N + f(t)\}.$$

Aber weil L, M, N und $f(t)$ α nicht enthalten, so muss sein

$$\frac{d^2 L}{d t^2} = 0, \qquad \frac{d^2 M}{d t^2} = 0, \qquad \frac{d^2 N}{d t^2} = 0, \qquad 4 N + f(t) = 0.$$

Folglich ist das neue Glied in dem Ausdrucke für φ

$$\varphi = (a + b t) \sin 2\alpha + (a' + b' t) \cos 2\alpha + a'' + b'' t.$$

Die Werte der willkürlichen Konstanten a, b, a', b' werden mittelst der Anfangswerte von φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ gefunden. Auch müssen wir haben, weil $\varphi = 0$, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $a'' = a'$, $b'' = b'$. Davon ist ausgenommen der Fall, in welchem $b = 0$, $b' = 0$, wo die Bewegung bald aufhören wird klein zu sein, so dass die vorstehende Untersuchung nicht mehr verwendbar ist.

Wenn der Anfangswert von $\frac{d\varphi}{dt}$ gleich Null ist, dann ist $b = 0$ und $b' = 0$, womit

$$\varphi = a \sin 2\alpha + a'(1 + \cos 2\alpha).$$

Weil dieser Ausdruck t nicht enthält, so ergiebt sich, dass die Teile des Fadens relativ in Ruhe zu einander sind. Dieses hätten wir vorhersehen können, denn das Glied $a \sin 2\alpha$ entspricht einer kleinen Änderung in dem Parameter der Kettenlinie, so dass der Faden noch in der Gestalt einer Kettenlinie ist, obgleich diese nicht dieselbe Kurve wie vorher, denn wenn

$$tg\,\alpha = \frac{s}{c}, \qquad \text{und} \qquad tg\,(\alpha + \varphi) = \frac{s}{c + \gamma},$$

wo s von dem tiefsten Punkte der Kurve gemessen, und γ die kleine Änderung ist, so haben wir durch Taylor's Satz

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \varphi = -\frac{s}{c^2} \gamma, \qquad \text{oder} \qquad \varphi = -\frac{\gamma}{2c} \sin 2\alpha.$$

Das Glied $a'(1 + \cos 2\alpha)$ entspricht einem Gleiten des Fadens entlang

seiner Kurve, so dass die Kurve noch in derselben Gestalt wie vorher ist. Denn wenn $tg\,\alpha = \frac{s}{c}$ und $tg(\alpha + \varphi) = \frac{s+\gamma}{c}$, wo γ die Gleitung bedeutet, haben wir

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\varphi = \frac{\gamma}{c}, \qquad \varphi = \frac{\gamma}{2c}(1 + \cos 2\alpha).$$

15. Ein schwerer Faden von der Länge $2l$ ist an zwei, in einer horizontalen Linie gelegenen Punkten, deren Abstand fast gleich $2l$ ist, befestigt. Bestimme die kleinen Schwingungen des Fadens.

Mit denselben Bezeichnungen wie vorher lasse sein

$$\varphi' = L \sin(ms + nt)$$

ein beliebiges Glied in dem Ausdrucke für φ', wobei s von dem Mittelpunkte des Fadens aus gemessen ist. Die entsprechende Bewegung eines beliebigen Elementes des Fadens kann durch die Gleichungen (3), Aufgabe 13, gefunden werden. Weil der Faden nahezu horizontal ist, so ist α klein, weshalb wir $\cos^2\alpha = 1$ setzen können, wodurch wir erhalten

$$v_n = \frac{dv_t}{d\alpha}, \qquad \frac{d^2 v_t}{d\alpha^2} + v_t = c\frac{d\varphi}{dt}.$$

Die Integration dieser Gleichungen giebt, weil sehr nahe $s = c\alpha$,

$$v_t = \psi(t)\sin\frac{s}{c} + \chi(t)\cos\frac{s}{c} + \frac{mcL}{1-m^2}\sin(ms + nt) + cF'(t),$$

$$v_n = \psi(t)\cos\frac{s}{c} - \chi(t)\sin\frac{s}{c} - \frac{mnc^2L}{1-m^2}\cos(ms + nt).$$

Da die Fadenenden an zwei feste Punkte gefesselt sind, so müssen beide, v_t und v_n, verschwinden, wenn $s = \pm l$ ist. Folglich, setzend $s = \pm l$ in der ersten Gleichung und subtrahierend ein Resultat von dem anderen, bekommen wir

$$2\psi(t)\sin\frac{l}{c} + \frac{2L}{1-m^2}\sin ml \cos nt = 0, \tag{10}$$

und wenn wir $s = \pm l$ in der zweiten Gleichung schreiben, sowie die Resultate addieren, wird

$$2\psi(t)\cos\frac{l}{c} + \frac{2mcL}{1-m^2}\cos ml \,.\, \cos nt = 0. \tag{11}$$

Die Elimination von $\psi(t)$ zwischen den Gleichungen (10) und (11) giebt

$$\cos\frac{l}{c}\sin ml - mc\sin\frac{l}{c}\cos ml = 0,$$

oder

$$tg\,ml = mc\,.\,tg\frac{l}{c} = ml, \text{ annähernd,}$$

weil c sehr gross ist.

Diese Gleichung giebt, wenn gelöst, den Typus der möglichen Schwingungen des Fadens.

Folglich wird φ aus einer Reihe von Gliedern in der Form bestehen

$$\varphi = L \sin(ms + nt),$$

wo $n = \pm m \sqrt{gc - \frac{4g}{cm^2}}$, $tg\, ml = ml$ ist.

Wenn die Anfangswerte von φ solche sind, welche ein Glied von solcher Beschaffenheit enthalten, dass der Coëfficient von s der Gleichung (3) nicht genügt, dann wird die Bewegung nicht stetig sein. Ist z. B. eine kleine Verschiebung irgend einem kleinen Teile eines Fadens erteilt worden, so wird sich dieselbe allgemein entlang dem Faden nach beiden Richtungen hin fortpflanzen; nachdem sie einen der festen Punkte erreicht hat, wird sie eine neue, reflektierte Disturbation hervorbringen, welche rückwärts läuft und wieder reflektiert wird von dem anderen festen Endpunkte u. s. f. Mithin wird hier eine Diskontinuität in dem Ausdrucke für φ vorhanden sein. Siehe: Poisson, Mécanique, Art. 485.

V. Kleine Schwingungen gespannter Fäden.

1. Ein elastischer Faden, dessen Gewicht vernachlässigt werden kann, und dessen ungedehnte Länge gleich l ist, ist mit seinen Enden an zwei feste Punkte mit dem wechselseitigen Abstande l' gefesselt. Der Faden erleidet eine solche Gleichgewichtsstörung, dass jeder seiner materiellen Punkte sich entlang der Fadenlinie bewegt. Welches sind die Bewegungsgleichungen?

Es sei A einer der festen Punkte, AB der ungedehnte, in einer geraden Linie liegende Faden. Das Ende B sei sodann bis zu dem anderen festen Punkte B' gezogen und daselbst befestigt. PQ sei ein Element des ungestreckten Fadens, $P'Q'$ dasselbe Element zu der Zeit t. Ferner sei $AP = x$, die Abscisse $AP' = x'$, T die Spannung des Fadens in P', $T + dT$ diejenige in Q', m die Masse einer Längeneinheit des ungestreckten Fadens. Damit ist die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{dT}{dx}. \tag{1}$$

Bezeichnet E den Elastizitätsmodulus, so haben wir nach Hooke's Prinzip

$$\frac{dx'}{dx} = 1 + \frac{T}{E}. \tag{2}$$

Die Elimination von T zwischen diesen zwei Gleichungen giebt

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{E}{m} \cdot \frac{d^2x'}{dx^2}. \tag{3}$$

Setzen wir $E = m a^2$, so ist das Integral dieser Gleichung

$$x' = f(a t - x) + F(a t + x),$$

wo f und F willkürliche Funktionen sind.

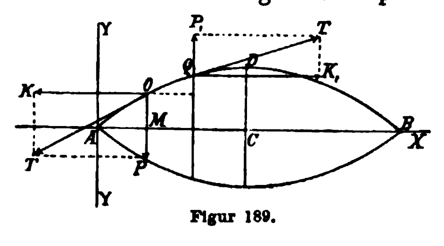
Das Resultat ist, dass eine Funktion von der Form $\varphi(a t - x)$ eine Welle repräsentiert, welche mit einer Geschwindigkeit a wandert. In dem Falle des Fadens wird daher die Bewegung durch eine Reihe von Wellen repräsentiert, welche auf beiden Wegen mit derselben Geschwindigkeit entlang dem Faden wandern. Die Geschwindigkeit ist eine solche, dass die Zeit der Durchkreuzung einer Länge l des ungedehnten Fadens, oder einer Länge l' des gestreckten Fadens gleich $l\sqrt{\frac{m}{E}}$ ist. Es ist zu bemerken, dass diese Zeit von der Beschaffenheit der Störung unabhängig ist, dass sie dieselbe ist, gleichviel ob der Faden ursprünglich gedehnt war oder nicht. Unter der Voraussetzung der absoluten Richtigkeit von Hooke's Gesetz sind die Gleichung (3) und diese Resultate keine blosen Annäherungen, sondern strikte genau.

Es ist offenbar bequemer, einen besonderen Zustand des Fadens als Normalzustand, auf den wir uns beziehen, anzunehmen und die wirkliche Lage eines beliebigen materiellen Punktes zu der Zeit t durch seine Verschiebung aus dieser Normallage darzustellen. Wählen wir das ungedehnte Statium des Fadens AB als diesen Normalzustand, setzen $x' = x + \xi$, so dass ξ die Verschiebung des materiellen Punktes bedeutet, dessen Abscisse in der ungestreckten Lage x ist, dann nimmt die Bewegungsgleichung nun die Form an

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = \frac{E}{m} \cdot \frac{d^2 \xi}{d x^2},$$

und das Integral kann wie vorhin erhalten werden.

2. Querschwingungen einer Saite. Es sei AB die Ruhelage einer zwischen den festen Punkten A, B (Fig. 189) gespannten Seite, ADB eine beliebige ebene Lage derselben, $l = AB$ ihre Länge, G ihr Gewicht, T ihre als konstant angesehene Spannung, A Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes mit der Abscissenaxe AB, O ein beliebiger Punkt in dem Bogen ADB mit den Coordinaten $AM = x$, $MO = y$, OQ ein Element ds der Saite, x_1 die Abscisse, y_1 die Ordinate des Endpunktes Q dieses Elementes, $y = \psi(x)$ die Gleichung der Curve ADB.



Figur 189.

Zerlegen wir die in den Endpunkten O, Q des Elementes OQ tangential zu der Curve wirkenden Spannungen T in Componenten P, K und P_1, K_1 senkrecht und parallel zu der Geraden AB, dann ist $P = \frac{dy}{ds}T$, $P_1 = \frac{dy_1}{ds}T$, und es wirken diese Kräfte in entgegengesetzter Richtung. Die Differenz dieser Kräfte, welche die an dem Bogenelemente ds wirkende, bewegende Kraft parallel zu der Ordinatenaxe darstellt, ist daher

$$P - P_1 = \frac{dy - dy_1}{ds} T.$$

Bezeichnet dm die Masse des Bogenelementes $ds = dx$, da hier $\frac{ds}{dx} = 1$ gesetzt werden darf, so ist $dm = \frac{G}{g}\frac{dx}{l}$, wodurch wir für die an dem Bogenelemente ds wirkende Beschleunigung p, welche dasselbe nach seiner Ruhelage in AB hin acceleriert, die Relation erhalten

$$p = \frac{P - P_1}{dm} = \frac{dy - dy_1}{ds \,.\, dx} \cdot \frac{gTl}{G} = \frac{dy - dy_1}{dx^2} \cdot \frac{gTl}{G}.$$

Nun ist, weil $y = \psi(x)$, $\frac{dy}{dx} = \psi'(x)$, $\frac{dy - dy_1}{dx^2} = \frac{d \,.\, dy}{dx^2} = \psi''(x)$, folglich

$$p = \frac{gTl}{G} \psi''(x).$$

Ferner lässt sich aber auch y als Funktion der Zeit t ansehen, so dass wir schreiben können $y = \varphi(t)$, womit die Geschwindigkeit des Bogenelementes ds parallel zu der Ordinatenaxe $v = \frac{dy}{dt} = \varphi'(t)$ und die entsprechende Beschleunigung $p = \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi''(t)$. Daher haben wir, wenn wir die Ausdrücke für die Acceleration p einander gleich setzen,

$$\varphi''(t) = \psi''(x) \,.\, \frac{gTl}{G} = c^2 \psi''(x).$$

Dieser Differentialgleichung genügen die Relationen

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(t) = \psi(t) F(ct + x) + f(ct - x), \\ v &= \frac{dy}{dt} = c\{F'(ct + x) + f'(ct - x)\}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo F und f gewisse Funktionen der in Klammern eingeschlossenen Grössen bezeichnen. Die Differentiation der Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(x)$ giebt nämlich

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}[\varphi(t)] = cF'(ct + x) + cf'(ct - x)$$

$$\varphi''(t) = \frac{d}{dt}[\varphi'(t)] = c^2F''(ct+x) + c^2f''(ct-x) = c^2\{F''(ct+x) + f''(ct-x)\},$$

$$\psi'(x) = \frac{d}{dt}[\psi(x)] = F'(ct + x) - f'(ct - x).$$

$$\psi''(x) = \frac{d}{dt}[\psi'(x)] = F''(ct + x) + f''(ct - x),$$

folglich ist wirklich $\varphi''(t) = c^2 \psi''(x)$.

Mit Hilfe der Gleichungen (1) können wir nun leicht die Schwingungszeit erhalten. Für $x = 0$ und $x = l$ sind y und v gleich Null, so dass mit diesen Werten sich ergiebt

$$0 = F(ct) + f(ct), \quad F(ct) = -f(ct), \quad f = -F,$$
$$0 = F(ct + l) + f(ct - l), \quad F(ct + l) = -f(ct - l),$$
$$0 = c\{F'(ct) + f'(ct)\}, \quad f' = -F',$$
$$0 = c\{F'(ct + l) + f'(ct - l)\}, \quad F'(ct + l) = -f'(ct - l).$$

Daraus folgt $f(ct + l) = f(ct - l)$, $f'(ct + l) = f'(ct - l)$.

Setzen wir jetzt $ct - l = ct_1$, so ergiebt sich

$$f(ct_1 + 2l) = f(ct_1).$$

Die Funktion nimmt mithin stets denselben Wert wieder an, wenn ct_1 um $2l$, oder die Zeit t_1 um $\frac{2l}{c}$ grösser wird. Mithin ist die Zeit eines Doppelschwunges oder einer vollständigen Schwingung

$$t_1 = \frac{2l}{c}.$$

Im vorliegenden Falle haben wir daher für die Zeit einer vollständigen Schwingung

$$t_1 = 2l\sqrt{\frac{G}{gTl}} = 2l\sqrt{\frac{q}{gT}},$$

wenn q das Gewicht der Saite pro Längeneinheit bezeichnet.

Die Schwingungsdauer ist demnach direkt proportional der Länge, der Quadratwurzel aus dem Gewichte der Längeneinheit und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Spannung T der Saite.

Bezeichnet t_1 die Schwingungszeit irgend eines Tones, so ist diejenige des nächst höheren Oktaventones $t_2 = \frac{t_1}{2}$, es muss folglich sein

$$t_2 = l\sqrt{\frac{q}{gT}} = 2l\sqrt{\frac{q}{g \cdot 4T}} = 2l\sqrt{\frac{1}{4}q \cdot \frac{1}{gT}}.$$

Dieser Oktaventon wird mithin erhalten, wenn wir entweder die Saite bis zur Hälfte abkürzen, oder dieselbe viermal so stark spannen, oder eine Saite von derselben Länge wählen, deren Gewicht pro Längeneinheit gleich $\frac{1}{4}$ von demjenigen der ersten Saite ist.

Würden wir einen Stab anstatt einer Saite betrachten, so gilt ganz dasselbe. Würde dieser Stab an beiden Enden frei sein, dann ist für $x = 0$ und $x = l$ T und also auch $\psi'(x) = 0$, womit sich wie vorhin $t_1 = \frac{2l}{c}$ ergiebt. Wenn der Stab mit dem einen seiner Enden fest eingeklemmt, während das andere Ende frei ist, so haben wir für $x = 0$, $y = 0$, und für $x = l$, $T = 0$, womit wir finden $f'(ct + l) + f'(ct - l) = 0$, oder $f'(ct_1 + 2l) = -f'(ct_1)$. Nach der Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ nimmt demnach der Körper stets den umgekehrten Bewegungszustand an, so dass folglich erst in der doppelten Zeit $2t_1 = \frac{4l}{c}$ eine ganze Schwingung vollendet wird, für welche wir mithin, wenn t' diese Zeit bedeutet, die Gleichung haben $t' = \frac{4l}{c}$.

Weitere in dieser Weise behandelte Schwingungsprobleme findet der Leser in der theoretischen Mechanik von Weisbach.

3. Ein elastischer Faden ist in der unter Problem 1 angegebenen Weise gestreckt worden und es wird ihm eine ganz beliebige kleine Verschiebung erteilt. Welches sind die Bewegungsgleichungen?

Wir wählen dieselben Bezeichnungen wie unter 1, dann sind, wenn (x', y', z') die Coordinaten von P' bedeuten, die Bewegungsgleichungen

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(T\frac{dx'}{ds'}\right), \quad (1) \qquad m\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(T\frac{dy'}{ds'}\right), \quad (2)$$

$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(T\frac{dz'}{ds'}\right), \quad (3)$$

wo ds' die Länge des Elementes $P'Q'$ bezeichnet. Mit E als Elastizitätsmodulus haben wir durch Hooke's Gesetz

$$\frac{ds'}{dx} = 1 + \frac{T}{E}. \quad (4)$$

Weil die Störung sehr gering ist, so sind $\frac{dy'}{ds'}$ und $\frac{dz'}{ds'}$ sehr klein, und $\frac{dx'}{ds'}$ ist sehr nahe gleich der Einheit. Folglich nimmt die erste Gleichung die Gestalt an

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{dT}{dx},$$

und Hooke's Gleichung wird

$$\frac{dx'}{dx} = 1 + \frac{T}{E},$$

welches dieselben Gleichungen wie in dem ersten Probleme sind, so dass,

wenn die Störung klein ist, die Longitudinalbewegung von der Querbewegung des Fadens unabhängig ist.

In der zweiten Gleichung können wir T als konstant betrachten, seine kleinen Variationen sind mit der kleinen Grösse $\frac{dy'}{ds'}$ multipliziert. Folglich können wir $T = T_0$ setzen, wo $T_0 = E\frac{l'-l}{l}$ ist. Dieses giebt durch die (4) $\frac{ds'}{dx} = \frac{l'}{l}$. Die Bewegungsgleichung wird daher

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{T_0}{m}\cdot\frac{l}{l'}\frac{d^2y'}{dx^2}.$$

Die dritte Gleichung kann in derselben Weise behandelt werden. Die Geschwindigkeit einer Quervibration, gemessen in Einheiten der ungedehnten Fadenlänge, ist daher $\sqrt{\frac{T_0 l}{m l'}}$. Die Zeit der Durchkreuzung einer Länge l des ungestreckten, oder einer Länge l' des gestreckten Fadens ist $\sqrt{\frac{m l l'}{T_0}}$. Diese Geschwindigkeit ist unabhängig von der Beschaffenheit der Störung, aber abhängig von der Stärke der Spannung des Fadens.

Wenn der Faden nur sehr wenig elastisch ist, so können wir in dieser letzten Formel $l' = l$ setzen. In diesem Falle erhalten wir das in allen Abhandlungen über den Schall gegebene Resultat.

Hier giebt es zwei Arten der Anwendung der Bewegungsgleichungen auf wirkliche Fälle. Wir wollen zuerst diese durch Lösung eines einfachen Beispieles mittelst der beiden Methoden illustrieren, sodann einige Bemerkungen über die Resultate machen.

4. Ein elastischer Faden von der natürlichen Länge l ruht auf einem vollkommen glatten Tische und ist mit seinen Enden an zwei Punkten A, B' befestigt, deren wechselseitige Distanz l', mit $l' > l$, ist. Das Ende B' wird plötzlich freigelassen. Welches ist die Bewegung?

Die Bewegung wird hier durch die Gleichung gegeben

$$\xi = f(at - x) + F(at + x),$$

wo ξ das Displacement des materiellen Punktes ist, dessen Abscisse bei der natürlichen Länge des Fadens gleich x ist. Die Bedingungen zur Bestimmung von f und F sind die folgenden:

1) Wenn $x = 0$, $\xi = 0$ für alle Werte von t,

2) Wenn $x = l$, $T = 0$ und $\frac{d\xi}{dx} = 0$ für alle Werte von t,

3) Wenn $t = 0$, $\xi = rx$, von $x = 0$ bis $x = l$, wo $l' = (r + 1)l$.

4) Wenn $t = 0$, $\frac{d\xi}{dt} = 0$, von $x = 0$, bis $x = l$.

Aus der ersten Bedingung folgt, dass die Funktionen f und F dieselben mit entgegengesetzten Zeichen sind. Die zweite Bedingung giebt $f'(at+l) = -f'(at-l)$, so dass die Werte der Funktion f' mit entgegengesetzten Zeichen wiederkehren, wenn die Variable um $2l$ zunimmt.

Wenn daher die Werte von $f'(z)$ für alle Werte von z, von $z = z_0$, bis $z = z_0 + 2l$, wo z_0 irgend einen Wert besitzt, bekannt sind, dann ist die Gestalt der Funktion vollständig bekannt. Nun giebt die dritte Bedingung $f(-x) - f(x) = rx$, und die vierte $f'(-x) = f'(x)$, von $x = 0$ bis $x = l$. Folglich ist $f'(x) = -\frac{r}{2}$, von $x = -l$ bis $x = +l$. Es folgt daraus, dass $f'(z) = -\frac{r}{2}$, von $z = -l$ bis $z = +l$, $f'(z) = \frac{r}{2}$, von $z = l$ bis $z = 3l$, ist, so ändern sich die Zeichen zu jeder Zeit fort, wenn die Variable durch die Werte geht: l, $3l$, $5l, \ldots$ Betrachten wir die Bewegung eines beliebigen Punktes P des Fadens mit der ungedehnten Abscisse x. Seine Geschwindigkeit ist durch die Formel gegeben $\frac{v}{a} = f'(at-x) - f'(at+x)$. Weil $x < l$, so haben wir $\frac{v}{a} = -\frac{r'}{2} + \frac{r}{2} = 0$, folglich bewegt sich der Punkt nicht bis $at + x = l$. Die zweite Funktion ändert dann ihr Zeichen und wir bekommen $\frac{v}{a} = -\frac{r}{2} - \frac{r}{2} = -r$. Der Punkt bewegt sich kontinuierlich mit dieser Geschwindigkeit bis $at - x = l$, wenn die erste Funktion ihr Zeichen wechselt, u. s. f. Es sei AB der ungedehnte Faden und ein von B ausgehender Punkt R bewege sich kontinuierlich entlang dem Faden und wieder zurück mit der Geschwindigkeit a. Dann ist leicht zu sehen, dass wenn R auf derselben Seite von P liegt, wo das freie Fadenende sich befindet, P in Ruhe sein wird, dass aber, wenn R auf derselben Seite von P liegt, wo das feste Fadenende sich befindet, P sich mit einer Geschwindigkeit bewegen wird, welche abwechselnd gleich $\pm ra$ ist. Demnach stellt sich der allgemeine Charakter der Bewegung so dar: Wird das Gleichgewicht des Fadens bei B gestört, dann wandert eine Welle von der Länge $4l$ entlang dem Faden und P beginnt nicht eher sich zu bewegen, bis dieser Punkt von der Welle erreicht wird. Diese Welle wird bei A reflektiert und kehrt zurück.

Die zweite Lösungsmethode ist die folgende. Wie vorher von der Relation

$$\xi = f(at-x) + F(at+x)$$

ausgehend, entwickeln wir jede Funktion in eine Reihe der Sinus und Cosinus, so dass wir erhalten

$$\xi = \Sigma\left[A \sin\{n(at-x)+\alpha\} + B \sin\{n(at+x)+\beta\}\right],$$

wo das Zeichen Σ die Summation aller Werte von n in sich schliesst;

A, B, α und β Konstanten sind, welche in jedem Gliede verschieden, und bequem als Funktionen von n betrachtet werden können.

Weil die Bewegung oscillatorisch ist, so können wir annehmen, dass alle Werte von n reell sind, und es ist klar, dass wir ohne Verlust an Allgemeinheit n in positive Werte einschränken können. Wir nehmen die Diskussion der Umstände, unter welchen diese Voraussetzungen korrekt sind, hier nicht vor, sondern verweisen auf Fourier's Theorem. Wir mögen hier die Annahme als gerechtfertigt durch das Resultat betrachten, weil wir so allen Daten der Frage genügen können.

Die vier Bedingungen des Problemes setzen uns in den Stand, die Konstanten zu bestimmen. Durch die erste Bedingung haben wir $\beta = \alpha + \varkappa\pi$, $B = (-1)^{\varkappa+1} A$, wo $\varkappa$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Entwickeln wir, dann finden wir leicht, dass

$$\xi = (C \sin n a t + D \cos n a t) \sin n x,$$

wobei C und D als Funktionen von n anzusehen sind. Aus der zweiten Bedingung resultiert $\cos n l = 0$, folglich $n l = (2i+1)\frac{\pi}{2}$, wenn i ein beliebiges positives Ganzes ist. Die möglichen harmonischen Perioden des Fadens mit regelrechten Anfangsstörungen sind daher, wenn ein Ende fest, das andere frei ist, in der Form eingeschlossen $\frac{4l}{(2i+1)a}$. Die Anfangsstörung ist durch die dritte und die vierte Bedingung gegeben

$$\Sigma D \sin n x = r x, \qquad \Sigma C n \sin n x = 0.$$

Um den Wert von D für ein beliebiges Glied zu finden, multiplizieren wir die erste Gleichung durch den Coëfficienten von D in jenem Gliede und integrieren über die ganze Länge des Fadens, d. i. von $x = 0$ bis $x = l$. Dieses giebt

$$D \frac{l}{2} = r \int_0^l x \sin n x \, d x = r \frac{\sin n l}{n^2}.$$

Die anderen Glieder verschwinden alle, weil $\int_0^l \sin n x \sin n' x \, d x = 0$, wenn n und n' numerisch ungleich sind.

Die Behandlung der zweiten Gleichung auf demselben Wege giebt $C = 0$. Folglich wird die Bewegung gegeben sein durch

$$\xi = \Sigma \frac{2r}{l} \frac{\sin n l}{n^2} \cos n a t \sin n x.$$

Setzen wir für i seine Werte 1, 2, 3, ... successive, dann nimmt diese Gleichung die Gestalt an

$$\xi = \frac{8rl}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi a t}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l} - \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi a t}{2l} \sin \frac{3\pi x}{2l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi a t}{2l} \sin \frac{5\pi x}{2l} \cdots \right\}.$$

Dieses ist eine konvergente Reihe für ξ, und es genügt für die erste Annäherung, nur die ersten Glieder zu nehmen. Behalten wir z. B. nur die zwei ersten Glieder bei und setzen wir, um das Resultat mit demjenigen der ersten Lösung zu vergleichen, $a\,t = \frac{1}{2}\,l$, dann ergiebt sich

$$\xi = \frac{8\,r\,l}{\pi^2}\left\{-\sin\frac{\pi x}{2\,l} + \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\,\pi\,x}{2\,l}\right\}.$$

Tracieren wir die Curve, deren Ordinate $-\frac{d\xi}{d\,t}$, deren Abscisse x ist, so finden wir, dass sie gleicht $\xi = 0$ für kleine Werte von x, dann mit einem Wendepunkte aufsteigt und nahezu horizontal wird, wenn x sich l nähert. Dieses stimmt sehr wohl mit dem früheren Resultate überein.

Durch Examination dieser Lösungen sehen wir, dass wir zwei Arten von Bedingungen zur Bestimmung der willkürlichen Funktionen haben. 1) Hier sind die Bedingungen für die zwei Endpunkte des Fadens. Ihre besondere Eigenschaft ist die, dass sie für alle Werte von t genügen. 2) Da sind die Anfangsbedingungen der Bewegung. Ihre besondere Eigenschaft ist die, dass sie nicht für alle Werte von x genügen, sondern nur für alle Werte innerhalb einer bestimmten Strecke, welche durch die Länge des Fadens begrenzt ist. Die erste Reihe von Bedingungen wird benutzt zur Bestimmung der Art, in welcher die Werte der Funktionen wiederkehren, so dass, wenn ihre Werte für einen gewissen begrenzten Teil bekannt sind, dieselben für alle jene Werte der Variablen bekannt sind, welche in dem Probleme vorkommen. Die zweite Bedingungsreihe wird gebraucht zur Bestimmung ihrer Werte innerhalb dieses begrenzten Teiles.

Die Funktionen wurden diskontinuierlich gefunden. Es kann eingewendet werden, dass keine Notiz von irgend einer möglichen Diskontinuität bei der Bildung der Bewegungsgleichungen genommen wurde, dass daher diese Gleichungen nicht angewendet werden können, ohne weitere Examination irgend eines Falles, welcher die Diskontinuität der eingeführten willkürlichen Funktionen verlangt. Diese Frage ist viel diskutiert worden, jedoch können wir uns hier nicht darauf einlassen. Wir müssen den Leser verweisen auf De Morgan's Differentialrechnung, Cap. XXI, wo beides, eine kurze Geschichte des Streites zwischen Lagrange und D'Alembert, sowie eine Diskussion der Schwierigkeit gefunden werden kann. Siehe auch Lagrange, Mécanique Analytique, Seconde Partie, Sect. VI, § IV.

In der zweiten Lösungsform haben wir die willkürlichen Funktionen durch eine konvergente Reihe harmonischer Schwingungen ersetzt. Eine endliche Zahl von Gliedern für die Annäherung nehmend, haben wir eine perfekt bleibende Lösung, deren Anfangsbedingungen sich nur wenig von

jenen des vorgeschlagenen Problemes unterscheiden. Die Verschiedenheit wird um so geringer, je mehr Glieder in die Lösung eingeschlossen werden.

Die Vergleichung der zwei Resultate zeigt, dass jede Form ihren Vorteil besitzt. Die erste bestimmt die Bewegung durch eine einfache Formel. Die zweite ist geeigneter, wenn die harmonischen Perioden verlangt werden.

5. Ein elastischer Faden AB von der ungedehnten Länge l ist unter der Wirkung der Schwerkraft an einem festen Punkte A aufgehangen. Wenn ξ das vertikale Displacement eines beliebigen Punktes, dessen Abstand von A gleich x bei ungedehntem Faden ist, bezeichnet, so beweise, dass

$$\xi = -\frac{g x^2}{2a^2} + \frac{g l x}{a^2} + f(at - x) - f(at + x),$$

wo $f(z)$ mit einem entgegengesetzten Zeichen zurückkehrt, wenn z um $2l$ zunimmt.

Wenn der Faden anfangs ungestreckt und in Ruhe ist, beweise, dass

$$f(z) = \pm \frac{g z^2}{4a^2} + \frac{g l z}{2a^2}.$$

Das obere Zeichen ist zu nehmen, wenn z zwischen $-l$ und 0 liegt, das untere, wenn z sich zwischen 0 und l befindet. Sodann beweise, dass die ganze Länge oscilliert zwischen l und $l + \frac{gl^2}{a^2}$.

Die andere Lösungsform nehmend, zeige, dass die harmonischen Perioden sind $p = \frac{4l}{(2i+1)a}$, wo i irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Zeige auch, dass

$$\xi = -\frac{g x^2}{2a^2} + \frac{g l x}{a^2} - \frac{16 g l^2}{\pi^3 a^2} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\sin\left(\frac{2i+1}{2} \cdot \frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{2i+1}{2} \cdot \frac{\pi a t}{l}\right)}{(2i+1)^3}.$$

6. Drei elastische Fäden AB, BC, CD, von verschiedenem Material, sind bei B und C aneinander gefesselt, sodann zwischen zwei festen Punkten A, D in einer geraden Linie gestreckt. Die materiellen Punkte der Fäden erleiden eine beliebige Längenverschiebung und beginnen sich vom Ruhezustande aus zu bewegen. Wie ist die daraus folgende Bewegung beschaffen?

Es sei A der Ursprung, AD die Richtung, in welcher x gemessen wird. Die ungedehnten Längen von AB, BC, CD seien l_1, l_2, l_3, die Elastizitätsmodule E_1, E_2, E_3, die Massen einer Längeneinheit m_1, m_2, m_3 resp. Der Einfachheit halber sei $E_1 = m_1 a_1{}^2$, $E_2 = m_2 a_2{}^2$, $E_3 = m_3 a_3{}^2$ und der Rest der Bezeichnungen derselbe wie vorher.

Die Spannung des zwischen den zwei festen Punkten A, D gestreckten und im Gleichgewichte befindlichen Fadens sei T_0, dann sind die Verschiebungen der Elemente eines jeden Fadens aus ihrer natürlichen Lage, d. h. wenn der ganze Faden ungedehnt ist,

$$\xi_1 = \frac{l_1' - l_1}{l_1} x = \frac{T_0}{E_1} x,$$
$$\xi_2 = l_1' - l_1 + \frac{l_2' - l_2}{l_2}(x - l_1) = \frac{T_0}{E_1} l_1 + \frac{T_0}{E_2}(x - l_1),$$
$$\xi_3 = \frac{T_0}{E_1} l_1 + \frac{T_0}{E_2} l_2 + \frac{T_0}{E_3}(x - l_1 - l_2).$$

Zu der Zeit t nach der Störung des Gleichgewichtes werden diese Displacements $\xi_1 + \xi_1'$, $\xi_2 + \xi_2'$, $\xi_3 + \xi_3'$, resp. sein. Wir haben für die zweiten Glieder dieser Summen die Relationen

$$\xi_1' = \Sigma L_1 \sin(n_1 x + M_1) \cos n_1 a_1 t,$$
$$\xi_2' = \Sigma L_2 \sin\{n_2(x - l_1) + M_2\} \cos n_2 a_2 t,$$
$$\xi_3' = \Sigma L_3 \sin\{n_3(x - l_1 - l_2) + M_3\} \cos n_3 a_3 t,$$

wenn Σ die Summation aller Harmonieen bedeutet.

Um die Coëfficienten derselben Harmonie zu vergleichen, müssen wir setzen $n_1 a_1 = n_2 a_2 = n_3 a_3 = \frac{2\pi}{p}$, wo p die Periode der Harmonie ist.

Zur Bestimmung der Konstanten haben wir die Bedingungen, wenn

$$\begin{array}{llll} x = 0, & x = l_1, & x = l_1 + l_2, & x = l_1 + l_2 + l_3, \\ \xi_1' = 0, & \xi_1' = \xi_2', & \xi_2' = \xi_3', & \xi_3' = 0, \end{array}$$
$$E_1 \frac{d\xi_1'}{dx} = E_2 \frac{d\xi_2'}{dx}, \qquad E_2 \frac{d\xi_2'}{dx} = E_3 \frac{d\xi_3'}{dx}.$$

Diese geben

$$M_1 = 0,$$
$$\left.\begin{array}{l} L_2 \sin M_2 = L_1 \sin(n_1 L_1 + M_1), \\ E_2 n_2 L_2 \cos M_2 = E_1 n_1 L_1 \cos(n_1 l_1 + M_1), \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l} L_3 \sin M_3 = L_2 \sin(n_2 l_2 + M_2), \\ E_3 n_3 l_3 \cos M_3 = E_2 n_2 L_2 \cos(n_2 l_2 + M_2), \end{array}\right\}$$
$$0 = L_3 \sin(n_3 l_3 + M_3).$$

Zur Auffindung der Werte der M erhalten wir hieraus die Gleichungen

$$0 = M_1, \qquad \frac{tg\, M_2}{E_2 n_2} = \frac{tg(n_1 l_1 + M_1)}{E_1 n_1},$$
$$\frac{tg\, M_3}{E_3 n_3} = \frac{tg(n_2 l_2 + M_2)}{E_2 n_2}, \qquad 0 = \frac{tg(n_3 l_3 + M_3)}{E_3 n_3},$$

aus welchen die Relation resultiert

$$\frac{tg\, n_1 l_1}{E_1 n_1} + \frac{tg\, n_2 l_2}{E_2 n_2} + \frac{tg\, n_3 l_3}{E_3 n_3} = (E_2 n_2)^2 \cdot \frac{tg\, n_1 l_1}{E_1 n_1} \cdot \frac{tg\, n_2 l_2}{E_2 n_2} \cdot \frac{tg\, n_3 l_3}{E_3 n_3}.$$

Substituieren wir hier für n_1, n_2, n_3 die Werte in Ausdrücken von p, so ergiebt sich eine Gleichung zur Bestimmung der Harmonieen.

Sind die Werte von p bekannt, so ist es klar, dass die vorhergehenden Gleichungen alle Konstanten mit Ausnahme von L_1 bestimmen, wodurch für jede Harmonie noch eine Konstante ungewertet ist. Um diese zu finden, haben wir unsere Zuflucht zu den Anfangsbedingungen zu nehmen. Die Gleichungen können in der Form geschrieben werden

$$\xi_1' = \Sigma P_n \cos n a t, \qquad \xi_2' = \Sigma Q_n \cos n a t, \qquad \xi_3' = \Sigma R_n \cos n a t,$$

wo P_n, Q_n, R_n der Gleichung genügen $\frac{d^2 P}{d x^2} = -n^2 P$. Wir erhalten daher durch teilweise Integration

$$m^2 \int P_m P_n dx = -\int P_n \frac{d^2 P_m}{d x^2} dx = -P_n \frac{d P_m}{d x} + \frac{d P_n}{d x} P_m + n^2 \int P_m P_n dx.$$

Ähnliche Theoreme sind auf Q_n und R_n anzuwenden.

Wir haben auch die Bedingungen

wenn $x = 0$, $x = l_1$, $x = l_1 + l_2$, $x = l_1 + l_2 + l_3$,

$P = 0$, $P = Q$, $Q = R$, $R = 0$,

$$E_1 \frac{dP}{dx} = E_2 \frac{dQ}{dx}, \qquad E_2 \frac{dQ}{dx} = E_3 \frac{dR}{dx}.$$

Was auch die Endresultate sein mögen, so lässt sich schon vorher erkennen, dass sie dieselben in jeder Gleichung sind. Setzen wir

$$\varphi(m, n) = \int_0^{l_1} E_1 P_m P_n dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} E_2 Q_m Q_n dx + \int_{l_1+l_2}^{l_1+l_2+l_3} E_3 R_m R_n dx,$$

dann haben wir $m^2 \varphi(m, n) = n^2 \varphi(m, n)$, und daher ist jede notwendig gleich Null, wenn m und n verschieden sind. Ein ganz ähnliches Theorem wird anzuwenden sein, wenn ein Ende, oder beide Enden des Fadens lose sind, oder wenn der Faden Querschwingungen anstatt Längenschwingungen macht.

Nehmen wir nun an, dass anfangs $\xi_1' = f_1(x)$, $\xi_2' = f_2(x)$, $\xi_3' = f_3(x)$, so finden wir leicht

$$\int_0^{l_1} E_1 f_1(x) \sin(n_1 x + M_1) dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} E_2 f_2(x) \sin\{n_2(x - l_1) + M_2\} dx$$
$$+ \int_{l_1+l_2}^{l_1+l_2+l_3} E_3 f_3(x) \sin\{n_3(x - l_1 - l_2) + M_3\} dx$$
$$= E_1 L_1 \int_0^{l_1} \sin^2(n_1 x + M_1) dx + E_2 L_2 \int_{l_1}^{l_1+l_2} \sin^2\{n_2(x - l_1) + M_2\} dx$$
$$+ E_3 L_3 \int_{l_1+l_2}^{l_1+l_2+l_3} \sin^2\{n_3(x - l_1 - l_2) + M_3\} dx.$$

Diese Integrationen können leicht ausgeführt werden, dadurch bekommen wir eine Gleichung zur Bestimmung von L, welche irgend einem Werte von p entspricht.

Wenn die Fäden sich nicht vom Ruhezustande aus bewegen, dann haben wir nur zu den Ausdrücken für ξ_1', ξ_2', ξ_3' ähnliche Funktionen von x, aber mit $\sin n a t$ anstatt $\cos n a t$ zu addieren.

7. Wenn die drei Fäden transversal vibrieren, a_1, a_2, a_3 die Geschwindigkeiten einer Welle entlang denselben, gemessen in Einheiten der Länge des ungedehnten Fadens, sind, beweise, dass die Perioden der Zeichen durch die Gleichung gegeben sind

$$\frac{tg\, n_1 l_1}{n_1} + \frac{tg\, n_2 l_2}{n_2} + \frac{tg\, n_3 l_3}{n_3} = n_2^2 \frac{tg\, n_1 l_1}{n_1} \cdot \frac{tg\, n_2 l_2}{n_2} \cdot \frac{tg\, n_3 l_3}{n_3},$$

wobei $n_1 a_1 = n_2 a_2 = n_3 a_3 = \frac{2\pi}{p}$ ist.

Zeige, wenn die anfängliche Störung gegeben ist, wie die daraus hervorgehende Bewegung gefunden werden kann.

8. Zwei schwere Fäden AB, BC, von verschiedenem Material, sind bei B an einander geknüpft und unter der Wirkung der Schwerkraft an einem festen Punkte A aufgehangen. Beweise, dass die Perioden der Vertikalschwingungen durch die Gleichung gegeben sind

$$tg\frac{2\pi l_1}{a_1 p} \cdot tg\frac{2\pi l_2}{a_2 p} = \frac{E_1 a_2}{E_2 a_1}.$$

Wie gross sind die Längen der zwei Fäden zu einer beliebigen Zeit t, wenn sie anfangs ungestreckt waren?

9. Ein elastischer Faden ist zwischen zwei festen Punkten A, B' gestreckt und in Vibration gebracht. Wie gross ist die Energie, wenn die früheren Bezeichnungen beibehalten werden?

Zuerst seien die Vibrationen longitudinal. Die Gleichung der Bewegung ist

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\xi}{dx^2}.$$

Folglich haben wir

$$\xi = \frac{l'-l}{l} x + \Sigma[A \sin\{n(at-x)+\alpha\} + B\sin\{n(at+x)+\beta\}].$$

Weil ξ verschwinden muss, wenn $x=0$, und gleich $l'-l$ sein muss, wenn $x=l$, so finden wir

$$\xi = \frac{l'-l}{l} x + \Sigma\, C \sin n x \sin(n a t + \gamma),$$

wo $nl = i\pi$ ist, Σ die Summation aller positiven ganzen Werte von i anzeigt. Die Lettern C und γ sind Konstanten, welche in den einzelnen Gliedern von einander verschieden sein können und von der Anfangsstörung abhängen.

Die kinetische Energie des ganzen Fadens ist

$$= \int_0^l \frac{1}{2} m\, dx \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \int_0^l \frac{1}{2} m\, dx \{\Sigma\, C n a \sin n x \cos(n a t + \gamma)\}^2.$$

Nun ist $\int_0^l \sin n x \sin n' x\, dx = 0$, wenn n und n' numerisch ungleich sind,

weil nl und $n'l$ beide mit π multiplizierte ganze Zahlen sind. Folglich ist das Integral des Produktes irgend zweier Glieder, wenn das Quadrat dieser Reihe entwickelt wird, gleich Null.

Auch ist $\int_0^l \sin^2 nx\,dx = \frac{l}{2}$. Mithin wird die kinetisahe Energie

$$= \frac{1}{4} m l a^2 \Sigma C^2 n^2 \cos^2 (n a t + \gamma).$$

Um die Potentialenergie zu finden, notieren wir, dass die Arbeit, welche zum Strecken eines Elementes von seiner natürlichen Länge dx bis zu der Länge $dx + d\xi$ erforderlich ist, gleich $\frac{1}{2} E \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 dx$ ist. Folglich ist die ganze Streckarbeit

$$= \int_0^l \frac{1}{2} E\,dx \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \int_0^l \frac{1}{2} E\,dx \left\{\frac{l'-l}{l} + \Sigma\, C n \cos nx \sin (n a t + \gamma)\right\}^2.$$

Nun ist $\int_0^l \cos nx \cos n'x\,dx = 0$, oder $= \frac{1}{2}$, je nachdem n und n' numerisch ungleich oder gleich sind; auch $\int_0^l \cos nx\,dx = 0$. Mithin wird, wie vorher, das Integral

$$= \frac{1}{2} E \frac{(l'-l)^2}{l} + \frac{1}{4} E l \Sigma C^2 n^2 \sin^2 (n a t + \gamma).$$

Das erste Glied ist die Arbeit, welche gethan wird, um den Faden aus seiner natürlichen Länge l in die gestreckte Länge l' überzuführen. Wenn wir die Potentialenergie auf die Lage des Fadens zurückführen, wenn er im Gleichgewichte zwischen den Punkten A und B' gespannt ist, als Normalposition, dann haben wir nur das letzte Glied zurückzubehalten. Die Energie ist die Summe aus der kinetischen Energie und der Potentialenergie, mit $E = m a^2$ erhalten wir

$$\text{Energie} = \frac{1}{4} m l a^2 \Sigma C^2 n^2.$$

Zweitens seien die Vibrationen transversal. Die Bewegung ist durch die Gleichung gegeben

$$y' = \Sigma\, C \sin nx \sin (n a t + \gamma),$$

wo $nl = i\pi$ ist, Σ die Summation für alle positive Ganze von i anzeigt. Die kinetische Energie ist, durch denselben Schluss wie vorhin,

$$= \frac{1}{4} m l a^2 \Sigma C^2 n^2 \cos^2 (n a t + \gamma).$$

Um die Potentialenergie zu finden, bemerken wir, dass die Streckarbeit, welche zur Überführung der Länge dx eines Elementes in die Länge ds' erforderlich ist, gleich $\frac{1}{2} E \left(\frac{ds'}{dx} - 1\right)^2 dx$ ist. Nun haben wir aber

$$(ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 = \left(\frac{l'}{l}\,dx\right)^2 + dy'^2,$$

also $\dfrac{ds'}{dx} = \dfrac{l'}{l}\left\{1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{l^2}{l'^2}\left(\dfrac{dy'}{dx}\right)^2\right\}$, annähernd.

Erinnern wir uns daran, dass nach Problem 3 $m a^2 = E\dfrac{l'-l}{l}$, so finden wir für die ganze Streckarbeit

$$\int_0^l \frac{1}{2}\,dx\left\{E\left(\frac{l'-l}{l}\right)^2 + m a^2\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2\right\}.$$

Durch Substitution und Integration ergiebt sich für diese Arbeit

$$\frac{1}{2}E\frac{(l'-l)^2}{l} + \frac{1}{4}m l a^2 \Sigma C^2 n^2 (n a t + \gamma).$$

Nehmen wir jetzt die Gleichgewichtslage des zwischen den Punkten A und B' gestreckten Fadens als Normallage an, so erhalten wir

$$\text{Energie} = \frac{1}{4} m l a^2 \Sigma C^2 n^2.$$

Diese können wir die Disturbationsenergie nennen.

Professor Donkin hat in seiner Abhandlung über Akustik die Energie eines quer schwingenden Fadens durch eine sinnreiche Anwendung der Subtraktionsmethode bestimmt.

10. Ein elastischer Stab AB ist mit seinem Endpunkte A befestigt, liegt auf einem vollkommen glatten Tische und macht Longitudinalschwingungen. Zeige, dass die Energie einer Störung, welche dargestellt wird durch

$$\xi = \Sigma C \sin n x \sin (n a t + \gamma), \quad \text{wo} \quad n l = (2i+1)\frac{\pi}{2},$$

gleich ist

$$\frac{1}{4} m l a^2 \Sigma C^2 n^2.$$

Routh, Dynamics &c. 547—556.

Elftes Kapitel.

Lebende Wesen.

1. Ein Floh ruht auf einer Nadel AB in einem gegebenen Punkte E. Die Nadel liegt auf einem glatten horizontalen Tische. Der Floh springt plötzlich nach einem gegebenen Punkte F der Nadel. Welches ist die kleinste Anfangsgeschwindigkeit des Flohes?

Es sei v die Sprunggeschwindigkeit des Flohes, α die Horizontalneigung ihrer Richtung, u die Geschwindigkeit der Nadel während des Sprunges des Flohes, m die Masse der Nadel, m' diejenige des Flohes, $EF = c$.

Weil der Schwerpunkt des Flohes und der Nadel durch den Sprung nicht bewegt wird, so ist

$$-mu + m' V \cos\alpha = 0. \tag{1}$$

Auch haben wir

$$V \sin\alpha = \frac{1}{2} g t. \tag{2}$$

Nun ist der ganze horizontale Weg des Flohes gleich der Distanz EF, vermindert um den Weg, durch welchen der Punkt F während der Zeit t des Sprunges rückwärts geglitten ist, daher

$$\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} = c - ut = c - \frac{m'}{m} V \cos\alpha . t, \text{ durch (1)},$$

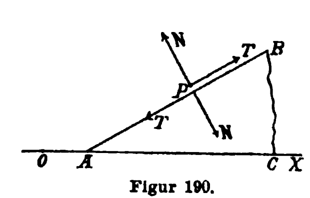
$$= c - \frac{m' V^2 \sin 2\alpha}{mg}, \text{ durch (2)},$$

folglich
$$V^2 = \frac{mcg}{m+m'} \cdot \operatorname{cosec} 2\alpha.$$

Der kleinstmögliche Wert von V ist daher gleich

$$\sqrt{\frac{mcg}{m+m'}}.$$

2. Ein auf einer beweglichen geneigten Ebene, welche sich auf eine glatte horizontale Ebene stützt, plazierter Käfer erhebt sich und kriecht mit einer gegebenen gleichförmigen Geschwindigkeit, relativ zu der geneigten Ebene, dieselbe hinauf. Wie gross ist die Geschwindigkeit der Ebene und der auf sie durch den Käfer ausgeübte Druck?



Figur 190.

Es seien (Fig. 190) P der Ort des Käfers auf der geneigten Ebene AB zu einer beliebigen Zeit t, OX die glatte horizontale Ebene, $\sphericalangle BAX = \alpha$, $u =$ der gleichförmigen relativen Geschwindigkeit des Käfers, $OA = x$, $V = \frac{dx}{dt}$ N, T die Impulse, N', T' die endlichen Wirkungen zwischen Ebene und Käfer parallel und senkrecht zu der geneigten Ebene, m die Masse des Keiles, m' diejenige des Käfers.

Weil der Schwerpunkt der Ebene und des Käfers keine horizontale Bewegung besitzen kann, so haben wir

$$mV + m'(V + u\cos\alpha) = 0,$$

daher
$$V = -\frac{m' u \cos\alpha}{m+m'},$$

was zeigt, dass der Keil in der Richtung XO mit einer Geschwindigkeit fortschreitet, welche gleich ist $\frac{m' u \cos\alpha}{m+m'}$.

Ferner erhalten wir für die impulsiven Wirkungen

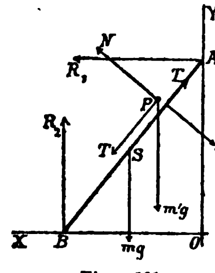
$$T = m'(u + V\cos\alpha) = m' u \frac{m + m' \sin^2\alpha}{m + m'},$$

$$N = -m' V \sin\alpha = \frac{m'^2 u \sin\alpha\cos\alpha}{m + m'}.$$

Für die endlichen Wirkungen bekommen wir, weil der Käfer keine Acceleration besitzt,

$$T' = m' g \sin\alpha, \qquad N' = m' g \cos\alpha.$$

3. Ein Affe ist auf eine geneigt ruhende Stange in der Nähe ihres oberen Endes gesetzt worden. Das untere Ende der Stange befindet sich auf einer glatten horizontalen Ebene, ihr oberes Ende stützt sich gegen eine glatte vertikale Wand. Der Affe beginnt an der Stange in einer solchen Weise herabzuklettern, dass dieselbe in Ruhe bleibt. Wie gross ist die Geschwindigkeit des Affen, wenn er das tiefere Ende der Stange erreicht?



Figur 191.

Es sei (Fig. 191) P der Ort des Affen an der Stange AB zu einer beliebigen Zeit t nach dem Beginne der Bewegung, m die Masse der Stange, m' diejenige des Affen. R_1, R_2 seien die Reaktionen der zwei Stützebenen auf die Stangenenden. N sei die Normal-, T die Longitudalwirkung zwischen dem Affen und der Stange, α die Vertikalneigung von AB, $AB = 2a$, $AP = x$.

Für die Bewegung des Affen entlang der Stange besteht die Gleichung

$$m' \frac{d^2 x}{dt^2} = T + m' g \cos\alpha, \tag{1}$$

für die Erhaltung seiner Berührung mit der Stange

$$N = m' g \sin\alpha. \tag{2}$$

Für das Gleichgewicht der Stange haben wir, wenn wir diese auf eine Vertikale projizieren,

$$R_2 + T\cos\alpha = N\sin\alpha + mg, \tag{3}$$

und, wenn wir Momente um A nehmen,

$$Nx + mga\sin\alpha = 2aR_2\sin\alpha. \tag{4}$$

Mit (2), (3), (4) können wir leicht bestimmen, dass

$$T = m' g \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{m' g x}{2a\cos\alpha} + \frac{mg}{2\cos\alpha}.$$

Durch Substitution dieses Wertes von T in (1) ergiebt sich

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{gx}{2a\cos\alpha} = \frac{g(m + 2m')}{2m'\cos\alpha}. \tag{5}$$

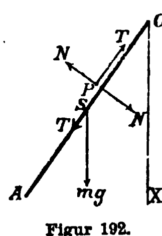
Multiplizieren wir hier mit $2\frac{dx}{dt}$, integrieren und beachten, dass $\frac{dx}{dt} = 0$, wenn $x = 0$ ist, so folgt

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{gx}{2\cos\alpha}\left\{\frac{2}{m'}(m + 2m') - \frac{x}{a}\right\}; \tag{6}$$

wenn daher $x = 2a$, d. h. wenn der Affe in B ankommt, ist seine Geschwindigkeit gleich

$$\sqrt{\frac{2ga(m + m')}{m'\cos\alpha}}.$$

4. Eine Nadel ist mit dem einen ihrer Enden aufgehangen. In dem Aufhängepunkte befindet sich eine Spinne, welche dieselbe Masse wie die Nadel besitzt. Die Nadel besitzt anfangs eine horizontale Lage und wird mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit abwärts geworfen. Wie viel Zeit braucht die Spinne, um nach dem tieferen Ende der Nadel zu rennen, wenn die Bewegung der Spinne eine solche ist, dass dadurch die Winkelgeschwindigkeit der Nadel nicht geändert wird?



Figur 192.

Es sei $m =$ der Masse der Nadel, gleich derjenigen der Spinne, $P =$ dem Orte der Spinne zu einer beliebigen Zeit t auf der Nadel CA (Fig. 192) mit C als Aufhängepunkt, N die normale, T die longitudale Wirkung zwischen der Nadel und der Spinne. Ziehe CX vertikal, lasse sein $CP = x$, $CA = 2a$, $\measuredangle ACX = \vartheta$, $\omega =$ der Winkelgeschwindigkeit der Nadel.

Weil die Winkelgeschwindigkeit der Nadel konstant ist, so haben wir

$$mga\sin\vartheta + Nx = 0. \tag{1}$$

Für die Bewegung der Spinne bestehen die Gleichungen

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x\cos\vartheta) = mg - N\sin\vartheta - T\cos\vartheta, \tag{2}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x\sin\vartheta) = N\cos\vartheta - T\sin\vartheta. \tag{3}$$

Mit (2) und (3) ergiebt sich

$$m\left\{x\sin\vartheta\frac{d^2}{dt^2}(x\cos\vartheta) - x\cos\vartheta\frac{d^2}{dt^2}(x\sin\vartheta)\right\} = mgx\sin\vartheta - Nx.$$

Aber es ist

$$x\sin\vartheta\frac{d^2}{dt^2}(x\cos\vartheta) - x\cos\vartheta\frac{d^2}{dt^2}(x\sin\vartheta)$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{x\sin\vartheta\frac{d}{dt}(x\cos\vartheta) - x\cos\vartheta\frac{d}{dt}(x\sin\vartheta)\right\} = -\frac{d}{dt}\left(x^2\frac{d\vartheta}{dt}\right),$$

folglich erhalten wir

$$m\frac{d}{dt}\left(x^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = Nx - mgx\sin\vartheta,$$

daher durch (1), beachtend, dass $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0$ im vorliegenden Falle ist,

$$2x\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} = -g(x+a)\sin\vartheta.$$

Es ist aber durch die Hypothese $\vartheta = \frac{1}{2}\pi - \omega t$, mithin

$$2\omega x\frac{dx}{dt} = g(x+a)\cos\omega t, \qquad \cos\omega t\,dt = \frac{2\omega}{g}\cdot\frac{x\,dx}{x+a}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt, wenn wir dabei beachten, dass x und t gleichzeitig verschwinden,

$$\frac{1}{\omega}\sin\omega t = \frac{2\omega}{g}\left\{x - a\,l\frac{x+a}{a}\right\}.$$

Daher bekommen wir für die verlangte Zeit

$$\sin\omega t = \frac{2\omega^2}{g}\{2a - a\,l(3)\},$$

$$t = \frac{1}{\omega}arc\left\{\sin = \frac{2\omega^2 a}{g}[2 - l(3)]\right\}.$$

Diese Aufgabe kann auch kürzer in folgender Weise gelöst werden.

Durch das Prinzip von D'Alembert haben wir, Momente um den Aufhängepunkt für das aus Spinne und Nadel bestehende System nehmend,

$$\frac{d}{dt}\left(mx^2\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{4}{3}ma^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = -mg\sin\vartheta\,(x+a),$$

daher wird, für $\frac{d\vartheta}{dt}$ seinen konstanten Wert $-\omega$ setzend,

$$2\omega x\frac{dx}{dt} = g(x+a)\cos\omega t.$$

Dieses ist die durch die erste Lösung erhaltene Differentialgleichung.

5. Eine Fliege steht auf einer Nadel, welche auf einem glatten, horizontalen Tische ruht. Die Fliege spaziert entlang der Nadel nach ihrem anderen Ende. Um wie viel wird dadurch die Nadel verschoben werden?

Bezeichnet c die Länge der Nadel, m die Masse der Nadel, m' diejenige der Fliege, dann wird die Verschiebung der Nadel gleich sein $\frac{m'}{m+m'}c$.

6. Zwei Käfer stehen auf den Enden eines horizontalen Stabes, welcher von einem glatten Tische getragen wird. Einer der Käfer kriecht nach der Mitte der Nadel. Wie weit muss auf ihr der andere Käfer entlang kriechen, damit die Endlage des Stabes dieselbe wie die Anfangslage sein kann?

Es sei β die Masse des ersten, β' diejenige des zweiten Käfers, a die Länge des Stabes, x die Distanz, welche der zweite Käfer zurücklegen muss, dann ist

$$x = \frac{a\beta}{2\beta'}.$$

7. Eine kreisförmige Platte liegt auf einem glatten Tische. Eine Schnecke befindet sich auf der Platte in einem gegebenen Abstande von ihrem Mittelpunkte. Die Schnecke beginnt entlang der Platte in einer kreisförmigen Bahn relativ zu dem Centrum der Platte zu kriechen. Welches ist die Bewegung des Mittelpunktes der Platte?

Bezeichnet m die Masse der Platte, m' diejenige der Schnecke, a den Halbmesser des von der Schnecke beschriebenen relativen Kreises, dann beschreibt der Mittelpunkt der Platte einen Kreis vom Halbmesser $\frac{m' a}{m + m'}$.

8. Eine um eine vertikale Axe durch ihr Centrum bewegliche, kreisförmige Platte ruht auf einem glatten Tische. Ein Insekt geht aus dem Mittelpunkte ab und kriecht, relativ zu der Platte, in einem Kreise von einem Durchmesser gleich dem Halbmesser der Platte. Durch welchen Winkel hat sich die Platte gedreht, wenn das Insekt nach dem Mittelpunkte zurückgekehrt ist?

Es sei m die Masse der Platte, μ diejenige des Insekts, dann ist der verlangte Winkel gleich $\pi\left(1 - \sqrt{\frac{m}{m + 2\mu}}\right)$.

9. Eine kreisrunde, um eine vertikale Axe durch ihren Mittelpunkt bewegliche Platte ruht auf einem horizontalen Tische. Eine logarithmische Spirale, deren Pol mit dem Mittelpunkte der Platte zusammenfällt, ist auf der Platte gezogen. Ein Insekt kriecht der Curve entlang aus dem Punkte, in welchem die Curve den Umfang der Platte trifft. Durch welchen Winkel hat sich die Lamina gedreht in dem Augenblicke, wo das Insekt ihren Mittelpunkt erreicht?

Es sei α der konstante Winkel der Spirale, m die Masse der Scheibe, μ diejenige des Insektes, dann ist der verlangte Winkel gleich

$$\frac{1}{2}\, tg\,\alpha\, l\left(1 + \frac{2\mu}{m}\right).$$

10. Ein homogener, kreisförmiger Draht, von konstantem Querschnitte, ist um einen festen Punkt in der Curve beweglich und liegt auf einer glatten, horizontalen Ebene. Ein Insekt, dessen Masse gleich derjenigen des Drahtes ist, kriecht entlang ihm, indem es ausgeht von dem Punkte, welcher die grösste Entfernung von dem festen Punkte besitzt, mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit relativ zu dem Drahte. Durch welchen Winkel hat sich die Curve nach dem Verlaufe einer beliebigen Zeit t gedreht?

Bezeichnet u die Geschwindigkeit des Insektes relativ zu dem Drahte, a den Radius des Kreises, dann ist der verlangte Winkel gleich

$$\frac{ut}{2a} - \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\left\{tg = \frac{1}{\sqrt{3}}\, tg\frac{ut}{2a}\right\}.$$

11. Eine staare Nadel von unbedeutender Masse, welche um das eine ihre Enden beweglich ist, wird in horizontaler Lage erhalten. Eine fette Fliege ruht auf ihr in einem gegebenen Abstande von dem festen Ende. Plötzlich wird die Nadel losgelassen und die Fliege läuft nach dem festen Ende so, dass die Nadel mit einer gleichförmigen Winkelbeschleunigung sinkt. Wie bewegt sich die Fliege entlang der Nadel?

Wenn r den Abstand der Fliege von dem befestigten Nadelende zu einer beliebigen Zeit t, gerechnet vom Anfange der Bewegung, a den Anfangswert von r bezeichnet, dann ist

$$2t\frac{dr}{dt} + r = a\cos\left(\frac{gt^2}{2a}\right).$$

12. Ein gleichförmiger Stab von der Masse m und der Länge $2a$, welcher unter einem Winkel α zu dem Horizonte geneigt ist, ist in Ruhe, er wird gehalten von einer Stütze, an welcher ihr Mittelpunkt fest ist. Eine Maus von der Masse μ ruht auf dem Stabe an dem Stützpunkte. Nach einer gewissen Zeit beginnt die Maus entlang dem Stab mit einer zur Tangente der Neigung jederzeit proportionalen Geschwindigkeit zu laufen und wenn sie an dem Ende des Stabes ankommt, so ist die Horizontalneigung des Stabes gleich β. Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit des Stabes für einen beliebigen Neigungswinkel ϑ zwischen α und β?

Das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ist gleich

$$\frac{2g \cdot tg\,\beta\,(\cos\alpha - \cos\vartheta)}{a\left(\frac{m}{3\mu}tg^2\beta + tg^2\vartheta\right)^2} \cdot \left(\frac{m}{3\mu}tg^2\beta - 1 + \sec\alpha\sec\vartheta\right).$$

13. Ein Affe steigt mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit eine Leiter hinauf; das tiefere Ende der Leiter ist befestigt und ihr höheres Ende stützt sich gegen eine vertikale Wand. Wie gross ist der Druck der Leiter auf die Wand?

Es bezeichne $2a$ die Länge der Leiter, α ihre Horizontalneigung, x die Entfernung des Affen zu einer beliebigen Zeit von dem Fusse der Leiter, R den entsprechenden Druck der Leiter auf die vertikale Wand, m die Masse der Leiter, m' diejenige des Affen, dann ist

$$R = \frac{g\,cotg\,\alpha}{2a}(m\,a + m'\,x).$$

14. Zwei kleine Affen, deren Massen m, m' sind, klammern sich an die zwei Teile einer dünnen, unelastischen Schnur, welche über eine glatte, feste Rolle läuft. Die Affen halten sie mit den Accelerationen f, f' resp. absteigend. Wie gross ist die Spannung der Schnur?

Die verlangte Spannung ist gleich $\frac{m\,m'\,f\,f'}{m - m'}$.

15. Eine Planke, auf welcher in dem oberen Ende ein Hund steht, liegt direkt entlang einer glatten, geneigten Ebene. Wie viel Zeit hat der Hund nötig, um die Planke herabzulaufen, so dass sie sich nicht eher bewegt, als bis der Hund davon ist?

Bezeichnet b die Länge der Planke, α die Horizontalneigung der Ebene, m die Masse der Planke, m' diejenige des Hundes, dann ist die verlangte Zeit gleich

$$\sqrt{\frac{2m'l}{g\sin\alpha\,(m + m')}}.$$

16. Ein Seil von unbeträchtlichem Gewichte ist über eine glatte, feste Rolle gehangen. Zwei Affen beginnen zusammen hinauf zu klettern, ohne zu schnellen, in einer solchen Weise, dass das Seil nicht über die Rolle gleitet, und beide die Rolle in demselben Augenblicke erreichen. Wie gross ist die Zeit ihres Aufsteigens nach der Rolle, wenn ihre Anfangsstellungen und ihre Massen gegeben sind?

Lasse bezeichnen m, m' die Massen der Affen, a, a' ihre anfänglichen Entfernungen von der horizontalen Ebene durch die Axe der Rolle, dann ist die verlangte Zeit gleich

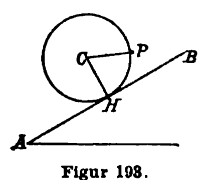
$$\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{m\,a - m'\,a'}{m' - m}}.$$

17. Ein kreisförmiger Ring befindet sich vertikal auf einer vollkommen rauhen Tafel. Ein Ohrwurm wird sanft auf den Ring gesetzt. Wie muss die Winkelgeschwindigkeit des Ohrwurmes um den Mittelpunkt des Ringes beschaffen sein, damit der Ring sich nicht bewegen kann?

Es sei a der Halbmesser des Ringes, ϑ die Horizontalneigung des Abstandes des Ohrwurmes von dem Mittelpunkte des Ringes zu einer beliebigen Zeit, α der Anfangswert von ϑ, ω die Winkelgeschwindigkeit des Ohrwurmes in dieser Stellung, dann ist

$$\omega^2 = \frac{g}{a} \cdot \frac{(\sin\alpha - \sin\vartheta) \cdot (2 + \sin\alpha + \sin\vartheta)}{(1 + \sin\vartheta)^2}.$$

18. Ein vollkommen rauher, kreisförmiger Reifen rollt mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit direkt eine vollkommen rauhe, geneigte Ebene hinauf durch die Thätigkeit einer Maus entlang seinem Umfang. Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit der Maus um den Mittelpunkt des Reifens in irgend einer Stellung, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Maus in einem gegebenen Punkte bekannt ist?



Figur 193.

Lasse sein (Fig. 193) C den Mittelpunkt des Reifens zu einer beliebigen Zeit, H den Berührungspunkt des Reifens und der geneigten Ebene AB, P die Stellung der Maus, $\measuredangle PCH = \vartheta$, $\omega =$ der Winkelgeschwindigkeit der Maus um C, $m =$ der Masse des Reifens, $m' =$ derjenigen der Maus, $\alpha =$ der Horizontalneigung von AB, $a =$ dem Radius des Reifens, dann ist

$$m' a (1 - \cos\vartheta)^2 \omega^2 = C + 2g(m + m') \sin\alpha (\vartheta - \sin\vartheta)$$
$$+ 2m'g \left\{ \cos(\vartheta + \alpha) - \cos(2\vartheta + \alpha) + 2\vartheta \sin\alpha \right\},$$

wobei C eine Konstante bedeutet, welche ausgedrückt werden kann durch gegebene gleichzeitige Werte von ω und ϑ.

19. Eine gegebene Röhre von der Gestalt einer Helix ist rund um einen gegebenen ruhenden Cylinder befestigt, welcher um seine stationäre vertikale Axe drehbar ist. Eine gegebene Wespe fliegt nach dem tieferen Ende der Röhre und lässt sich daselbst sanft nieder. Hierauf kriecht sie durch die Röhre und fliegt, am oberen Ende angekommen, leicht hinweg. Beweise, dass die daraus hervorgehende Winkelgeschwindigkeit des Cylinders variiert wie die Geschwindigkeit der Wespe, relativ zu der Röhre, in dem Augenblicke vor ihrem Wegfluge.

20. Ein kleines Eichhörnchen hängt sich an einen dünnen, rauhen Reifen mit vertikaler Ebene, welcher entlang einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene rollt. Das Eichhörnchen macht einen Haltepunkt in einer konstanten Höhe über der horizontalen Ebene und wählt seinen Platz auf dem Reifen so, um aus einer augenblicklichen Ruhelage die grösstmögliche Distanz in einer gegebenen Zeit zurückzulegen. Wie gross ist die Vertikalneigung der Distanz des Eichhörnchens von dem Mittelpunkt des Reifens?

Bezeichnet m die Masse des Eichhörnchens, m' diejenige des Reifens, dann ist die verlangte Neigung gleich

$$arc\left(\cos = \frac{m}{m + 2m'}\right).$$

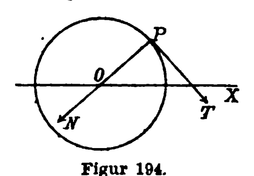
21. Zwei Wassereimer von gegebenem Gewichte sind an die Enden einer dünnen, unelastischen, über eine feste, glatte Rolle laufende Schnur gehangen. In der Mitte der Basis des einen Eimers sitzt ein Frosch von gegebenem Gewichte. In einem Momente augenblicklicher Ruhe der Eimer springt der Frosch vertikal aufwärts und ge-

langt dadurch in gleiche Höhe mit dem Rande seines Eimers. Wie gross ist das Verhältnis aus der absoluten Höhe des Sprunges des Frosches und der Tiefe seines Eimers? Welche Zeit verfliesst bis dahin, wo der Frosch wieder an der Basis seines Eimers ankommt?

Bezeichnet m die Masse von des Frosches Eimer, m' diejenige des anderen Eimers, μ diejenige des Frosches, h die Tiefe von des Frosches Eimer, h' die Höhe seines absoluten Aufstieges im Raume, t die verlangte Zeit, dann ist

$$\frac{h'}{h} = \frac{2\,m'\,(m+m')}{(m+m'+\mu)^2}, \qquad t^2 = \frac{4\,h}{m'\,g}\,(m+m').$$

22. Ein kleiner Käfer ist an ein Ende des horizontalen Durchmessers eines dünnen, schweren, ruhenden Ringes, welcher um seinen Mittelpunkt in einer vertikalen Ebene beweglich ist, gesetzt worden. Der Käfer beginnt plötzlich rund um auf dem Ringe zu kriechen und beschreibt dabei im Raume gleiche Winkel in gleichen Zeiten um den Mittelpunkt des Ringes. Welches ist die Geschwindigkeit des Käfers relativ zu dem Ringe bei einer beliebigen Stellung? Welches ist der Druck des Käfers auf den Ring in dieser Stellung?



Figur 194.

Es sei (Fig. 194) P die Position des Käfers zu einer beliebigen Zeit t nach seinem Aufbruche, O der Mittelpunkt des Ringes, OX eine horizontale Linie, a = dem Radius des des Ringes, m = seiner Masse, m' = der Masse des Käfers, $\measuredangle POX = \vartheta$, ω = dem konstanten Werte von $\frac{d\vartheta}{dt}$, N der normale, T der tangentiale Druck des Käfers auf den Ring. Die verlangte relative Geschwindigkeit des Käfers ist gleich

$$\frac{m'g}{m\,\omega}\cdot \sin\omega t + a\,\frac{m+m'}{m}\,\omega.$$

Für den Druck des Käfers auf den Ring bestehen die Relationen

$$N = m'\,(g \sin\omega t - a\,\omega^2), \qquad T = m'\,g \cos\omega t.$$

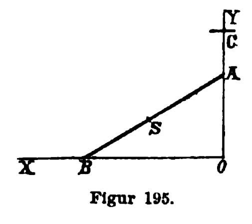
Mackenzie and Walton, Solutions of the Cambridge Problems for 1854.

23. Ein gegebenes, kleines Tier klammert sich in einem gegebenen Punkte an einen gleichförmigen, ruhenden Stab, welcher mittelst eines glatten Charniers von der Decke eines Zimmers herabhängt. Das Tier macht plötzlich einen Sprung nach einem Brette an der Wand, welches in der durch die anfängliche Position des Tieres gehenden horizontalen Ebene und in einem gegebenen Abstande von dem Stabe liegt. Der Winkel, durch welchen der Stab infolge davon aus der vertikalen Lage herausschwingt, wird beobachtet. Wie gross muss der impulsive Druck auf das Charnier in dem Augenblicke gewesen sein, wo das Tier abspringt?

Es bezeichne m die Masse des Stabes, μ diejenige des Tieres, $2a$ die Länge des Stabes, b die Höhe des oberen Endes des Stabes von der Leiste, c den Anfangsabstand des Stabes von der Leiste, α den beobachteten Oscillationswinkel, X den horizontalen, Y den vertikalen Impuls auf das Charnier, dann ist

$$X = \frac{m}{b}\,(4\,a - 3\,b)\sqrt{\frac{a\,g}{3}}\,\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad Y = \frac{b\,c\,\mu^2}{8\,m\,a\,\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{3\,g}{a}}.$$

24. Ein Stab AB (Fig. 195) ist mittelst kleiner Ringe mit seinen Enden an den festen horizontalen Stab OX und den festen vertikalen Stab OY gefesselt. Ein Mann



Figur 195.

hält den Stab AB in einer gewissen Lage fest. Auf einer kleinen, vertikal über O gelegenen Platte C sitzt ein Affe. Plötzlich springt der Affe in horizontaler Richtung von C ab und lässt sich in dem Mittelpunkte S des Stabes AB nieder, an welchem er sich festklammert. Wie ist die Bewegung des Stabes AB in dem Augenblicke nach der Ankunft des Affen in S beschaffen, wenn der Mann augenblicklich vorher den Stab losgelassen hat?

Lasse sein $AS = a = BS$, $\sphericalangle ABO = \vartheta$, $m =$ der Masse des beweglichen Stabes, $m' =$ derjenigen des Affen, $u =$ der Geschwindigkeit, mit welcher der Affe von C abspringt, $h =$ der vertikalen Höhe von C über S, dann ist die Winkelgeschwindigkeit von AB, in dem Augenblicke nach der Ankunft des Affen in S, gleich

$$\frac{3m'}{a} \cdot \frac{\sqrt{2gh}\,.\cos\vartheta + u\sin\vartheta}{4m + 3m'}.$$

25. Ein kleines Tier sitzt in dem Mittelpunkte einer dünnen, gleichförmigen, ruhenden Stange. Die Enden dieser Stange sind mittelst kleiner Ringe an zwei glatten, festen Stäben befestigt, welche rechtwinkelig zu einander in einer horizontalen Ebene liegen. Das Tier beginnt mit einer gegebenen relativen Geschwindigkeit die Stange entlang zu wandern. Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit, welche dadurch anfangs der Stange beigebracht wird?

Es sei m die Masse des Tieres, m' diejenige der Stange, $2a$ die Länge der Stange, ϑ die Neigung der Stange zu einem der Stäbe, V die gegebene Geschwindigkeit des Tieres, dann ist die verlangte Winkelgeschwindigkeit der Stange gleich

$$\frac{3m}{3m + 4m'} \cdot \frac{V\sin 2\vartheta}{a}.$$

26. Ein von einem Hunde verfolgter Fuchs läuft mit gleichförmiger Geschwindigkeit über einen schwachen Bogen, welcher die Form einer Cycloide besitzt. Der Hund steht plötzlich an einer schwachen Stelle stille und bricht durch, er erreicht den flachen Boden mit einer Geschwindigkeit gleich derjenigen des Fuchses. Beweise, dass der Fuchs keinen Normaldruck auf den Bogen an der Stelle, wo der Hund durchbrach, ausübte.

27. Ein Mann vom Gewichte W steht auf einem glatten Eise. Beweise, dass, wenn er allmählich seine gerade gehaltenen Beine von einander entfernt, während seine Füsse stets mit dem Eise in Berührung bleiben, der Druck seiner Füsse auf das Eis konstant ist und sein Kopf mit einer gleichförmigen Acceleration herabsinkt. Bezeichnet f die Beschleunigung seines Kopfes, wenn seine Füsse keinen Druck auf das Eis ausüben, so ist ihr Druck auf das Eis, wenn sein Kopf mit einer Beschleunigung f' sinkt, gleich

$$\frac{f - f'}{f} \cdot W.$$

1—25. Walton, p. 630—642. 26 u. 27. Walton, p. 662.

Verbesserungen und Zusätze.

Im ersten Bande.

S. 6, Z. 5 lies: und fallen diese Linien zusammen.
S. 11, Z. 30 „ $4r^2 X^4$ statt $4r^2 X$.
S. 12, Z. 11 „ $4r^2 X^4$ „ $4r^2 X$.
S. 20, Z. 23 „ $a\beta X$ „ $\alpha\beta X$.
S. 22, Z. 33 „ $X = a$ „ $X = 0$.
S 23, Z. 1 „ $X = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}$ statt $\frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}$.
S. 23, Z. 22 „ $a\beta X$ statt $\alpha\beta X$.

Problem 5, S. 20 etc. Es ist zweckmässiger, bei der Bestimmung der Curve (Γ) den Ursprung des beweglichen Coordinatensystemes mit dem Punkte B zusammenfallen zu lassen, womit sich als deren Gleichung ergiebt

$$(X^2 - r\,Y)^2 = a^2\,(X^2 + Y^2).$$

S. 24, Z. 4 tilge $+ \alpha\beta X$.
S. 24, Z. 12 lies: $r\beta X$ statt $\alpha\beta X$.
S. 24, Z. 18 „ $a\beta X$ „ $\alpha\beta X$.
S. 26, Z. 32 „ $+\alpha^2$ „ $-\alpha^2$ und $4\alpha^2(X^2 + Y^2 - e\,X)^2$.
S. 30, Z. 1 „ $-(r - e - \alpha)$ statt $-(r - e + \alpha)$.
S. 31, Z. 35 „ $= \frac{r^2}{e^2}$ statt $+ \frac{r^2}{e^2}$.
S. 33, Z. 1 von unten lies: ϑ' statt ϑ.
S. 38, Z. 31 lies: $\measuredangle\, O\,C\,M = \pi - \gamma$.
S. 38, Z. 32 „ $\measuredangle\, C\,M\,X = \pi + \varphi - \gamma$.
S. 39, Z. 39 „ dessen Ordinatenaxe $\perp P\,O$ ist.
S. 40, Z. 10 „ $+ 2\beta(\alpha e - \mu\beta)\,Y$ statt $-2\beta(\alpha e + \mu\beta)\,Y$.
S. 40, Z. 31 „ $2(e\,X + \mu\,Y)$ statt $2\,(e\,X - \mu\,Y)$.
S. 42, Z. 18 „ $(r_2^2 - r_1^2)$ statt $(r_1^2 - r_2^2)$.
S. 42, Z. 3 von unten lies: $(X^2 + Y^2)\{X^2 + r_1^2 + r_2^2 - e^2\}^2 = 4\,r_2^2\{X^2 + r_1\,Y^2\}^2$.
S. 44, Z. 13 lies: r_1 statt r_2.
S. 45, Z. 26 „ und $-\frac{r_1}{e - r_2}$ statt $\frac{r_1}{e + r_2}$.
S. 47, Z. 3 von unten tilge e vor den Wurzelgrössen.
S. 59, Z. 17 lies: archimedische statt archimetische.
S. 61, Z. 22 „ $\frac{v_r}{v_s} = -\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta \pm \frac{1}{2}}$ statt $-\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta \mp 1}$.

S. 61, Z. 28 lies: $OC + \frac{1}{2} OA$ statt $2 . OA - OC$.

S. 62, Z. 3 „ MM_1 statt $M_0 M_1$.

Zusatz zur Tangentenkonstruktion an die Ellipse, S. 61 etc.:

Professor v. Lang gelangt durch folgende Betrachtung dazu, dass die Normale an die Ellipse den Winkel der beiden Fahrstellen halbiert:

„Um durch statische Überlegungen den Satz zu beweisen, gehe man von der bekannten Konstruktion der Ellipse mit Hilfe eines Fadens aus, dessen Enden mit den beiden Brennpunkten zusammenfallen. Die Brennpunkte wollen wir uns in verschiedener Höhe denken und den Faden durch einen Ring gezogen, an welchem Ring ein Gewicht mittelst eines zweiten Fadens befestigt ist. Es stellt sich dann natürlich ein Gleichgewichtszustand her, bei welchem die vertikale Richtung des zweiten Fadens senkrecht zur Ellipse sein muss, also mit der Richtung der Normalen zusammenfällt.

Man kann sich aber die Sache auch so vorstellen, dass der Ring unter dem Einflusse dreier Kräfte im Gleichgewichte sei, indem ausser dem Gewichte noch zwei Kräfte nach den Brennpunkten gerichtet auf den Ring wirken. Diese zwei Kräfte, durch die Spannung des ersten Fadens repräsentiert, müssen natürlich gleich gross sein und ihre Resultierende wird daher den Winkel, den sie mit einander bilden, halbieren. Da diese Resultierende gleich und entgegengesetzt der dritten Kraft ist, so ist damit der Satz bewiesen."

S. 63, Z. 20 lies $v_v = c \cos \frac{\varphi}{2}$ statt $v_v = \cos \frac{\varphi}{2}$.

S. 66, Z. 2 von unten lies $\varphi_v = -a \omega^2 \sin \omega t$ statt $\varphi_v = -a \omega \sin \omega t$.

S. 75, Z. 3 u. ff. Die Lösung der Differentialgleichung

$$dv = -g \frac{R^2}{s^2} dt$$

ist in folgender Weise zu bewirken, denn s ist nicht konstant,

$$dv = -g R^2 \left(\frac{2gR^2 - v_0^2 + v^2}{2gR^2}\right)^2 dt,$$

$$\int_0^t dt = 4gR^2 \int_v^{v_0} \frac{dv}{(2gR^2 - v_0^2 + v^2)^2} = 4gR^2 \int_v^{v_0} \frac{dv}{(a+v^2)^2}, \text{ mit } 2gR^2 - v_0^2 = a,$$

$$t = 4gR^2 \left[\frac{v}{2a(a+v^2)} + \frac{1}{2a}\int \frac{dv}{a+v^2}\right]_v^{v_0}$$

$$= 4gR^2 \left[\frac{v}{2a(a+v^2)} + \frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}} arc\left(tg = \frac{v}{\sqrt{a}}\right) + C\right]_v^{v_0},$$

$$t = \frac{2gR^2(v_0 - v)}{(2gR^2 - v_0^2)(2gR^2 - v_0^2 + v^2)} + \frac{2gR^2}{(2gR^2 - v_0^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{arc\left(tg = \frac{v_0}{\sqrt{2gR^2 - v_0^2}}\right) - arc\left(tg = \frac{v}{\sqrt{2gR^2 - v_0^2}}\right)\right\}.$$

Hieraus folgt mit $v = 0$ als ganze Steigzeit

$$T = \frac{2gR^2}{(2gR^2 - v_0^2)^2}\left\{v_0 + (2gR^2 - v_0^2)^{\frac{1}{2}} arc\left(tg = \frac{v_0}{\sqrt{2gR^2 - v_0^2}}\right)\right\}.$$

S. 286, Z. 10 lies: $v_x = 0$ statt $v_x = -c$.

Damit ergiebt sich

$$x = -\frac{1}{4} g \sin 2\alpha . t^2, \qquad y = \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha . t^2, \qquad y = -tg\, \alpha . x,$$

so dass die relative Bahn des Punktes die Gerade AB ist. Die irrtümlich als relative Bahn gefundene Bahn ist die absolute Bahn des Punktes, wenn die geneigte Ebene in entgegengesetzter Richtung sich bewegt.

S. 286, b). Hier wird vorausgesetzt, dass die geneigte Ebene mit der gegebenen konstanten Beschleunigung p sich bewegt, also die Druckbeschleunigung auf die Bewegung der Ebene keinen Einfluss hat.

S. 287, Z. 1 lies: $\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{1}{2} g \sin 2\alpha$ statt $-\left(\frac{1}{2} g \sin 2\alpha + p\right)$.

Die Bewegungsgleichungen ergeben dann für die relative Bahn des Punktes

$$y = -tg\,\alpha \,.\, x$$

Die irrtümlich als relative Bahn gefundene Bahn ist diejenige, wenn die Ebene die Acceleration $-p$ besitzt.

S. 287, Z. 7 und folgende. Für das in Figur 113 angenommene Coordinatensystem sind die Bewegungsgleichungen, wenn die Ebene im Sinne des Pfeiles transliert,

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -(g \sin\alpha + p \cos\alpha), \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = -p \sin\alpha.$$

Für die relative Bewegung haben wir in diesem Falle

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -g \sin\alpha, \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = 0, \qquad y = 0.$$

Anders gestaltet sich die Lösung der Aufgabe 1, b) S. 285, wenn wir voraussetzen, dass die geneigte Gerade AB anfangs die Beschleunigung p besitzt und die Druckbeschleunigung $N = g \cos\alpha - p \sin\alpha$ bei der Bewegung der Geraden AB mit in Frage gezogen wird. Die Gleichungen für die absolute Bewegung des Punktes sind jetzt mit dem Coordinatensysteme in Figur 112

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -N \sin\alpha = -(g \cos\alpha - p \sin\alpha) \sin\alpha,$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = -N \cos\alpha + g = (p \cos\alpha + g \sin\alpha) \sin\alpha,$$

so dass seine absolute Bahn durch die Gleichung gegeben ist

$$y = \frac{p \cos\alpha + g \sin\alpha}{p \sin\alpha - g \cos\alpha} \cdot x.$$

Für die relative Bewegung des Punktes haben wir

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -N \sin\alpha - p, \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = -N \cos\alpha + g,$$

womit wir für seine relative Bahn die Gleichung erhalten

$$y = -tg\,\alpha \,.\, x,$$

welche die Gerade AB ist.

Ist die Acceleration p von entgegengesetztem Sinne, dann haben wir in vorstehenden Gleichungen nur $-p$ an die Stelle von p zu setzen, um die Lösung der Aufgabe zu erhalten.

Die Gleichung der absoluten Bahn ist in diesem Falle

$$y = \frac{g \sin\alpha - p \cos\alpha}{g \cos\alpha + p \sin\alpha} x.$$

Soll daher unter diesen Verhältnissen der Punkt eine horizontale Gerade beschreiben, dann muss

$$p = g\, tg\,\alpha$$

sein.

Gehen wir mit den in Fig. 113 angenommenen Coordinatenaxen zu Werke und wirkt p in entgegengesetzter Richtung des Pfeiles, dann haben wir für die absolute Bewegung des Punktes

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -g \sin\alpha, \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = g \cos\alpha - p \sin\alpha, \qquad y = \frac{p \sin\alpha - g \cos\alpha}{g \sin\alpha} x,$$

dagegen für seine relative Bewegung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -(p \cos \alpha + g \sin \alpha), \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \qquad x = -\frac{1}{2}(p \cos \alpha + g \sin \alpha)\, t^2.$$

Bewegt sich dagegen die Gerade im Sinne des Pfeiles, dann erhalten wir für die relative Bahn

$$x = \frac{1}{2}(p \cos \alpha - g \sin \alpha)\, t^2,$$

so dass mit $p = g \, tg \, \alpha$ der Punkt eine horizontale Gerade beschreibt.

Siehe auch Band II, S. 345, Aufgabe 8 etc.

Im zweiten Bande.

S. 462, Figur 155 lies S' statt S für den Punkt auf der Geraden $O\,Y'$.

